

# ОПТИМИЗАЦИЯ ВРЕМЕНИ НАХОЖДЕНИЯ В ОЧЕРЕДИ ПЕРЕСЕКАЮЩИХСЯ ПОТОКОВ СОБЫТИЙ

УДК 519.872

## ГУСТИ Надежда Анатольевна

аспирантка кафедры технической кибернетики Херсонского национального технического университета.

**Научные интересы:** оптимизация конфликтных систем массового обслуживания.

**e-mail:** gusti-n@bk.ru

## МАРАСАНОВ Владимир Васильевич

д.т.н, профессор, заведующий кафедрой технической кибернетики  
Херсонского национального технического университета.

**Научные интересы:** исследование конфликтных систем массового обслуживания.

### ВВЕДЕНИЕ

Производственные, транспортные системы и много других систем можно рассматривать как системы массового обслуживания (СМО). При создании моделей СМО необходимо решать сложные задачи. При решении этих задач нужно учитывать ряд факторов: закон распределения потока; закон распределения заявок; закон распределения времени обслуживания. Поэтому разработка моделей алгоритмов управления являются сложной актуальной задачей.

Управляемая динамическая система, входом и выходом которой являются потоки заявок, называется управляемой системой массового обслуживания или просто системой массового обслуживания. СМО предназначена для обслуживания потока заявок (требований), поступающих в случайные моменты времени на её вход. Обслуживание заявки продолжается случайное время  $T_{об}$ , после чего канал освобождается и готов к приему следующей заявки. Случайный характер потока заявок и времен обслуживания приводит к тому, что на входе СМО может скапливаться большое число заявок (они либо становятся в очередь, либо покидают СМО необслуженными); в другие же периоды СМО будет работать с недогрузкой или вообще простаивать.

Процесс работы СМО представляет собой случайный процесс с дискретными состояниями и непрерывным временем; состояние СМО меняется скачком в моменты появления событий (прихода новой заявки, окончания обслуживания, или момента, когда заявка, которой надоело ждать, покидает очередь, заявки с ограниченным временем ожидания).

Предмет теории систем массового обслуживания – построение математических моделей, связывающих заданные условия работы СМО (число каналов, их производительность, правила работы, характер потока заявок) с интересующими показателями эффективности СМО, которые можно разбить на две группы: показатели, непосредственно связанные со стационарным распределением вероятностей  $\{P_k\}$  числа заявок в системе и временные показатели [1].

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

Основными задачами исследования являются:

- исследование простейших моделей конфликтных систем массового обслуживания;
- исследование математических моделей с фиксированным ритмом изменения обслуживания;
- оптимизация времени нахождения в очереди пересекающихся потоков событий.

В качестве СМО рассматривается простейшая модель перекрестка с двумя пересекающимися однородными потоками машин.

**Основная часть.** Исследование простейших моделей конфликтных систем массового обслуживания. Математические модели с фиксированным ритмом изменения обслуживания.

Рассмотрим простейшую модель перекрестка с двумя пересекающимися однородными потоками машин с заданными плотностями потоков  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  и светофором, изменяющим свои цвета периодически с заданным фиксированным ритмом  $\tau_1, \tau_{12}, \tau_2, \tau_{21}$ , где  $\tau_1$  – время, в течение которого разрешено движение первого потока и запрещено движение второго,  $\tau_2$  – время разрешения движения второго потока и запрещения движения первого,  $\tau_{12}$  и  $\tau_{21}$  – времена так называемого желтого света, когда запрещены движения обоих потоков при разрешении закончить движение через перекресток автомашин, уже находящихся на нем. В отношении пропускных способностей перекрестка принимается, что через перекресток может переехать за соответствующие фазы разрешения переезда  $\omega_1 \tau_1$  автомашин первого потока и  $\omega_2 \tau_2$  – второго. Коэффициенты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  характеризуют предельные пропускные способности перекрестка в первом и втором направлениях [2].

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} (\lambda_1 - \omega_1) \frac{x_1 + |x_1|}{2} & \text{для } t = n\tau + t_1, \text{ где } n \text{ целое} \\ & \text{и } t_1 \in [0, \tau_1], \\ \lambda_1 & \text{для остальных } t, \end{cases} \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = \begin{cases} (\lambda_2 - \omega_2) \frac{x_2 + |x_2|}{2} & \text{для } t = n\tau + t_2, \text{ где } n \text{ целое} \\ & \text{и } t_2 \in [\tau_1 + \tau_{12}, \tau_1 + \tau_{12} + \tau_2], \\ \lambda_2 & \text{для остальных } t, \end{cases}$$

В соответствии со сказанным светофор, регулирующий уличное движение, может находиться в четырех состояниях  $A_1, A_{12}, A_2$  и  $A_{21}$ , которые периодически сменяются в некотором фиксированном ритме. За описание состояния перекрестка в момент времени  $t$  примем числа  $x_1$  и  $x_2$  автомашин, скопившихся

перед перекрестком в этот момент времени. Для этих величин, которые примем непрерывными, имеют место дифференциальные уравнения.

В этих формулах  $\tau$  – период работы светофора, равный  $\tau = \tau_1 + \tau_{12} + \tau_2 + \tau_{21}$ . Согласно этим уравнениям (1) изменение чисел машин  $x_1$  и  $x_2$  на плоскости  $x_1, x_2$  изобразится некоторой ломаной (рис. 1).

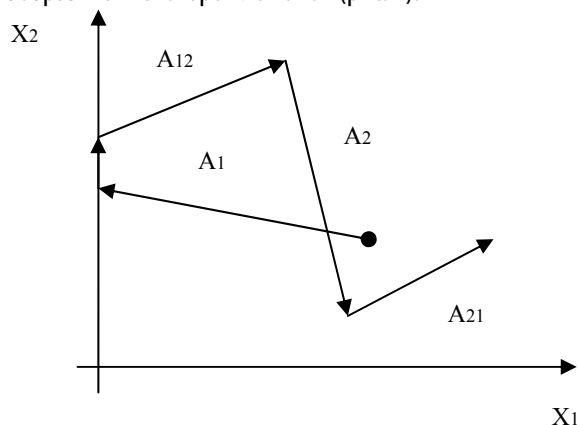


Рисунок 1 – Изображение ломаной (изменение чисел машин на плоскости)

Каждый отрезок этой ломаной, без учета возможных изломов на осях  $x_1, x_2$ , соответствует одному из состояний светофора  $A_1, A_{12}, A_2$  или  $A_{21}$ . Из (1) непосредственно следует, что в зависимости от этого состояния  $A$  координаты  $x_1, x_2$  и  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  концов каждого из отрезков этой ломаной связаны соотношениями вида [3]

$$\bar{x}_1 = \begin{cases} f(x_1 - (\omega_1 - \lambda_1)\tau_1) & \text{при } A = A_1 \\ x_1 + \lambda_1 \tau_{12} & \text{при } A = A_{12} \\ x_1 + \lambda_1 \tau_2 & \text{при } A = A_2 \\ x_1 + \lambda_1 \tau_{21} & \text{при } A = A_{21} \end{cases}, \quad (2)$$

$$\bar{x}_2 = \begin{cases} x_2 + \lambda_2 \tau_1 & \text{при } A = A_1 \\ x_2 + \lambda_2 \tau_{12} & \text{при } A = A_{12} \\ f(x_2 - (\omega_2 - \lambda_2)\tau_2) & \text{при } A = A_2 \\ x_2 + \lambda_2 \tau_{21} & \text{при } A = A_{21} \end{cases}$$

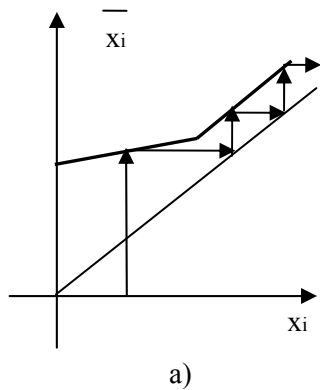
где  $f(\sigma)$  обозначает функцию, равную  $\sigma$  при  $\sigma \geq 0$  и равную нулю при  $\sigma \leq 0$ .

Формулы (2) определяют точечные отображения  $T_1(A) | T_2(A)$  полупрямых  $x_1 \geq 0$  и  $x_2 \geq 0$  в себя. Произведения отображений определяют изменения переменных  $x_1, x_2$  за период  $\tau$  работы светофора.

$$T_i = T_i(A_{21})T_i(A_2)T_i(A_{12})T_i(A_1) \quad (i=1,2). \quad (3)$$

Точечные отображения (3) имеют вид, представленный на рис. 2. Согласно этому рис. 2 последовательные преобразования точки  $x_i$  либо неограниченно возрастают, если  $\lambda_i \tau > \omega_i \tau_i$  (рис. 2, а), либо асимптотически стремятся к некоторому конечному значению  $x_i^*$ , если  $\lambda_i \tau < \omega_i \tau_i$  (рис. 2, б). Это означает, что при невыполнении условия

$$\lambda_i \tau < \omega_i \tau_i \quad (4)$$



в соответствующем направлении происходит неограниченное нарастание очереди, т. е. условия (4) являются необходимыми для успешной работы светофора. Отсюда следует, что светофор при соответствующем выборе времен  $\tau_1, \tau_{12}, \tau_2, \tau_{21}$  может пропустить пребывающие к нему потоки автомашин лишь при условии, что

$$\frac{\lambda_1}{\omega_1} + \frac{\lambda_2}{\omega_2} < 1. \quad (5)$$

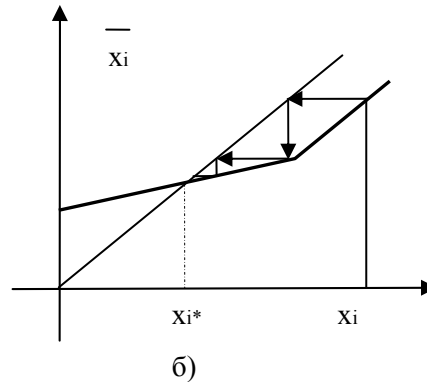


Рисунок 2 – Точечные отображения

При выполнении условия (5) можно указать такие  $\tau_1$  и  $\tau_2$  при заданных временах  $\tau_{12}$  и  $\tau_{21}$ , чтобы выполнялись условия (4), и при этом, как нетрудно сосчитать, общее время ожидания переезда через перекресток всеми машинами  $i$ -го потока за период  $\tau$  равно

$$\frac{1}{2} (\tau - \tau_i)^2 \lambda_i (1 + \lambda_i (\omega_i - \lambda_i)^{-1}). \quad (6)$$

Таким образом, принятая математическая модель приводит к тому, что времена  $\tau_1$  и  $\tau_2$  при заданных временах  $\tau_{12}$  и  $\tau_{21}$  минимальные значения которых определяются условиями безопасности движения на перекрестке, должны удовлетворять условиям (4), для возможности выполнения которых необходимо и достаточно выполнения неравенства (5). При выполнении неравенства (5) допустимым значениям  $\tau_1$  и  $\tau_2$  отвечает область  $D$ , изображенная на рис. 3. Требования минимальности среднего времени ожидания сводится согласно (6) к отысканию в области  $D$  точки  $(\tau_1$  и  $\tau_2)$ , в которой функция вида

$$\frac{1}{\tau} \{ B_1 (\tau - \tau_1)^2 + B_2 (\tau - \tau_2)^2 \} \quad (7)$$

где  $B_i = \frac{\lambda_i}{2} (1 + \lambda_i (\omega_i - \lambda_i)^{-1})$ , имеет наименьшее значение.

Описанная выше простейшая математическая модель с двумя конфликтными транспортными потоками легко обобщается на произвольное число потоков.

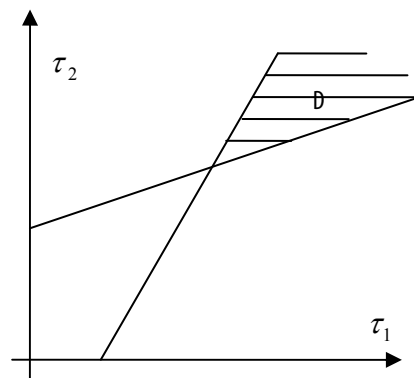


Рисунок 3 – Область D (оптимальное решение)

Пример. Для определения минимальности среднего времени ожидания машин перед перекрестком минимизируем функцию [4]

$$f(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau} \{ B_1 (\tau - \tau_1)^2 + B_2 (\tau - \tau_2)^2 \}, \quad (8)$$

где  $B_i = \frac{\lambda_i}{2} \{1 + \lambda_i(\omega_i - \lambda_i)^{-1}\}$ ; (9)

$\lambda_i$  – интенсивность  $i$ -ого потока;

$\omega_i$  – пропускная способность  $i$ -ого потока;

$i = 1, 2, \dots$

$\tau = \tau_1 + \tau_2 + \tau_{12} + \tau_{21} = \tau_1 + \tau_2 + k$  ;

$\tau$  – период работы светофора;

$\tau_1$  – время, в течении которого разрешено

движение первого потока и запрещено движение второго;

$\tau_2$  – время, в течении которого разрешено дви-

жение второго потока и запрещено движение первого;

$k = \tau_{21} + \tau_{12}$  – время желтого цвета. Подставим в функцию (8) значение  $\tau$  .

$$f(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{\tau_1 + \tau_2 + k} \{B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2\} = \frac{B_1(\tau_2 + k)^2}{\tau_1 + \tau_2 + k} + \frac{B_2(\tau_1 + k)^2}{\tau_1 + \tau_2 + k} \quad (10)$$

Условие минимума

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = 0;$$

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^2} & \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \\ \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} & \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2^2} \end{vmatrix} > 0 \quad (11)$$

Светофор при соответствующем выборе времен может пропустить пребывающие к нему потоки авто-

машин при условии, что  $\frac{\lambda_1}{\omega_1} + \frac{\lambda_2}{\omega_2} < 1$ ;

$\lambda_1$  – интенсивность 1-ого потока;

$\omega_1$  – пропускная способность 1-ого потока;

$\lambda_2$  – интенсивность 2-ого потока;

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1} = \frac{2B_2(\tau_1 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - [B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2};$$

$$\frac{\partial f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2} = \frac{2B_1(\tau_2 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - [B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2}.$$

Следует, что  $\tau_1 + \tau_2 + c \neq 0$  . Определяем вторую производную функций

$\omega_2$  – пропускная способность 2-ого потока.

$\lambda_i \tau < \omega_i \tau_i$  Невыполнение этого условия в соответствующем направлении происходит неограниченное нарастание очереди.

Для определения условия оптимума находим производные функций

Зададим значение  $\lambda_1 = 11$  ;  $\lambda_2 = 15$  ;  $\omega_1 = 23$  ;  $\omega_2 = 30$  ;  $\tau = 110c$  ;  $k = 6c$  .

Условие оптимума:

$$\begin{cases} \tau_1 = \frac{B_1}{B_2} \tau_2 + (B_1 - B_2)k \\ \tau_2 = \frac{B_2}{B_1} \tau_1 + (B_2 - B_1)k \end{cases} \quad (12)$$

Из 1-ого уравнения при  $B_1 > B_2$  ограничений на неотрицательность  $\tau_1$  нет,  $\tau_2 > 0$ . При  $B_2 > B_1$

, возможно при  $\frac{B_1}{B_2} \tau_2 > (B_1 - B_2)k$  ;  $\tau_2 = \tau - (\tau_1 + k)$ .

Из 2-ого уравнения при  $B_2 > B_1$  ограничений на неотрицательность  $\tau_2$  нет. При  $B_1 > B_2$  возможно при

$\frac{B_2}{B_1} \tau_1 > (B_2 - B_1)k$  ;  $\tau_1 = \tau - (\tau_2 + k)$ .

Найдем  $B_i = \frac{\lambda_i}{2} \{1 + \lambda_i(\omega_i - \lambda_i)^{-1}\}$ ;  $B_1 = 10,54$  ;

$B_2 = 15$  ;

Следует, что  $(B_1 - B_2)k = -A$  ;  $(B_2 - B_1)k = A$  ;

$\tau_1 = \frac{B_1}{B_2} \tau_2 - A$  ;  $\tau - k - \tau_2 = \frac{B_1}{B_2} \tau_2 - A$  ;

$\tau_2 = \frac{\tau - k + A}{\frac{B_1}{B_2} + 1} = 77c$  ;

$\tau_1 = \tau - (\tau_2 + k) = 27c$ .

Подставив значения, все условия оптимума выполняются. Следует, что найдено оптимальное время нахождения в очереди машин перед перекрестком.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1^2} &= \left( \frac{2B_2(\tau_1 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - [B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2} \right)' = ; \\ &= \frac{2B_2(\tau_1 + \tau_2 + k)^2 - 4B_2(\tau_1 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) + 2B_1(\tau_2 + k)^2 + 2B_2(\tau_1 + k)^2}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^3} \\ \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2^2} &= \left( \frac{2B_1(\tau_2 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - [B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2} \right)' = ; \\ &= \frac{2B_1(\tau_1 + \tau_2 + k)^2 - 4B_1(\tau_2 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) + 2B_1(\tau_2 + k)^2 + 2B_2(\tau_1 + k)^2}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^3} \\ \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} &= \frac{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2 \{2B_2(\tau_1 + k) + 2B_1(\tau_2 + k)\}}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^4} - \\ &\quad - \frac{2(\tau_1 + \tau_2 + k) [2B_2(\tau_1 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - [B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2]]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^4} \\ \frac{\partial^2 f(\tau_1, \tau_2)}{\partial \tau_2 \partial \tau_1} &= \frac{(\tau_1 + \tau_2 + k)^2 \{2B_1(\tau_2 + k) + 2B_1(\tau_1 + k)\}}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^4} - \\ &\quad - \frac{2(\tau_1 + \tau_2 + k) [2B_1(\tau_2 + k)(\tau_1 + \tau_2 + k) - [B_1(\tau_2 + k)^2 + B_2(\tau_1 + k)^2]]}{(\tau_1 + \tau_2 + k)^4} \end{aligned}$$

**ВЫВОДЫ**

В работе рассмотрена простейшая математическая модель с двумя конфликтными транспортны-

ми потоками, которая легко обобщается на произвольное число потоков. Определена минимальность среднего времени ожидания машин перед перекрестком.

**ЛИТЕРАТУРА:**

1. Y.I. Neymark *Dinamicheskie sistemy i upravlyayshie process.* – М.: Nauka, 1978.
2. Matveev V.F. *Sistemy massovogo obslygvaniya.* – М.: MGU, 1991.
3. Muchin V.I. *Sb. Dinamika system,* 1980.

**Рецензент:** д.т.н., проф. Соколова Н.А.,  
Херсонский национальный технический университет, Херсон.