

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ОЧИСТКИ ВОДЫ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ОТСТОЙНИКЕ

Разработана 2D-численная модель для расчета вертикального отстойника с перегородкой. Модель основывается на численном интегрировании уравнения конвективно-диффузионного переноса примеси и модели потенциального течения. Приводятся результаты вычислительного эксперимента.

*Ключевые слова:* численное моделирование, вертикальный отстойник

### Введение

Вертикальные канализационные отстойники широко используются в системах водоотведения небольших предприятий, санаториев и т.п. В настоящее время для расчета вертикальных отстойников применяются два основных вида моделей: балансовые модели [1] и одномерные кинематические модели транспорта загрязнителя [2,3]. Но эти модели не позволяют учесть в прогнозных расчетах форму отстойника или другие конструктивные особенности. Кроме того, при применении этих моделей не рассчитывается поле скорости водного потока внутри отстойника, и расчет осуществляется (в одномерных моделях), по заданной скорости. При применении балансовых моделей скорость водного потока внутри отстойника – не учитывается. Актуальной проблемой является разработка эффективных методов расчета вертикальных отстойников, позволяющих учитывать гидродинамику потока внутри отстойника, представляющего собой сооружение сложной геометрической формы.

*Цель* данной работы – разработка численной модели массопереноса в вертикальном отстойнике, позволяющей учитывать при моделировании геометрическую форму отстойника и расположение внутри сооружения перегородок.

### Математическая модель процесса массопереноса в вертикальном отстойнике

Процесс транспорта загрязнителя в вертикальном отстойнике рассчитывается на базе усредненного по ширине сооружения уравнения переноса примеси [6]

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{\partial uC}{\partial x} + \frac{\partial (v-w)C}{\partial y} + kC = \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} C), \quad (1)$$

где  $C$  – концентрация загрязнителя в сточной воде;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  – компоненты вектора скорости

течения;  $\mu = (\mu_x, \mu_y)$  – коэффициенты диффузии;  $t$  – время;  $w$  – скорость оседания загрязнителя;  $k$  – коэффициент, учитывающий процессы агломерации и т. п. в отстойнике.

Стенки отстойника и различные непроницаемые объекты внутри него (перегородки и т. п.) являются граничными линиями тока. В построенной численной модели на этих границах реализуется граничное условие вида

$$\frac{\partial C}{\partial n} = 0,$$

где  $n$  – единичный вектор внешней нормали к твердой поверхности.

На твердых горизонтальных поверхностях отстойника в численной модели реализуется граничное условие «поглощения» загрязнителя. На входной границе (граница входа потока сточных вод в отстойник) ставится условие:

$$C|_{\text{граница}} = C_E,$$

где  $C_E$  – известное значение концентрации загрязнителя.

На выходной границе расчетной области, в численной модели ставится «циклическое» (мягкое) граничное условие вида

$$C(i+1, j) = C(i, j),$$

где  $i+1$ ,  $j$  – номер разностной ячейки на выходе.

В начальный момент времени полагается  $C = 0$  в расчетной области. Задача транспорта загрязнителя в отстойнике решается на установившееся решение. В модели полагается, что загрязнитель оседает на дно со скоростью  $w$ .

Решение уравнения (1) возможно, если известно поле скорости потока в вертикальном отстойнике. Поэтому, для расчета транспорта загрязнителя в отстойнике необходимо предварительно рассчитать это поле скорости. Для

решения данной гидродинамической задачи используется модель потенциального течения. В этом случае моделирующее уравнение имеет вид [5]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0, \quad (2)$$

где  $P$  – потенциал скорости.

Для данного уравнения ставятся следующие граничные условия [5]:

– на твердых стенках отстойника, перегородках внутри него:  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ , где  $n$  – единичный вектор внешней нормали к твердой границе;

– на входной границе (область втекания сточных вод в отстойник):  $\frac{\partial P}{\partial n} = V_n$ , где  $V_n$  – известное значение скорости втекания;

– на выходной границе расчетной области (область выхода осветленных вод из отстойника)  $P = P^*(x = \text{const}, y) + \text{const}$  (условие Дирихле).

После расчета поля потенциала скорости осуществляется расчет компонент вектора скорости потока сточных вод на базе зависимостей [2]

$$u = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

### Численный метод решения

Для численного интегрирования уравнения транспорта загрязнителя в отстойнике используется попеременно – треугольная разностная схема [4]. Численный расчет реализуется на прямоугольной разностной сетке. Значение концентрации загрязнителя рассчитывается в центрах разностных ячеек.

Разностные соотношения данной схемы в операторном виде записываются так [4]:

– на первом шаге расщепления  $k = n + \frac{1}{4}$ :

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^+ C^k + M_{xx}^- C^k + M_{yy}^+ C^n + M_{yy}^- C^n); \end{aligned}$$

– на втором шаге расщепления  $k = n + \frac{1}{2}$ ;

$$c = n + \frac{1}{4}:$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^- C^k + L_y^- C^k) = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c); \end{aligned}$$

– на третьем шаге расщепления  $k = n + \frac{3}{4}$ ;

$$c = n + \frac{1}{2}:$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^+ C^k + L_y^+ C^k) = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^n + M_{xx}^+ C^k + M_{yy}^- C^k + M_{yy}^+ C^c); \end{aligned}$$

– на четвертом шаге расщепления  $k = n + 1$ ;

$$c = n + \frac{3}{4}:$$

$$\begin{aligned} \frac{C_{ij}^k - C_{ij}^c}{\Delta t} + \frac{1}{2}(L_x^- C^k + L_y^- C^k) = \\ = \frac{1}{4}(M_{xx}^- C^k + M_{xx}^+ C^c + M_{yy}^- C^c + M_{yy}^+ C^k). \end{aligned}$$

В данных выражениях использованы следующие обозначения разностных операторов

$$\frac{\partial u^+ C}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^+ C_{ij}^{n+1} - u_{ij}^+ C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial u^- C}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j}^- C_{i+1,j}^{n+1} - u_{ij}^- C_{ij}^{n+1}}{\Delta x} = L_x^- C^{n+1},$$

$$\frac{\partial v^+ C}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1}^+ C_{ij}^{n+1} - v_{ij}^+ C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial v^- C}{\partial y} \approx \frac{v_{i,j+1}^- C_{i,j+1}^{n+1} - v_{ij}^- C_{ij}^{n+1}}{\Delta y} = L_y^- C^{n+1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) \approx \tilde{\mu}_x \frac{C_{i+1,j}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} -$$

$$- \tilde{\mu}_x \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} = M_{xx}^- C^{n+1} + M_{xx}^+ C^{n+1},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \mu_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) \approx \tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j+1}^{n+1} - C_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} -$$

$$-\tilde{\mu}_y \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y^2} = M_{yy}^- C^{n+1} + M_{yy}^+ C^{n+1},$$

и т.д. В приведенных обозначениях принято  $v = v - w$ .

Подробное пояснение к данным разностным операторам представлено в работе [4]. Неизвестное значение концентрации загрязнителя на каждом шаге расщепления определяется по явной формуле «бегущего счета».

Для численного интегрирования уравнения (2) используется метод установления решения по времени. Поэтому, численно интегрируется уравнение эволюционного типа

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2}, \quad (3)$$

здесь  $t$  – фиктивное время.

При  $t \rightarrow \infty$  решение уравнения (3) будет стремиться к «установлению», т.е. к решению уравнения (2).

Для численного интегрирования уравнения (3) используется неявная схема суммарной аппроксимации [7]. В этом случае разностные уравнения на каждом дробном шаге имеют вид:

$$\frac{P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - P_{i,j}^n}{\Delta t} = \left[ \frac{-P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + P_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x^2} \right] + \left[ \frac{-P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + P_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta y^2} \right],$$

$$\frac{P_{i,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} = \left[ \frac{P_{i+1,j}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta x^2} \right] + \left[ \frac{P_{i,j+1}^{n+1} - P_{i,j}^{n+1}}{\Delta y^2} \right].$$

Отметим, что значение потенциала скорости  $P_{i,j}$  в центре каждой разностной ячейки, на каждом шаге расщепления, определяется по явной формуле – методу бегущего счета [7].

В численной модели компоненты вектора скорости определяются по формулам:

$$u_{ij} = \frac{P_{i,j} - P_{i-1,j}}{\Delta x}; \quad v_{ij} = \frac{P_{i,j} - P_{i,j-1}}{\Delta y}.$$

Компоненты вектора скорости водной среды рассчитываются на гранях разностных ячеек (контрольных объемов), что позволяет построить консервативную разностную схему для уравнения транспорта загрязнителя. При решении эволюционного уравнения (3) задается поле потенциала скорости для «начального» момента фиктивного времени.

В разработанном коде также используется метод Либмана [7] для численного интегриро-

вания уравнения для потенциала скорости (2). В этом случае аппроксимирующее уравнение имеет вид:

$$\frac{P_{i+1,j} - 2P_{i,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1} - 2P_{i,j} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2} = 0.$$

Тогда неизвестное значение потенциала в центре разностной ячейки определяется так:

$$P_{i,j} = \frac{1}{A} \left[ \frac{P_{i+1,j} + P_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j+1} + P_{i,j-1}}{\Delta y^2} \right],$$

где 
$$A = \left( \frac{2}{\Delta x^2} + \frac{2}{\Delta y^2} \right).$$

В разработанном коде расчет по методу Либмана реализован в отдельной подпрограмме.

Необходимо отметить, что расчет массопереноса в вертикальных отстойниках проводится в области сложной геометрической формы. Формирование геометрической формы отстойника на прямоугольной разностной сетке, осуществляется с помощью метода маркирования [4]. Это дает возможность быстро формировать любую геометрическую форму отстойника, без каких либо налагаемых на нее ограничений.

### Практическая реализация модели

Рассмотренная численная модель положена в основу кода «Settler-2». Для программирования использовался *FORTRAN*.

Построенная математическая модель была использована для моделирования процесса массопереноса в вертикальном отстойнике с перегородкой и пластиной. Схема отстойников приведена на рис. 1–4. На рисунках стрелками показано место, где происходит вход и выход потока из отстойника. Цель моделирования – оценка эффективности очистки сточных вод в отстойниках рассматриваемого типа.

Вычислительный эксперимент проводился при таких параметрах: скорость потока на входе в отстойник 1,9 м/ч; коэффициент диффузии 0,7 м<sup>2</sup>/ч;  $w = 0,2$  м/ч (второй вариант  $w = 0,02$  м/ч;);  $k = 0$ ; длина отстойника 9 м; глубина 3,6 м. Концентрация загрязнителя во входящем в отстойник потоке равна 100 ед. (в безразмерном виде).

Рассмотрим результаты вычислительного эксперимента. На рис. 1–4 представлены прогнозные значения концентрации загрязнителя в отстойниках рассматриваемой конструкции. На этих рисунках значения концентрации пред-

ставлено в безразмерном виде: каждое число – это величина концентрации в процентах от величины входной концентрации. Такое представление результатов вычислительного эксперимента позволяет оперативно анализировать прогнозную информацию по оценке величины концентрации в любой части отстойника. Однако отметим, что вывод на печать результатов расчета здесь осуществляется по формату печати «целых» чисел, т.е. дробная часть числа не выдается на печать. Это значит, что если, например, в какой-то точке расчетное значение концентрации составляет «3,89 %» от концентрации на входе в отстойник, то на печать будет выведено «3». Аналогично, если значение концентрации менее 1 %, то на печать выдается «0». Этот подход используется в работе для удобства проведения быстрого анализа эффективности очистки в той или иной зоне отстойника. Такой подход эффективен при проведении серийных расчетов на этапе проектирования сооружений, когда осуществляется «перебор» различных вариантов с целью выбора наиболее оптимального. Для детального анализа программа расчета выдает значение концентрации по формату «действительных» чисел.

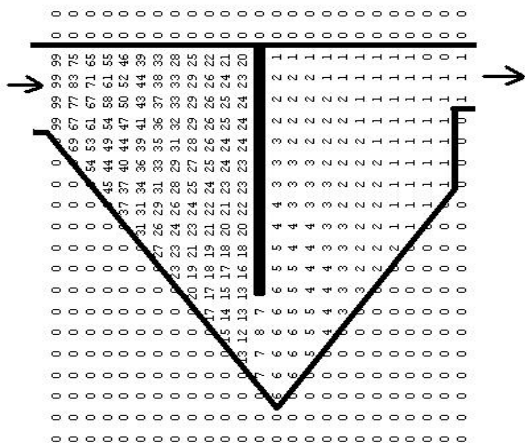


Рис. 1. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике (длина вертикальной перегородки 2,4 м,  $w = 0,2$  м/ч)

Величина концентрации на выходе из каждого отстойника составляет:

- для отстойника (см. рис. 1,  $w = 0,2$  м/ч) с вертикальной перегородкой длиной 2,4 м – 1 %;
- для отстойника (см. рис. 2,  $w = 0,2$  м/ч) с вертикальной перегородкой и вертикальной пластиной – 0,7 %;
- для отстойника (см. рис. 3,  $w = 0,02$  м/ч) с вертикальной перегородкой и вертикальной пластиной – 1,3 %;

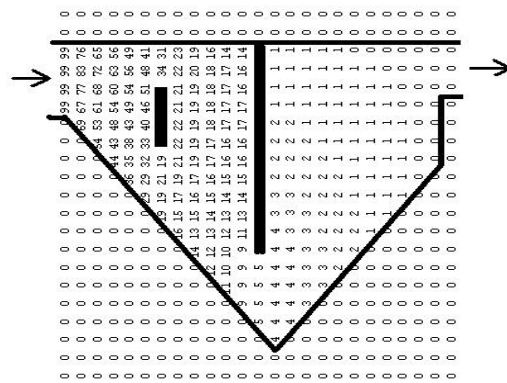


Рис. 2. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с вертикальной перегородкой и вертикальной пластиной (длина вертикальной перегородки 2,4 м, длина вертикальной пластины 0,8 м,  $w = 0,2$  м/ч)

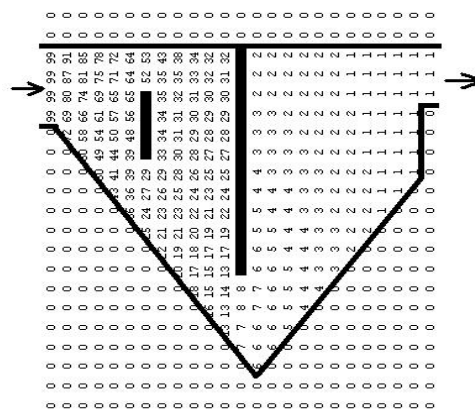


Рис. 3. Распределение концентрации загрязнителя в вертикальном отстойнике с вертикальной перегородкой и вертикальной пластиной (длина вертикальной перегородки 2,4 м, длина вертикальной пластины 0,8 м,  $w = 0,02$  м/ч)

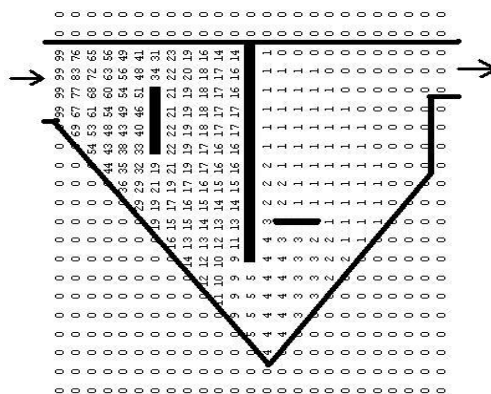


Рис. 4. Распределение концентрации загрязнителя в отстойнике с вертикальной перегородкой и двумя пластинами (длина вертикальной перегородки 2,4 м, длина горизонтальной пластины 1,08 м, длина вертикальной пластины 0,8 м,  $w = 0,2$  м/ч)

– для отстойника (см. рис. 4,  $w = 0,2$  м/ч) с вертикальной перегородкой и с вертикальной и горизонтальной пластинами – 0,6 %.

Представленные расчетные данные показывают сильное влияние «геометрического воздействия» на процесс массопереноса в вертикальном отстойнике.

В заключение отметим, что для расчета варианта задачи потребовалось 15 с компьютерного времени. Таким образом, для решения сложной многопараметрической задачи массопереноса в вертикальном отстойнике, требуются незначительные временные затраты при использовании разработанной численной модели. Это является важным обстоятельством при проведении серийных расчетов.

### Выводы

В работе представлена численная (CFD) модель для исследования процесса массопереноса в канализационных вертикальных отстойниках сложной геометрической формы. Разработанный специализированный код может быть использован как инструмент решения комплекса задач при проектировании и реконструкции вертикальных отстойников. Дальнейшее направление данной работы следует проводить в направлении разработки трехмерной модели процесса массопереноса в отстойниках.

### БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Таварткиладзе, И. М. Математическая модель расчета вертикальных отстойников с перегородкой [Текст] / И. М. Таварткиладзе, А. М. Кравчук, О. М. Нечипор // Водоснабжение и санитарная техника. – Вып. № 1. – 2006. – Ч. 2. – С. 39–42.
2. Олейник, А. Я. Теоретический анализ процессов осаждения в системах биологической очистки сточных вод [Текст] / А. Я. Олейник, Ю. И. Калугин, Н. Г. Степовая, С. М. Зябликов // Прикладная гидромеханика. – Том 6 (78). – № 4. – 2004. – С. 62–67.
3. Степова, Н. Г. До розрахунку вертикального відстійника з урахуванням форми його нижньої частини [Текст] / Н. Г. Степова, Ю. І. Калугін Ю.І., О. Я. Олійник // Проблеми водопостачання, водовідведення та гідравлики. – Вип. № 14. – 2010. – С.145–151.
4. Згуровский, М. З. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде [Текст] / М. З. Згуровский, В. В. Скопецкий, В. К. Хрущ, Н. Н. Беляев. – К. : Наук. думка, 1997. – 368 с.
5. Лойцянский, Л. Г. Механика жидкости и газа [Текст] / Л. Г. Лойцянский. – М. : Наука, 1978. – 735 с.
6. Марчук, Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды [Текст] / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1982. – 320 с.
7. Самарский, А. А. Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. – М. : Наука, 1983. – 616 с.

Поступила в редколлегию 17.04.2012.

Принята к печати 20.04.2012.

М. М. БІЛЯЄВ, О. К. НАГОРНА

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ОЧИСТКИ ВОДИ У ВЕРТИКАЛЬНОМУ ВІДСТІЙНИКУ

Розроблена 2D-чисельна модель для розрахунку вертикального відстійнику з внутрішньою перешкодою. Модель базується на чисельному інтегруванні рівняння конвективно-дифузійного переносу домішки та моделі потенційного руху. Наводяться результати обчислювального експерименту.

*Ключові слова:* чисельне моделювання, вертикальний відстійник

N. N. BILIAIEV, H. K. NAGORNAYA

## MATHEMATICAL MODELING OF TREATING WATER IN VERTICAL SETTLERS

The 2D-numerical model was developed and used to simulate the pollutant transfer in the vertical settler. The model is based on the numerical integration of the K-gradient transport model and the model of the potential flow. The results of numerical experiment are presented.

*Keywords:* numerical simulation, vertical settler