SAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi
1 (1997) 75 -80

LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜNDE, YÜKSEK MERTEBEDEN KESTİRME-DÜZELTME YÖNTEMLERİ

Eyüp Sabri TÜRKER[1]

[1] *SAÜ, Fen-Edebiyat Fak., Mat. Böl., Doç. Dr.*

Özet - Bilindiği gibi Euler, Heun, Taylor ve Runge-Kutta yöntemleri, bir sonraki noktadaki fonksiyon değerini hesaplamak için sadece bir tek başlangıç değeri kullandıklarından, tek adım yöntemleri adını alırlar. Buna karşılık birden çok başlangıç değeri kullanarak, bir sonraki değeri hesaplayan ve çok adım yöntemi olarak bilinen yöntemlerde vardır. Bu yöntemlerin tamamını, diferansiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümünde kullanmak mümkündür.

Bu çalışmada öncelikle beş ve altı noktaya dayanan ve kestirme-düzeltme yöntemi olarak bilinen çok adım yöntemlerinin, lineer diferasiyel denklem sistemlerinin sayısal çözümündeki kullanımı tanıtılmıştır. Ayrıca, geliştirilen bilgisayar programı yardımıyla her mertebeden kestirme-düzeltme yöntemlerinin, adım uzunluğuna bağlı olarak, bir karşılaştırması yapılmıştır.

Abstract - As known, the methods of Euler, Heun, Taylor and Runge-kutta are called Single-Step methods because they use only the in formation from one previous point to campute the succesive point, that is only the initial point (x_0, y_0) is used to compute (x_1, y_1) and in general y_k is needed to compute y_{k+1}. On the other hand, there are the methods known as multy-step methods which compute the succesive value by using initial values more than one. All of these methods can be differential equation systems.

In the current study, the usage of the predictor-corrector methods in the numerical solution of linear differential equation systems is introduced. The predictor-corrector methods under consideration are depending on five and six points. In addition to this, by the aid of the computer program developped by us, all of these methods are compared each other with respect to length step.

I. BEŞ NOKTAYA DAYANAN KESTİRME DÜZELTME FORMÜLLERİ

$$y' = f(x,y)\ ; \qquad y(x_0)=y_0 \tag{1}$$

başlangıç değer problemini göz önüne alalım. (1) denkleminin çözümüne ait beş noktanın bilinen tek adım yöntemlerinden herhangi birisi yardımıyla elde edildiği düşünülürse

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))dx \tag{2}$$

yazılabilir. (2) formülündeki integrali alınacak fonksiyon yerine, beş noktadan geçen

$$f(x, y(x)) \cong \sum_{k=0}^{4} \prod_{\substack{s=0 \\ s\neq k}}^{4} \frac{(x - x_{i-s})}{(x_{i-k} - x_{i-s})} . f_{i-k} \tag{3}$$

şeklindeki dördüncü dereceden bir Lagrange interpolasyon polinomu yazılabilir. Böylece (2) ifadesindeki integral,

$$(x_{i-4}, f_{i-4}), (x_{i-3}, f_{i-3}), (x_{i-2}, f_{i-2}), (x_{i-1}, f_{i-1}), (x_i, f_i)$$

noktalarından geçen (3) polinomu için yazılırsa

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k=0}^{4} \prod_{\substack{s=0\\ s\neq 0}}^{4} \frac{(x - x_{i-s})}{(x_{i-k} - x_{i-s})} . f_{i-k} dx$$

elde edilir.

x_i=0, x_{i+1}=h, x_{i-1}=-h, x_{i-2}=-2h, x_{i-3}=-3h, x_{i-4}=-4h

seçilirse

$$I_k = \int_0^h \prod_{\substack{s=0\\ s\neq 0}}^{4} (x + s.h)\, dx\ ; \quad k = 0, \ldots ,4$$

olmak üzere

$$y_{i+1} \neq y_i + \frac{f_i}{24\, h^4} I_0 - \frac{f_{i-1}}{6\, h^4} I_1 + \frac{f_{i-2}}{4\, h^4} I_2$$

$$- \frac{f_{i-3}}{6\, h^4} I_3 + \frac{f_{i-4}}{24\, h^4} I_4 \qquad (4)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$I_0 = \int_0^h (x^4 + 10\, hx^3 + 35\, h^2x^2 + 50\, h^3x + 24\, h^4)\, dx = \frac{1901}{30} h^5$$

$$I_1 = \int_0^h (x^4 + 9\, hx^3 + 26\, h^2x^2 + 24\, h^3x)\, dx = \frac{1387}{60} h^5$$

$$I_2 = \int_0^h (x^4 + 8\, hx^3 + 19\, h^2x^2 + 12\, h^3x)\, dx = \frac{218}{15} h^5$$

$$I_3 = \int_0^h (x^4 + 7\, hx^3 + 14\, h^2x^2 + 8\, h^3x)\, dx = \frac{637}{60} h^5$$

$$I_4 = \int_0^h (x^4 + 6\, hx^3 + 11\, h^2x^2 + 6\, h^3x)\, dx = \frac{251}{30} h^5$$

olduğu açıktır. Hesaplanan bu değerler (4) formülünde yerlerine yazılarak, **kestirme** formülü olarak

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{720}\left[1901\, f_i - 2774\, f_{i-1} + 2616\, f_{i-2}\right.$$

$$\left. -1274\, f_{i-3} + 251\, f_{i-4}\right] \qquad (5)$$

bulunur. Böylece, y_{i+1} belli olduğundan

$$f_{i+1} = f(x_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})$$

yazılabilir. (2) eşitliğindeki integral

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k=-1}^{3} \prod_{\substack{s=-1\\ s\neq k}}^{3} \frac{(x - x_{i-s})}{(x_{i-k} - x_{i-s})} . f_{i-k}\, dx \qquad (6)$$

şeklindede yazılabilir. Böylece

$$I_k = \int_0^h \prod_{\substack{s=-1\\ s\neq k}}^{3} (x + s.h)\, dx\ ; \quad k = -1, 0, 1, 2, 3$$

olmak üzere

$$y_{i+1}^{(d)} = y_i + \frac{f_{i+1}}{24\, h^4} I_{-1} - \frac{f_i}{6\, h^4} I_0$$

$$+ \frac{f_{i-1}}{4\, h^4} I_1 - \frac{f_{i-2}}{6\, h^4} I_2 + \frac{f_{i-3}}{24\, h^4} I_3 \qquad (7)$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$I_{-1} = \int_0^h (x^4 + 6\, hx^3 + 11\, h^2x^2 + 6\, h^3x)\, dx = \frac{251}{30} h^5$$

$$I_0 = \int_0^h (x^4 + 5\, h^2x^2 + 5\, hx^3 - 5h^3x - 6\, h^4)\, dx = -\frac{323}{60} h^5$$

$$I_1 = \int_0^h (x^4 + 4\,hx^3 + h^2x^2 - h^3x)\,dx = -\frac{44}{30}h^5$$

$$I_2 = \int_0^h (x^4 + 3\,hx^3 - h^2x^2 - 3\,h^3x)\,dx = -\frac{53}{60}h^5$$

$$I_3 = \int_0^h (x^4 + 2\,hx^3 - h^2x^2 - 2\,h^3x)\,dx = -\frac{19}{30}h^5$$

olduğundan, **düzeltme** formülü olarak

$$y_{i+1}^{(d)} = y_i + \frac{h}{720}\big[251\ f_{i+1} + 646\ f_i$$

$$-264\ f_{i-1} + 106\ f_{i-2} - 19\ f_{i-3}\big] \qquad (8)$$

elde edilir.

II. ALTI NOKTAYA DAYANAN KESTİRME-DÜZELTME FORMÜLLERİ

(1) denklemine ait altı noktanın bilinmesi durumunda, (2) eşitliğindeki integral

$$y(x_{i+1}) \cong y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k=0}^{5} \prod_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{4} \frac{(x - x_{i-s})}{(x_{i-k} - x_{i-s})}.f_{i-k}\,dx \qquad (9)$$

şeklinde yazılabilir. (9) eşitliğindeki integrallerin hesaplanması sonucunda **kestirme** formülü olarak

$$I_k = \int_0^h \prod_{\substack{s=0\\ s\neq k}}^{5} (x + s.h)\,dx\ ; \quad k = 0, 1, \ldots, 5$$

olmak üzere

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{f_i}{120\,h^5} I_0 - \frac{f_{i-1}}{24\,h^5} I_1 + \frac{f_{i-2}}{12\,h^5} I_2$$

$$-\frac{f_{i-3}}{12\,h^5} I_3 + \frac{f_{i-4}}{24\,h^5} I_4 - \frac{f_{i-5}}{120\,h^5} I_5 \quad (10)$$

den

$$I_0 = \frac{21385}{60}h^6,\ I_1 = \frac{7923}{60}h^6,\ I_2 = \frac{4991}{60}h^6$$

$$I_4 = \frac{2877}{60}h^6,\ I_5 = \frac{2375}{60}h^6$$

yerlerine yazılmasıyla

$$y_{i+1}^{(k)} = y_i + \frac{h}{7200}\big[21385\ f_i - 39615\ f_{i-1} + 49910\ f_{i-2}$$

$$-36490\ f_{i-3} + 14385 f_{i-4} - 2375\ f_{i-5}\big] \qquad (11)$$

elde edilir. Hesaplanan $y_{i+1}^{(k)}$ değeri yardımıyla bulunacak f_{i+1} için

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \sum_{k=-1}^{4} \prod_{\substack{s=-1\\ s\neq k}}^{4} \left[\frac{(x - x_{i-s})}{(x_{i-k} - x_{i-s})}\right] f_{i-k}\,dx \qquad (12)$$

yazılabilir. (1) ifadesinden

$$I_0 = \frac{2375}{60}h^6,\ I_1 = -\frac{1427}{60}h^6,\ I_2 = -\frac{399}{60}h^6$$

$$I_3 = -\frac{241}{60}h^6,\ I_4 = -\frac{173}{60}h^6,\ I_5 = -\frac{135}{60}h^6$$

olmak üzere, **düzeltme** formülü olarak

$$y_{i+1}^{(d)} = y_i + \frac{f_{i+1}}{120\,h^5} I_0 - \frac{f_i}{24\,h^5} I_1 + \frac{f_{i-1}}{12\,h^5} I_2$$

$$-\frac{f_{i-2}}{12\,h^5} I_3 + \frac{f_{i-3}}{24\,h^5} I_4 - \frac{f_{i-4}}{120\,h^5} I_5 \qquad (13)$$

veya

$$y_{i+1}^{(d)} = y_i + \frac{h}{720}\big[2375\ f_{i+1} + 7135\ f_i - 4190\ f_{i-1}$$

$$+2410\ f_{i-2} - 865\ f_{i-3} + 135\ f_{i-4}\big] \qquad (14)$$

elde edilir.

III. BEŞ VE ALTI NOKTAYA DAYANAN

III. BEŞ VE ALTI NOKTAYA DAYANAN KESTİRME-DÜZELTME YÖNTEMLERİNİN LİNEER DİFERANSİYEL DENKLEM SİSTEMLERİNE UYGULANMASI

x bağımsız, y_1, y_2,... y_n ler bağımlı değişkenler olmak üzere

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, \ldots, y_n)$$
$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, \ldots, y_n) \qquad (15)$$
$$\ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, \ldots, y_n)$$

sistemi ve $y_1(x_0)=y_{10}$, $y_2(x_0)=y_{20}$,..., $y_n(x_0)=y_{no}$ başlangıç şartları verilmiş olsun. (15) sistemine ait dört çözüm noktasının, tek adım yöntemlerinden herhangi biri yardımıyla hesaplandığı varsayılarak, (5) formülüne benzer şekilde, kestirme formülü olarak

$$y^{(k)}_{r,i+1} = y_{r,i} + \frac{h}{720}\big[1901\ f_{r,i} - 2774\ f_{r,i-1} + 2616\ f_{r,i-2} - 1274\ f_{r,i-3} + 251\ f_{r,i-4} - f_{r,i-4}\big] \ ;\ r=1,2,\ldots,n \qquad (16)$$

ve (8) formülüne benzer şekilde de düzeltme formülü olarak

$$y^{(d)}_{r,i+1} = y_{r,i} + \frac{h}{720}\big[251\ f_{r,i+1} + 646\ f_{r,i} - 264\ f_{r,i-1} + 106\ f_{r,i-2} - 19\ f_{r,i-3}\big] \ ;\ r=1,2,\ldots,n \qquad (17)$$

yazılabilir.

Aynı şekilde altı noktaya dayanan kestirme-düzeltme formülleri olarak r=1, 2, ... ,n olmak üzere

$$y^{(k)}_{r,i+1} = y_{r,i} + \frac{h}{7200}\big[21385\ f_{r,i} - 39615\ f_{r,i-1} + 49910\ f_{r,i-2} - 36490\ f_{r,i-3} + 14385\ f_{r,i-4} - 2375\ f_{r,i-5}\big] \qquad (18)$$

yazmak mümkün olur.

IV. UYGULAMA

Çalışmada, adım uzunluğunun 0.2, 0.1, 0.05 ve 0.01 olduğu durumlar için iki, üç, dört, beş ve altı noktaya dayanan kestirme-düzeltme yöntemlerinin bir karşılaştırması yapılmış ve sonuçlar tablo halinde verilmiştir. Başlangıçta gerekli noktaları 4. mertebeden Runge-Kutta yöntemiyle hesaplayan ve sonra da; önce kestirme, sonra düzeltme formüllerine göre, çözüme ait istenen sayıda noktada fonksiyon değerlerini hesaplayan genel amaçlı bir program yapılmıştır. Programın sonuna, göreceli hataları bulup yazan bir alt program ilave edilmiş ve bu sayede yöntemleri, karşılaştırma imkanı ortaya konmuştur.

Uygulama 1.

$$y(0)=3 \quad \text{ve} \quad z(0)=-7$$

olmak üzere

$$y' = 2y + 2z$$

$$z' = 3y + z$$

sisteminin analitik çözümü

$$y = -e^{4x} + 4e^{-x}\ , \quad z = -e^{4x} - 6e^{-x}$$

şeklindedir. Aynı sisteme ait N=20 adet nokta, h=0.2, 0.1, 0.05, 0.01 adım uzunluğu için, tüm kestirme düzeltme yöntemleri kullanılarak hesaplanmış ve her bir yönteme ait maksimum göreceli hata yüzdeleri tablo halinde verilmiştir. (Tablo 1.)

Tablo 1.

Yöntem \ h	0.2	0.1	0.05	0.01
2 Nokt.	13.7162	1.8418	1.6187	0.0016
3 Nokt.	11.8312	0.2215	0.0684	0.0003
4 Nokt.	7.2089	0.1712	0.0096	0.00008
5 Nokt.	4.2238	0.1711	0.0085	0.00007
6 Nokt.	2.6085	0.1708	0.00106	0.00001

Uygulama 2.

$$y(0)=4 \quad \text{ve} \quad z(0)=3$$

olmak üzere

$$y' = 6y - 3z$$

$$z' = 2y + z$$

sisteminin analitik çözümü

$$y = e^{3x} + 3e^{4x}, \quad z = e^{3x} + 2e^{4x}$$

şeklindedir. Çözüme ait N=20 nokta h=0,2, 0.1, 0.05 ve 0.01 adım uzunluklarına göre, beş ayrı kestirme düzeltme yöntemi yardımıyla hesaplanmış ve bulunan maksimum göreceli hata yüzdeleri Tablo.2 ile verilmiştir.

Tablo.2

Yöntem \ h	0.2	0.1	0.05	0.01
2 Nokt.	13.6263	1.6620	0.5753	0.00744
3 Nokt.	11.7659	0.1906	0.0312	0.00012
4 Nokt.	7.1679	0.1426	0.0009	0.00003
5 Nokt.	4.1991	0.0714	0.0008	0.00002
6 Nokt.	2.5929	0.0457	0.0001	0.00002

Uygulama 3.

$$y(0)=2.3 \quad \text{ve} \quad z(0)=0.7$$

olmak üzere

$$y' = y - 2z + \cos x$$

$$z' = -2y + z - \sin x$$

sisteminin analitik çözümü

$$y = e^{3x} + e^{-x} + 0.1(3\cos x - \sin x)$$

$$z = -e^{3x} + e^{-x} + 0.1(7\cos x + \sin x)$$

şeklindedir. Aynı sistemin çözümüne ait N=20 adet nokta, h=0.2, 0.1, 0.05 ve 0.01 adım uzunlukları için hesaplanmış ve her bir yöntemdeki maksimum göreceli hata yüzdeleri Tablo.3. de verilmiştir.

Tablo 3..

Yöntem \ h	0.2	0.1	0.05	0.01
2 Nokt.	11.5641	1.3189	0.3018	0.0022
3 Nokt.	2.9885	0.0356	0.0152	0.00002
4 Nokt.	1.6547	0.0186	0.00069	0.00003
5 Nokt.	0.8568	0.01237	0.0022	0.00003
6 Nokt.	0.5004	0.0098	0.0003	0.00003

Uygulama 4.

$$y(0)=3 \quad \text{ve} \quad z(0)=8.8333$$

olmak üzere

$$y' = -y + z + 2e^{-2x}$$

$$z' = 5y + 3z - e^{-2x}$$

sisteminin analitik çözümü

$$y = 2e^{4x} - e^{-2x} + \frac{11}{6}xe^{-2x}$$

$$z = 10e^{4x} - e^{-2x} + \left(-\frac{11}{6}x - \frac{1}{6}\right)e^{-2x}$$

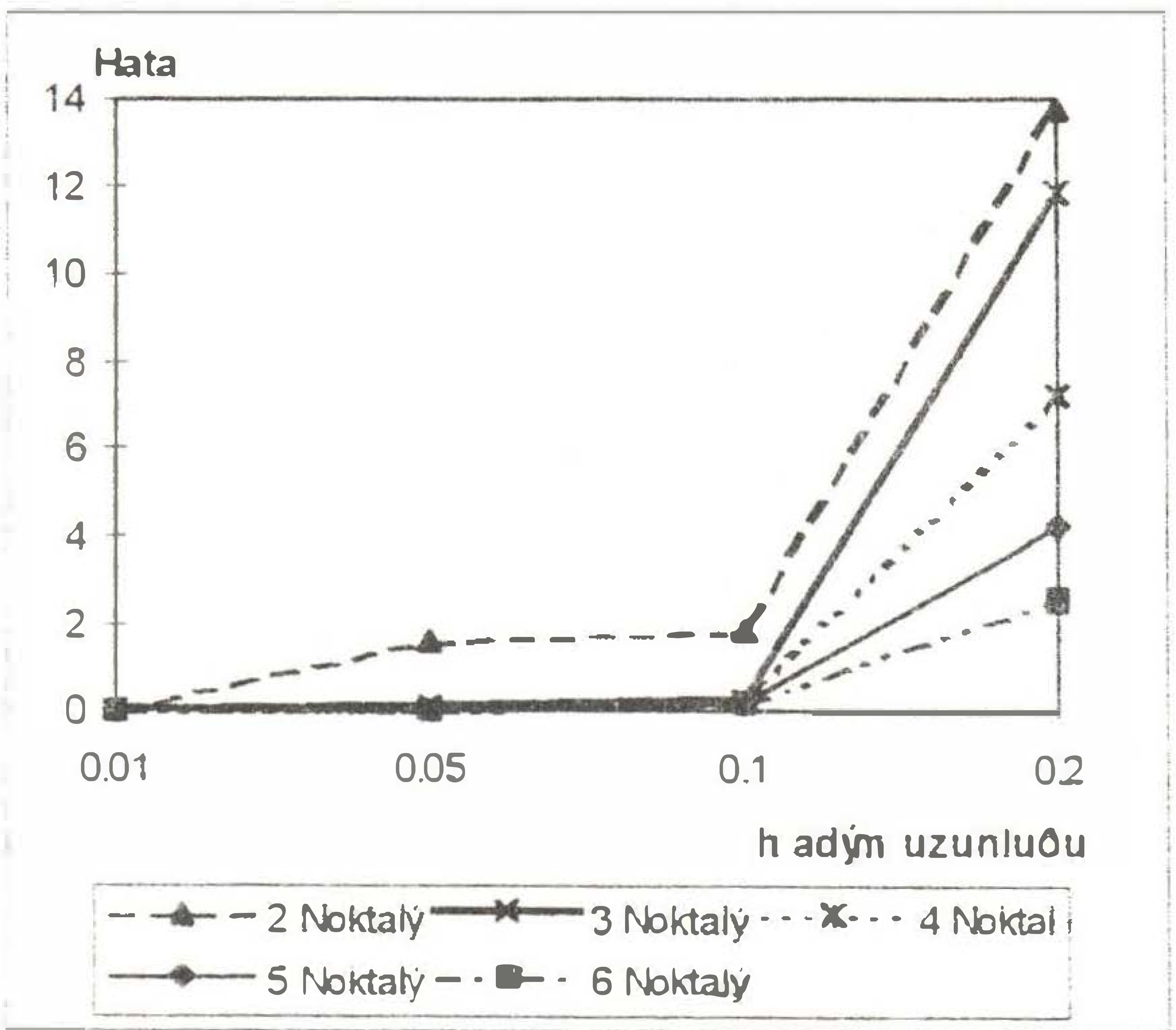
dir. Aynı sistemin çözümüne ait N=20 adet nokta, h=0.2, 0.1, 0.05 ve 0.01 adım uzunluklarına göre hesaplanarak her bir yönteme ait maksimum göreceli hata yüzdeleri Tablo. 4. de verilmiştir.

Tablo 4.

Yöntem \ h	0.2	0.1	0.05	0.01
2 Nokt.	13.7174	1.678	0.6068	0.0071
3 Nokt.	11.8306	0.2020	0.0328	0.0005
4 Nokt.	7.72084	0.1489	0.0065	0.00017
5 Nokt.	4.2232	0.0745	0.0015	0.00017
6 Nokt.	2.6079	0.0477	0.0015	0.00017

V. SONUÇ

Çalışmada, iki, üç, dört noktaya dayalı kestirme lüzeltme yöntemlerine benzer şekilde beş ve altı noktaya layanan bir kestirme-düzeltme yöntemi tanıtılmış ve bu öntemlerin n bağımlı değişkenden ibaret adi türevli lenklem sistemlerine bir genellemesi yapılmıştır. Yöntemlerin göz önüne alınan sistemlere uygulanması sonucu elde edilen hatalar incelendiğinde, nokta sayısının beş ve altı olduğu yöntemlerde hata üzdelerinin hızla düştüğü göze çarpmaktadır. Bu nedenle özellikle h=0.1, h=0.05 ve h=0.01 alınması ıalinde son iki yöntemin analitik çözüm yerine ahatlıkla kullanılabileceğini söyleyebiliriz. Uygulama 4. le verilen denklem sistemine ait hata yüzdelerinin h dımın uzunluğuna bağlı olarak değişimi Şekil 1. de erilmiştir.



Şekil.1. Her beş yönteme ait hata yüzdelerinin adımı ızunluğuna göre değişimi

KAYNAKLAR

[1] AL-KHAFAJI, A. W. and TOOLEY, J. R., "Numerical Methods in Engineeering Practice", CBS Publishing Japan Ltd., New York, 1986.

[2] BUCHANAN, J. L. and TURNER, P.R., "Numerical Methods and Analysis", Mc Graw-Hill, Inc., New York 1992.

[3] CHAPRA, C. S., CANALE, P. R., "Numerical Methods for Engineers", Mc Graw-Hill International Editions, Applied Mathematics Series, New York, 1989.

[4] CONSTANTINIDES, A., "Applied Numerical Methods With Personal Computers", Mc Graw-Hill International Editions, Chemical Engineering Series, New York, 1987.

[5] LAPIDUS, L., and SEINFELD, T.H.,"Numerical Solution of ordinary Differential Equations ". Academic Press . Inc., New York, 1971.

[6] MATHEWS, T.H., "Numerical Methods for Computer Science, Engineering, and Mathematics", Prentice-Hall International, Inc., London, ' 1987.

[7] NAKAMURA, S., "Applied Numerical Methods With Software", Prentice -Hall International Editions, London, 1991.