МНОГОФАКТОРНАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ СЛУЧАЙНЫХ ЗАТРАТ ПРИ КООРДИНАЦИОННОМ УПРАВЛЕНИИ ПРЕДПРИЯТИЕМ

УДК 658.5:681.5.015

КИРИЙЧУК Дмитрий Леонидович
старший преподаватель кафедры Информационных технологий
Херсонского национального технического университета.
Научные интересы: современные информационные технологии координации в больших и сложных системах.
e-mail: kyryychuk.dmytro@kntu.net.ua

ВВЕДЕНИЕ

Важнейшей функцией управления предприятием является согласование целей, функций, систем, элементов, т.е. координация [1, 2], под которой понимают правила взаимодействия подсистем, которые направлены на достижение глобальной цели, стоящей перед системой в целом и локальных целей отдельных подсистем [3].

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $Z(N)$ – случайные затраты производства на изготовление N единиц товара (сырья, изделий, услуг и т.д.) включающие в себя $Z_0(N)$ – постоянную составляющую (техническую стоимость системы производства) и $Z_1(N)$ – переменную составляющую (затраты на организацию системы производства).

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Найдем оптимальные затраты $Z_{опт}(N)$, которые обеспечены таким управлением, при котором отклонения от «шаблонных» оптимальных альтернатив на множестве I будет множественным. В такой постановке реализуется оптимальное технологическое управление производственной системой [3].

Допустим, что удельные веса составляющих $Z_0(N)$ и $Z_1(N)$ равны соответственно q и $1-q$. Величины q и $1-q$ удобно трактовать как вероятности появления соответствующих затрат в общих затратах:

$$Z(N) = qZ_0(N) + (1-q)Z_1(N) \qquad (1)$$

Рассматривая $Z_0(N)$ и $Z_1(N)$ как реализации случайной величины затрат $Z(N)$, которые появляются с вероятностями q и $1-q$, нетрудно определить начальные $m_k, k = 1,2,...,$ и центральные моменты $\mu_k, k = 2,3,...$ суммарных затрат $Z(N)$:

$$m_k\left[Z(N)\right] = Z_0^k(N)q + Z_1^k(N)(1-q), \;\; k = 1,2,..., \qquad (2)$$

$$\mu_k\left[Z(N)\right] = \left\{Z_0(N) - m_1\left[Z(N)\right]\right\}^k q + \left\{Z_1(N) - m_1\left[Z(N)\right]\right\}^k (1-q). \qquad (3)$$

По этим моментам, используя ортогональное разложение функции распределения в ряд Грамма-Шарлье, нетрудно синтезировать функцию распределения $F[Z(N)]$. Использование этого распределения позволяет решать ряд задач оптимального управления производством, определять условия существования и единственности оптимальных решений.

Выберем в роли критерия оптимальности первый начальный момент суммарных затрат – средние суммарные затраты

$$m_1\left[Z(N)\right] = Z_0(N)q + Z_1(N)(1-q) \qquad (4)$$

и определим необходимые условия существования и единственности оптимального решения. Дифференцируя функцию (4) по N и приравнивая результат нулю, получим уравнение оптимизации в виде:

$$\frac{+\dfrac{\partial Z_1(N)}{\partial N}}{-\dfrac{\partial Z_0(N)}{\partial N}}=\frac{q}{1-q} \qquad (5)$$

Для того чтобы $N_{опт}$, полученное из решения уравнения (5), доставляло минимум функции (4), необходимо выполнение условия:

$$\frac{\partial^2 Z_0(N)}{\partial N^2}q>-\frac{\partial^2 Z_1(N)}{\partial N^2}(1-q) \qquad (6)$$

Из анализа условия (5) можно сделать вывод о том, что экстремум достигается в точке, где достигается равенство производных $Z_0'(N)$ и $Z_1'(N)$, взятых с весами q и $1-q$. При $q=1-q=\frac{1}{2}$ достигается равенство производных по абсолютному значению. Построим математическую модель многофакторной оптимизации. Для этого выполним простейшую однопараметрическую аппроксимацию составляющих затрат в следующем виде:

$$Z_0(N)=\frac{Z_0}{N}, \quad Z_1(N)=Z_1N \qquad (7)$$

где $Z_0(N)$ – постоянные затраты, а $Z_1(N)$ – переменные затраты.

Уравнение оптимизации (5) принимает вид:

$$\frac{Z_1}{Z_0/N^2}=\frac{q}{1-q} \qquad (8)$$

Условие существования минимума средних затрат выполняется в виде:

$$\frac{\partial^2 m_1\left[Z(N)\right]}{\partial N^2}=2q\frac{Z_0}{N^3}>0 \qquad (9)$$

Из решения (8) получим оптимальное значение объема производства

$$N_{opt}=\sqrt{\frac{q}{1-q}\frac{Z_0}{Z_1}} \qquad (10)$$

которое обеспечивает минимум средних затрат

$$m_1\left[Z_{min}\left(N_{opt}\right)\right]=2\sqrt{q(1-q)Z_0Z_1} \qquad (11)$$

Можно заметить, что минимальное значение (11) достигает максимума при $q=1-q=\frac{1}{2}$, следовательно, максимальное значение

$$\max_q \min_N m_1\left[Z(N)\right]=\sqrt{Z_0Z_1} \qquad (12)$$

Таким образом, величина (12) является пессимистической оценкой – оценкой сверху – минимальных средних затрат.

Рассмотрим модель в безразмерных величинах. Выполним нормировку объема производства и средних затрат для определения общих закономерностей в поведении средних затрат. Введем безразмерный нормированный объем: $x=N/N_{опт}$, (13).Тогда $N=xN_{опт}$. (14)

Подставим это значение в выражение (4), получим с учетом (7)

$$m_1\left[Z(x)\right]=q\frac{Z_0}{xN_{opt}}+(1-q)Z_1N_{opt}x \qquad (15)$$

Обозначим безразмерные параметры

$$K_0=q\frac{Z_0}{N_{опт}}, \qquad K_1=(1-q)Z_1N_{опт} \qquad (16)$$

$$x_{opt}=\sqrt{\frac{K_0}{K_1}}=\sqrt{\frac{q}{1-q}\frac{Z_0}{N_{opt}}\frac{1}{Z_1N_{opt}}}=\frac{1}{N_{opt}}\sqrt{\frac{q}{1-q}\frac{Z_0}{Z_1}}=\frac{N_{opt}}{N_{opt}}=1 \qquad (17)$$

и определим координаты экстремума через эти коэффициенты, получим:

$$m_1\left[Z_{min}\left(x_{opt}\right)\right]=2\sqrt{K_0K_1}=2\sqrt{q\frac{Z_0}{N_{opt}}(1-q)Z_1N_{opt}}= \qquad (18)$$
$$=2\sqrt{q(1-q)Z_0Z_1}.$$

Выполним нормировку средних затрат по формуле (18), получим:

$$\frac{m_1[Z(x)]}{m_1\left[Z_{min}(x_{opt})\right]}=\frac{K_0}{2\sqrt{K_0K_1}}\frac{1}{x}+\frac{K_1}{2\sqrt{K_0K_1}}x=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x_{opt}}{x}+\frac{x}{x_{opt}}\right)=\frac{x_{opt}^2+x^2}{2x_{opt}x}=\frac{1+x^2}{2x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+x\right). \qquad (19)$$

Учтем максимальное значение (12) средних затрат, тогда нормированное значение средних затрат -

$$y(x,q)=\frac{1+x^2}{2x}2\sqrt{q(1-q)}=\frac{1+x^2}{x}\sqrt{q(1-q)} \qquad (20)$$

Функция (20) имеет минимум по x при $x=x_{опт}=1$ и максимум по q при $q=\frac{1}{2}$. На рис. 1 показан график зависимости $y(x,q)$, точка A является точкой максимума. Условно показана траектория движения этой точки при изменении параметра q.

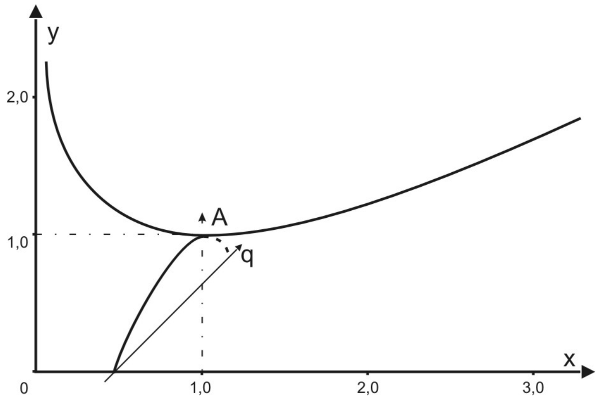

Рисунок 1 – График зависимости $y(x,q)$

Предположим, что $Z_0=10^6$ ден.ед./ед.изд., $Z_1=10^2$ ден.ед./ед.изд., $q=1-q=\frac{1}{2}$. Определим оптимальное значение объема производства и максимальное значение средних затрат.

Используя формулу(10), получим:

$$N_{опт}=\sqrt{\frac{q}{1-q}\frac{Z_0}{Z_1}}=10^2 \text{ ед.изд.}$$

По формуле (12) получим:

$$\max_q \min_N m_1[Z(N)]=\sqrt{Z_0Z_1}=10^4 \text{ ден.ед.}$$

Далее, предположим, что $q=1/4$ и для этих исходных данных определим, как повлияет уменьшение q на оптимальное решение.

$$N_{опт}=\sqrt{\frac{q}{1-q}\frac{Z_0}{Z_1}}=\frac{10^2}{\sqrt{3}}\approx 57.7 \text{ ед.изд.}$$

$$\min_N m_1[Z(N,1/4)]=2\sqrt{q(1-q)Z_0Z_1}=\sqrt{3}/2\cdot 10^4\approx 8660$$

ден.ед.

Таким образом, уменьшение q в 2 раза приводит к уменьшению в $1/\sqrt{3}$ оптимального объема производства и к уменьшению в $\sqrt{3}/2$ минимальных средних затрат.

ВЫВОДЫ

Такое поведение оптимального решения имеет очевидный логический смысл: уменьшение q приводит к уменьшению постоянной составляющей затрат и одновременно к относительному увеличению переменной составляющей затрат, поэтому точка экстремума смещается в сторону меньших оптимальных значений объема и меньших минимальных значений средних затрат.

ЛИТЕРАТУРА:

1. Samochkin V.N. Gibkoe razvitie predpriyatiya: Effektivnost i budzhetirovanie: Monografiya. – M.: Delo, 2000.
2. Zang V.B. Sinergeticheskaya ekonomika. Vremya i peremeny v nelinejnoj ekonomicheskoj teorii: Monografiya. – M.: Mir, 1999.
3. Klebanova T.S., Moldovskaya E.V., Hongven Chang. Modeli i metody koordinatsii v krupnomashtabnyh ekonomicheskih systemah: Monografiya. – Harkov: Biznes-Inform, 2002.

Рецензент: *д.т.н., проф. Ходаков В.Е.,*
Херсонский национальный технический университет, Херсон.