

А. Г. РЕЙДЕМЕЙСТЕР (ДИИТ), Н. П. СНИТКО (Министерство инфраструктуры Украины, Киев)

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ ЭЛЕКТРОВОЗА ЧС4

Приведено описание модели колебаний электровоза ЧС4. Последний рассматривается как механическая система, состоящая из 9 твердых тел (кузов, рамы двух тележек, 6 колесных пар).

Ключевые слова: электровоз, моделирование, показатели динамики

Парк локомотивов (и подвижного состава вообще) обновляется крайне медленно, машины эксплуатируются по несколько десятков лет, и эта ситуация едва ли изменится в ближайшей перспективе. Замедлить процесс морального старения можно путем модернизации существующих машин. Ниже приведена модель колебаний электровоза ЧС4, позволяющая оценить разные варианты модернизации ходовых частей. Применен стандартный подход, экипаж рассматривается как совокупность твердых тел, соединенных упругими, вязкими и фрикционными элементами.

1. *Конструкция.* Локомотив 1-секционный, состоит из кузова и двух тележек. Тележки 3-осные, жесткая рама опирается на буксы колесных пар через пружины 1-й ступени рессорного подвешивания, которые работают в вертикальном направлении. Продольные и поперечные

нагрузки воспринимают сайлентблоки. У каждой буксы установлен гидравлический гаситель колебаний. На раму тележки кузов опирается через 4 упругих опоры, которые можно рассматривать как элементы 2-й ступени рессорного подвешивания. Верхняя часть опоры жестко связана с кузовом, нижняя скользит по тележке, т. е. в продольном и поперечном направлении опоры работают как фрикционные элементы, препятствующие боковому откосу и повороту тележки в горизонтальной плоскости. Гасителей колебаний во 2-й ступени нет. Большие продольные и поперечные нагрузки передаются от рамы тележки к кузову через шкворневой узел. Тележки соединены упругим элементом, работающим в поперечном направлении. Подвеска двигателей – опорно-рамная. Схема расположения элементов рессорного подвешивания приведена на рис. 1.

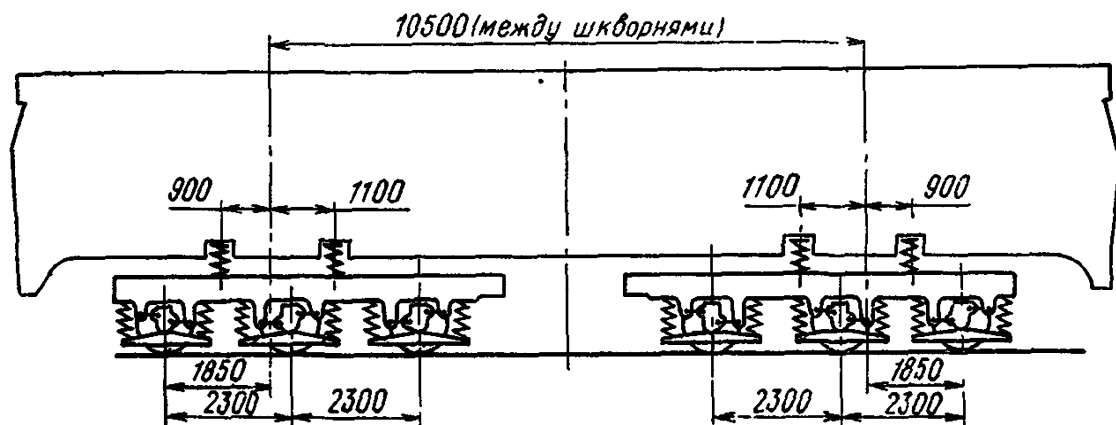


Рис. 1. Схема рессорного подвешивания [1, рис. 6]

2. *Расчетная схема. Обобщенные координаты.* Экипаж рассматриваем как совокупность 9 твердых тел (кузов, рамы 2-х тележек, 6 колесных пар), каждое из которых обладает 6 степенями свободы, три из которых соответствуют линейным перемещениям центра тяжести в продольном x , поперечном y и вертикальном z направлениях, три – вращениям вокруг про-

дольной θ , поперечной φ и вертикальной ψ осей, проходящих через центр тяжести соответствующего тела (они являются главными центральными осями инерции либо мало отличаются от последних). Верхний индекс «к» обозначает кузов, «р» – раму тележки, «кп» – колесную пару, нижние индексы нумеруют тела, i – номер тележки по ходу движе-

ния, m – номер скользуна или номер колесной пары в тележке, j – сторона вагона (1 – левая, 2 – правая). Непосредственно взаимодействующая с колесом часть верхнего строения пути моделируется как механическая система с двумя степенями свободы, соответствующим поперечному y_{imj}^p и вертикальному z_{imj}^p перемещениям головки рельса. Все перемещения считаются малыми, кроме угла поворота колесной пары вокруг своей оси $\varphi_{im}^{кп}$. Общее количество степеней свободы – 78.

3. Упругие опоры кузова на раму тележки (вторая ступень рессорного подвешивания). Деформации опор (компоненты перемещения кузова относительно рамы тележки вблизи опоры):

$$\mathbf{r}_{imj}^{ck, k} = \mathbf{r}^k + \mathbf{\Gamma}^k \mathbf{r}_{imj}^{ck, k} - \mathbf{r}_i^p - \mathbf{\Gamma}_i^p \mathbf{r}_{imj}^{ck, p}, \quad (1)$$

$$\mathbf{r}_{imj}^{ck} = \begin{pmatrix} x_{imj}^{ck} & y_{imj}^{ck} & z_{imj}^{ck} \end{pmatrix}^T,$$

где \mathbf{r}^k , \mathbf{r}_i^p – смещение центра тяжести кузова и рамы i -й тележки относительно положения равновесия,

$$\mathbf{r}^k = \begin{pmatrix} x^k & y^k & z^k \end{pmatrix}^T, \quad \mathbf{r}_i^p = \begin{pmatrix} x_i^p & y_i^p & z_i^p \end{pmatrix}^T;$$

$\mathbf{\Gamma}^k$, $\mathbf{\Gamma}_i^p$ – матрицы поворота взаимодействующих тел,

$$\mathbf{\Gamma}^k = \begin{pmatrix} -\psi^k & \varphi^k \\ \psi^k & -\theta^k \\ -\varphi^k & \theta^k \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{\Gamma}_i^p = \begin{pmatrix} -\psi_i^p & \varphi_i^p \\ \psi_i^p & -\theta_i^p \\ -\varphi_i^p & \theta_i^p \end{pmatrix};$$

$\mathbf{r}_{imj}^{ck, k}$, $\mathbf{r}_{imj}^{ck, p}$ – координаты опоры в системах отсчета, связанных с кузовом и рамой i -й тележки,

$$\mathbf{r}_{imj}^{ck, k} = \begin{pmatrix} S(i)[l + d_a \delta_{im} + d_b (\delta_{im} - 1)] \\ -S(j)b_2 \\ h^{k, ck} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{imj}^{ck, p} = \begin{pmatrix} S(i)[d_x + d_a \delta_{im} + d_b (\delta_{im} - 1)] \\ -S(j)b_2 \\ -h^{p, ck} \end{pmatrix};$$

δ_{im} – символ Кронекера (равен единице, если оба индекса принимают одинаковые значения, и нулю, если разные); $S(i) = \delta_{i1} - \delta_{i2}$ – функция, значение которой равно единице, если ее

аргумент равен 1, и -1 , если аргумент равен 2; $2l = 10,5$ м – база кузова; $d_a = 0,9$ м, $d_b = 1,1$ м – расстояние в продольном направлении от шкворня до наружных и внутренних опор соответственно (см. рис. 1); $2b_2 = 2,08$ м – расстояние в поперечном направлении между опорами; $h^{k, ck} = 1,15$ м, $h^{p, ck} = 0,21$ м – расстояние от центра тяжести кузова и рамы тележки до плоскости опор; $d_x = 0,68$ м – расстояние в продольном направлении от центра тяжести рамы тележки до шкворня.

Вертикальная компонента силы взаимодействия кузова и тележки в опоре вызвана деформацией витой 2-рядной пружины жесткости $C_z^{(2)} = 1930$ кН/м,

$$Z_{imj}^{ck} = C_z^{(2)} z_{imj}^{ck}.$$

Продольная и поперечная компоненты силы обусловлены трением скольжения нижней части опоры по раме тележки,

$$X_{imj}^{ck} = \mu_2 \left(Z_{imj}^{ck} + \frac{m^k g}{8} \right) \frac{\dot{x}_{imj}^{ck}}{\sqrt{(\dot{x}_{imj}^{ck})^2 + (\dot{y}_{imj}^{ck})^2}},$$

$$Y_{imj}^{ck} = \mu_2 \left(Z_{imj}^{ck} + \frac{m^k g}{8} \right) \frac{\dot{y}_{imj}^{ck}}{\sqrt{(\dot{x}_{imj}^{ck})^2 + (\dot{y}_{imj}^{ck})^2}},$$

где $m^k = 68,9$ т – масса кузова; значение коэффициента трения μ_2 не приведено в технической документации на локомотив, поскольку нижняя часть опоры и скользуны тележки находятся в масляной среде, можно считать, что $\mu_2 = 0,05 \dots 0,10$. Все компоненты силы соберем в вектор

$$\mathbf{F}_{imj}^{ck} = \begin{pmatrix} X_{imj}^{ck} & Y_{imj}^{ck} & Z_{imj}^{ck} \end{pmatrix}^T.$$

В дальнейшем, для других узлов сочленения, мы не станем выписывать выражение для деформации, которое строится по той же схеме, что и выражение (1), оговаривать связь вектора перемещения центра тяжести \mathbf{r} и матрицы поворота $\mathbf{\Gamma}$ с обобщенными координатами $x, y, z, \theta, \varphi, \psi$, вектора F с компонентами силы X, Y, Z и проч., а ограничимся лишь выражениями для координат точек крепления узла сочленения к взаимодействующим телам и для силы взаимодействия (через относительные перемещения и скорости).

4. Шкворень, как и упругие опоры соединяет кузов с рамой тележки. Координаты шкворня в системах отсчета, связанных со взаимодействующими телами:

$$\mathbf{r}_i^{\text{м,к}} = \begin{pmatrix} S(i)l \\ 0 \\ h^{\text{к,м}} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_i^{\text{м,р}} = \begin{pmatrix} S(i)d_x \\ 0 \\ h^{\text{р,м}} \end{pmatrix},$$

где $h^{\text{к,м}} = 1,46$ м, $h^{\text{р,м}} = 0,10$ м – высота центра тяжести кузова и рамы тележки над шкворнем. Продольные усилия передаются через шкворень жестко ($C_x^{\text{м}}$ – десятки тысяч кН/м). Поперечные усилия воспринимают пружины, расположенные по обе стороны от шкворня (слева и справа). Жесткость каждой пружины $C_y^{\text{м}} = 1,85$ МН/м, пружины установлены с предварительным натягом, поэтому при малых

$$Y_i^{\text{м}} = \begin{cases} 2C_y^{\text{м}} y_i^{\text{м}}, & \text{если } (y_i^{\text{м}} \leq \delta_1^{\text{м}}, \\ C_y^{\text{м}} (y_i^{\text{м}} + \delta_1^{\text{м}} \text{sign } y_i^{\text{м}}), & \text{если } \delta_1^{\text{м}} < (y_i^{\text{м}} \leq \delta_2^{\text{м}}, \\ C_y^{\text{м}} (y_i^{\text{м}} + \delta_1^{\text{м}} \text{sign } y_i^{\text{м}}) + C_y^{\text{м}} (y_i^{\text{м}} - \delta_2^{\text{м}} \text{sign } y_i^{\text{м}}), & \text{если } \delta_2^{\text{м}} < (y_i^{\text{м}}). \end{cases}$$

5. Буксы (первая ступень рессорного подвешивания). Координаты буксы в системах отсчета, связанных с центрами тяжести рамы тележки и колесной пары:

$$\mathbf{r}_{imj}^{\text{б,р}} = \begin{pmatrix} S(i)(d_x + l_1^{\text{м}}) + l_1(2 - S(i) - m) \\ -S(j)b_1 \\ h^{\text{р,б}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{imj}^{\text{б,кп}} = \begin{pmatrix} 0 \\ -S(j)b_1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $2l_1 = 4,6$ м – база тележки; $l_1^{\text{м}} = 1,85$ м – расстояние от шкворня до наружной колесной пары; $2b_1 = 2,08$ м – расстояние между буксами одной колесной пары (по осям упругих элементов 1-й ступени рессорного подвешивания); $h^{\text{р,б}} = 0,475$ м – высота центра тяжести рамы тележки над плоскостью колесных пар. Раму с колесной парой соединяют поводковая группа и 2 вертикальные витые пружины. Жесткости поводковой группы: $C_x^{\text{пр1}} = 70$ МН/м, $C_y^{\text{пр1}} = 6$ МН/м, $C_z^{\text{пр1}} = 540$ кН/м. Жесткость пружины в вертикальном направлении – $C_z^{\text{пр1}} = 450$ кН/м. В каждой буксе установлен гидравлический гаситель колебаний, вязкость которого равна $\beta^{(1)} = 50$ т/с. Гаситель перпендикулярен поперечной оси и наклонен к продольной оси под углом $\alpha = 45^\circ$. Поскольку жесткость первой ступени в продольном направлении намного больше, чем в вертикальном

поперечных перемещениях (до $\delta_1^{\text{м}} = 8$ мм) работают обе пружины, при больших (до $\delta_2^{\text{м}} = 20$ мм) – только одна, а затем к работающей пружине подключается резиновый упор с жесткостью $C_y^{\text{м}} = 0,91$ МН/м. Таким образом, сила в шкворне равна

$$\mathbf{F}_i^{\text{м}} = \begin{pmatrix} C_x^{\text{м}} x_i^{\text{м}} \\ Y_i^{\text{м}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

(соединение практически жесткое), продольной компонентой силы в гасителе колебаний (и влиянием продольной компоненты скорости на силу) можно пренебречь. Полная сила в буксовом узле:

$$\mathbf{F}_{imj}^{\text{б}} = \begin{pmatrix} C_x^{\text{пр1}} x_{imj}^{\text{б}} \\ C_y^{\text{пр1}} y_{imj}^{\text{б}} \\ (C_z^{\text{пр1}} + 2C_z^{\text{пр1}}) z_{imj}^{\text{б}} + \beta^{(1)} \sin^2 \alpha \cdot \dot{z}_{imj}^{\text{б}} \end{pmatrix}.$$

6. Межтележечное соединение позволяет уменьшить поперечную силу, действующую на первую колесную пару в кривых. Оно работает только в поперечном направлении. Координаты соединения в системе отсчета, связанной с рамой i -й тележки:

$$\mathbf{r}^{\text{мс},i} = \begin{pmatrix} S(i)(l - d_x) \\ 0 \\ h^{\text{мс}} \end{pmatrix},$$

где $h^{\text{мс}} = 0,3$ м – расстояние по вертикали от центра тяжести рамы до оси соединения. При относительных перемещениях до $\delta^{\text{мс}} = 8$ мм деформируется резиновый элемент с малой жесткостью $C_y^{\text{мср}} = 196$ кН/м (на некоторых машинах его может и не быть), затем включаются тарельчатые пружины, жесткость которых равна $C_y^{\text{мс}} = 4,22$ МН/м, они установлены с предварительным натягом $N^{\text{мс}} = 39,2$ кН. Выражение для силы запишем, пренебрегая жесткостью резинового элемента:

$$\mathbf{F}^{\text{MC}} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^{\text{MC}} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Y^{\text{MC}} = \begin{cases} 0, & \text{если } (y^{\text{MC}} \leq \delta^{\text{MC}}, \\ \left[N^{\text{MC}} + C^{\text{MC}} \left((y^{\text{MC}} - \delta^{\text{MC}}) \right) \right] \cdot \text{sign } y^{\text{MC}}, & \text{если } (y^{\text{MC}} > \delta^{\text{MC}}. \end{cases}$$

7. Тяговые усилия. Вращающий момент от электродвигателя через редуктор передается на зубчатое колесо диаметра $d^{3\text{K}} = 0,883$ м, плоскость которого находится на расстоянии $b^{3\text{K}} = 0,263$ м от плоскости среднего круга катания левого (для второй тележки – правого) колеса. На первой тележке редуктор находится за зубчатым колесом (если смотреть по ходу движения), на второй – перед ним. Если N – суммарная мощность тяговых двигателей (на выходе из редуктора) и V – скорость движения экипажа, то тяговое усилие, приложенное к каждому зубчатому колесу равно

$$\mathbf{F}_{im}^{\text{T}} = \frac{Nd}{6Vd^{3\text{K}}} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -S(i) \end{pmatrix},$$

где $d = 1,25$ м – диаметр колеса колесной пары. Координаты точек приложения этих сил в системах отсчета, связанных с рамами тележек и колесными парами –

$$\mathbf{r}_{im}^{\text{T,P}} = \begin{pmatrix} S(i) \left(d_x + l_1^{\text{III}} - \frac{d^{3\text{K}}}{2} \right) + l_1 (2 - S(i) - m) \\ -S(i)(b - b^{3\text{K}}) \\ h^{\text{P},\text{б}} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{r}_{im}^{\text{T,КП}} = \begin{pmatrix} -S(i)d^{3\text{K}}/2 \\ -S(i)(b - b^{3\text{K}}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $2b = 1,58$ м – расстояние между средними кругами катания колес.

Возникающая в автосцепке сила

$$\mathbf{F}^{\text{a}} = \begin{pmatrix} X^{\text{a}} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X^{\text{a}} = \begin{cases} -C^{\text{a,H}} x^{\text{K}}, & \text{если } x^{\text{K}} \dot{x}^{\text{K}} > 0, \\ -C^{\text{a,P}} x^{\text{K}}, & \text{если } x^{\text{K}} \dot{x}^{\text{K}} < 0, \end{cases}$$

приложена к точке

$$\mathbf{r}^{\text{a,K}} = \begin{pmatrix} -l^{\text{бб}} \\ 0 \\ h^{\text{a}} \end{pmatrix},$$

где $C^{\text{a,H}} = 14$ МН/м, $C^{\text{a,P}} = 2$ МН/м – эффективные жесткости упряжи при нагружении и разгрузке; $2l^{\text{бб}} = 17$ м – расстояние между поглощающими аппаратами (буферными брусками); $h^{\text{a}} = 1,405$ м – высота центра тяжести кузова над осью автосцепок.

8. Силы взаимодействия колес и рельсов. Модель взаимодействия колесной пары и пути не является специфичной для локомотива ЧС4, поэтому здесь мы на ней останавливаться не станем.

9. Уравнение колебаний кузова. Как мы уже говорили, углы (и угловые скорости) поворота кузова считаются малыми величинами, поэтому в уравнениях Эйлера можно опустить слагаемые с произведениями угловых скоростей и пренебречь изменением плеч, вызванным поворотом кузова, после чего уравнения движения примут вид:

$$\begin{aligned} m^{\text{K}} \ddot{\mathbf{r}}^{\text{K}} &= \mathbf{F}^{\text{a}} - \sum_{i,m,j} \mathbf{F}_{imj}^{\text{CK}} - \sum_i \mathbf{F}_i^{\text{III}}, \\ & \begin{pmatrix} I_x^{\text{K}} & & \\ & I_y^{\text{K}} & \\ & & I_z^{\text{K}} \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \theta^{\text{K}} \\ \varphi^{\text{K}} \\ \psi^{\text{K}} \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{R}^{\text{a,K}} \mathbf{F}^{\text{a}} - \sum_{i,m,j} \mathbf{R}_{imj}^{\text{CK,K}} \mathbf{F}_{imj}^{\text{CK}} - \sum_i \mathbf{R}_i^{\text{III,K}} \mathbf{F}_i^{\text{III}}. \end{aligned}$$

Здесь $I_x^{\text{K}} = 53,3$ т·м², $I_y^{\text{K}} = 2100$ т·м², $I_z^{\text{K}} = 2120$ т·м² – главные центральные моменты инерции кузова относительно продольной, поперечной и вертикальной осей. Через \mathbf{R} обозначена кососимметричная матрица, ассоциированная с вектором координат точки приложения силы $\mathbf{r} = (x \ y \ z)^{\text{T}}$, который снабжен тем же набором индексов, т. е.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} & -z & y \\ z & & -x \\ -y & x & \end{pmatrix}.$$

10. Уравнение колебаний рамы тележки:

$$m^{\text{P,K}} \ddot{\mathbf{r}}_i^{\text{P}} = \mathbf{F}_i^{\text{III}} + \sum_{m,j} \mathbf{F}_{imj}^{\text{CK}} - \sum_{m,j} \mathbf{F}_{imj}^{\text{б}} - \sum_m \mathbf{F}_{im}^{\text{T}} - S(i) \mathbf{F}^{\text{MC}},$$

$$\begin{pmatrix} I_x^p \\ I_y^p \\ I_z^p \end{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} \theta_i^p \\ \varphi_i^p \\ \psi_i^p \end{pmatrix} = \mathbf{R}_i^{\text{ш,р}} \mathbf{F}_i^{\text{ш}} + \sum_{m,j} \mathbf{R}_{imj}^{\text{ск,р}} \mathbf{F}_{imj}^{\text{ск}} - \sum_{m,j} \mathbf{R}_{imj}^{\text{б,р}} \mathbf{F}_{imj}^{\text{б}} - \sum_m \mathbf{R}_{im}^{\text{т,р}} \mathbf{F}_{im}^{\text{т}} - S(i) \mathbf{R}^{\text{мс,ж}} \mathbf{F}^{\text{мс}},$$

где $m^p = 21,2 \text{ т}$, $I_x^p = 8,86 \text{ т} \cdot \text{м}^2$, $I_y^p = 84,4 \text{ т} \cdot \text{м}^2$,
 $I_z^p = 92,7 \text{ т} \cdot \text{м}^2$ – масса и главные центральные
моменты инерции рамы тележки.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Пассажирские электровозы ЧС4 и ЧС4Т [Текст] / под ред. В. А. Каптелкина. – М. : Транспорт, 1975. – 384 с.

Поступила в редколлегию 23.02.2012.
Принята к печати 29.02.2012.

О. Г. РЕЙДЕМЕЙСТЕР, М. П. СНИТКО

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ КОЛИВАНЬ ЕЛЕКТРОВОЗА ЧС4

Наведено опис моделі коливань електровоза ЧС4, що розглядається як механічна система з 9 твердих тіл (кузов, рами двох візків, 6 колісних пар).

Ключові слова: електровоз, моделювання, показники динаміки

O. H. REYDEMEYSTER, M. P. SNITKO

MATHEMATIC SIMULATION OF VIBRATIONS OF ELECTRIC LOCOMOTIVES ChS4

The article describes the model of vibrations of an electric locomotive ChS4. A vehicle is considered as a mechanical system of 9 rigid bodies (a body, 2 bogie frames, 6 wheelsets).

Keywords: electric locomotive, simulation, dynamic indices