05.00.00 Engineering sciences

05.00.00 Технические науки

UDC 648.23 (088.8)

Study of Nonhomogeneous Equations with Variable Coefficients Describing Washing Machines Vibration

[1] Valery G. Fetisov
[2] Sergey N. Alekhin
[3] Sergey P. Petrosov

[1] South Mathematical Institute RAS, South Russian State Univ. of Economics and Service, Russia
346 500, Shakhty, Shevchenko street, 147
Dr. (Physical and Mathematical), Professor
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru
[2] South Russian State Univ. of Economics and Service, Russia
346 500, Shakhty, Shevchenko street, 147
PhD, Associate Professor
E-mail: alex_cn@mail.ru
[3] South Russian State Univ. of Economics and Service, Russia
346 500, Shakhty, Shevchenko street, 147
Dr. (Technical), Professor
E-mail: mabn@sssu.ru

Abstract. Earlier in [1] a slightly intertwined system of differential equations describing the dynamics of the random vibrations of the drum type washing machine suspended unit was fixed. This article studies the general case of nonhomogeneous equations with variable coefficients describing washing machines vibration.

Keywords. A weakly connected system; conservative type of equations; variables stiffness and dissipation of the suspension.

Одной из актуальных задач проектирования и совершенствования стиральных машин барабанного типа является разработка эффективных методов и средств виброзащиты, предназначенных для снижения значительных динамических воздействий, возникающих при центробежном отжиме текстильных изделий.

Современный уровень развития оборудования математического аппарата и компьютерных технологий обработки экспериментальных данных позволяет исследовать те вопросы динамики стиральных машин, решение которых до недавнего времени вызывало затруднение.

К одному из таких вопросов относится исследование динамики стиральных машин, колебательные процессы которых описываются линейными неоднородными дифференциальными уравнениями второго порядка с переменными коэффициентами, характеризующими жесткость и диссипацию колебательной системы.

В большинстве известных работ, посвященных динамике стиральных машин, математическое моделирование колебательных процессов осуществлялось в условиях постоянства коэффициентов жесткости и диссипации.

Наряду с этим, в последнее время появились технические разработки, предусматривающие изменение значений жесткости и диссипации элементов подвески моечного узла стиральной машины в процессе отжима. Это обусловливает объективную необходимость проведения исследований динамики колебательных систем с переменными коэффициентами жесткости и диссипации.

В качестве исходной используем систему, состоящую из шести линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (кратко ЛОДУ 2П), описывающих случайные колебания подвесной части стиральных машин, приведённую в [1]:

$$M_{п.ч}\ddot{\zeta} + N_{\partial} b_{\partial z} \cdot \dot{\zeta} + N_y c_{yz} \cdot \zeta = U_1(t) \cdot \omega^2 \cdot \sin \omega t;$$

$$J_z \cdot \ddot{\gamma} + N_{\partial}(b_{\partial y} \cdot \xi_1^2 + b_{\partial x} \cdot \eta_1^2) \cdot \dot{\gamma} + N_y (c_{yy} \cdot \xi_1^2 + c_{yx} \cdot \eta_1^2) \cdot \gamma = U_2(t) \cdot \omega^2 \cdot l_x \cdot \cos \omega t;$$

$$M_{п.ч}\ddot{\xi} + N_{\partial} b_{\partial x} \cdot \dot{\xi} + N_y \cdot c_{yx} \cdot \xi = 0;$$

$$J_y \cdot \ddot{\beta} + N_{\partial}(b_{\partial x} \cdot \zeta_1^2 + b_{\partial z} \cdot \xi_1^2) \cdot \dot{\beta} + N_y (c_{yx} \cdot \zeta_1^2 + c_{yz} \cdot \xi_1^2) \cdot \beta = U_2(t) \cdot \omega^2 \cdot l_x \cdot \sin \omega t;$$

$$M_{п.ч}\ddot{\eta} + N_{\partial} b_{\partial y} \cdot \dot{\eta} + N_y \cdot c_{yy} \cdot \eta = U_1(t) \cdot \omega^2 \cdot \cos \omega t;$$

$$J_x \cdot \ddot{\alpha} + N_{\partial}(b_{\partial z} \cdot \eta_1^2 + b_{\partial y} \cdot \zeta_1^2) \cdot \dot{\alpha} + N_y (c_{yz} \cdot \eta_1^2 + c_{yy} \cdot \zeta_1^2) \cdot \alpha = 0.$$

Здесь: $M_{п.ч}$ – масса подвесной части; N_{∂} – количество демпферов; N_y – количество упругих элементов; $b_{\partial x}$, $b_{\partial y}$, $b_{\partial z}$ – коэффициенты демпфирования по осям *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно; c_{yx}, c_{yy}, c_{yz} – коэффициенты жёсткости упругих элементов по осям *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно; l_x – величина перемещения центра масс изделий вдоль горизонтальной оси *Ox*; ω – частота колебаний вынуждающей силы; J_x, J_y, J_z – моменты инерции вдоль осей *Ox*, *Oy*, *Oz* соответственно.

Следует подчеркнуть, что данная система является слабо связанной системой дифференциальных уравнений, так как каждое из уравнений является изолированным.

Первое, второе, четвертое и пятое уравнения данной системы являются однотипными неоднородными уравнениями, имеющими следующий вид:

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = F(t), \tag{1}$$

где q – обобщенная координата перемещения подвесной части (так называемого моечного узла) стиральной машины; $F(t)$ – внешнее воздействие, зависящее от времени.

Чтобы освободиться от первой производной $\dot{q}$, сделаем замену переменной:

$$q = E(t) \cdot y = e^{-\int_0^t n(t)dt} \cdot y(t). \tag{2}$$

Отсюда:

$$\dot{q} = \left[E(t) \cdot y\right]' = E'(t) \cdot y(t) + E(t) \cdot y'(t) = \left[e^{-\int_0^t n(t)dt}\right]' \cdot y(t) +$$

$$+ E(t) \cdot y' = e^{-\int_0^t n(t)dt} \cdot (-n(t)) \cdot y(t) + E(t) y'(t) = E(t) \cdot \left[y'(t) - n(t) \cdot y(t)\right].$$

Аналогично:

$$\ddot{q} = \left\{E(t) \cdot \left[y'(t) - n(t) \cdot y(t)\right]\right\}' = E'(t) \cdot \left[y'(t) - n(t) y(t)\right] + E(t) \cdot \left[y'(t) - n(t) \cdot y(t)\right]' =$$

$$= \left[-n(t)\right] \cdot E(t) \cdot \left[y'(t) - n(t) y(t)\right] + E(t) \cdot \left[y''(t) - n'(t) \cdot y(t) - n(t) y'(t)\right] =$$

$$= E(t) \cdot \left[-n(t) y'(t) + n^2(t) \cdot y(t) + y''(t) - n(t) y'(t) - n'(t) y(t)\right] =$$

$$= E(t) \cdot \left[y''(t) - 2n(t) y'(t) + n^2(t) y(t) - n'(t) y(t)\right].$$

Далее, подставляя полученные значения q, $\dot{q}$ и $\ddot{q}$ в исходное уравнение (1), имеем:

$$\ddot{q} + 2n(t)\dot{q} + k^2(t)q = E(t) \cdot [y''(t) - 2n(t) y'(t) + n^2(t) y(t) - n'(t) y(t) +$$

$$+ 2n(t) y'(t) - 2n^2(t) y(t) + k^2(t) y(t)] = F(t),$$

или, упрощая, получим уравнение:

$$E(t) \cdot \left|y''(t) + y(t) \cdot k^2(t) - n^2(t) y(t) - n'(t) y(t)\right| = F(t). \tag{3}$$

Отсюда:

$$y''(t)+\left[k^2(t)-n^2(t)-n'(t)\right]\cdot y(t)=\frac{F(t)}{E(t)}. \qquad (4)$$

Обозначив через $p^2(t)=k^2(t)-n^2(t)-n'(t)$, а через $f(t)=F(t)\cdot e^{-\int_0^t n(t)dt}$,
получим уравнение вида:

$$y''(t)+p^2(t)\cdot y(t)=f(t). \qquad (5)$$

При $f(t)\equiv 0$ имеем соответствующее однородное уравнение вида:

$$y''(t)+p^2(t)\cdot y(t)=0. \qquad (6)$$

К частным случаям уравнений (5) и (6), как известно [2], относятся уравнения Матье, Риккати и ряд других. При изучении периодических движений подвесной части характерны ситуации, когда функция $p^2(t)$ и правая часть уравнения $f(t)$ медленно изменяются во времени. Тогда уравнение (5) относится к консервативному типу (отсутствует диссипация $y'(t)$, а функцию $p^2(t)$ мы можем рассматривать как медленно изменяющуюся частоту колебаний).

Приближенное решение $\hat{y}(t)$ однородного уравнения (6) можно найти в виде:

$$\hat{y}(t)=\frac{1}{\sqrt{p(t)}}\left(C_1\cdot\cos\int_0^t p(t)dt+C_2\cdot\sin\int_0^t p(t)dt\right), \qquad (7)$$

где C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Дифференцируя функцию (7), получим:

$$\hat{y}'(t)=0{,}5\frac{\hat{y}\cdot p'(t)}{p(t)}-\sqrt{p(t)}\left(C_1\cdot\sin\int_0^t pdt-C_2\cdot\cos\int_0^t pdt\right), \qquad (8)$$

и аналогично вторую производную $\hat{y}''(t)$.

Окончательно, приближённое решение $\hat{y}(t)$ подчиняется уравнению:

$$\hat{y}''+(p^2-0{,}75\cdot p^{-2}\cdot p'^2+0{,}5\cdot p^{-1}\cdot p'')\hat{y}=0. \qquad (9)$$

Сравнивая уравнения (6) и (9), можно сделать вывод, что выражение (7) может быть принято за приближённое решение уравнения (6), если

$$\left(-0{,}75\cdot\frac{p'^2}{p^2}+0{,}5\cdot\frac{p''}{p}\right)^2\approx 0. \qquad (10)$$

Последнее соотношение (10) равносильно следующему неравенству:

$$\left|\frac{0{,}5\cdot p''}{p^3}-0{,}75\cdot\left(\frac{p'}{p^2}\right)^2\right|\prec 1. \qquad (11)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 можно найти из начальных условий процесса колебаний $y(0)=y_0$, $y'(0)=y'_0$, где $t_0=0$.

Действительно, при $t=0$ $y_0=p_0^{-0,5}\cdot C_1$; $y'_0=-0{,}5\cdot p'_0\cdot p_0\cdot y_0+C_2\cdot p_0^{0,5}$.

Отсюда значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 будут следующими:

$$C_1=p_0^{0,5}\cdot y_0;\quad C_2=y'_0\cdot p_0^{-0,5}+0{,}5\cdot p_0^{-1,5}\cdot p'_0\cdot y_0. \qquad (12)$$

Учитывая формулу (7), окончательно получим приближённое решение однородного дифференциального уравнения (6) в виде:

$$\hat{y}'(t) = \sqrt{\frac{p_0(t)}{p(t)}} y_0 \cdot \cos\int_0^t p(t)dt + \frac{1}{\sqrt{p \cdot p_0(t)}}\left(y'_0 + \frac{0,5p'_0}{p_0} \cdot y_0\right)\sin\int_0^t p(t)dt \,. \quad (13)$$

Приближённое решение неоднородного уравнения (5) есть сумма приближенного решения уравнения (13) и частного решения уравнения (5), имеющего вид:

$$y_*(t) = \frac{1}{\sqrt{p(t)}} \cdot \int_0^t \frac{f(\tau)}{p(\tau)} \sin\int_\tau^t p(s)dsd\tau \,, \; s \in [\tau, t].$$

Применение полученных уравнений позволяет глубже исследовать динамику стиральных машин с переменными значениями жесткости и диссипации системы подвески моечного узла.

Примечания:

1. Алехин С.Н. Теоретические и экспериментальные исследования динамики стиральных машин барабанного типа: дис. …канд. техн. наук: 05.02.13. М., 2000. 290 с.
2. Д'Анжело Г. Линейные системы с переменными параметрами. М.: Машиностроение, 1974. 287 с.

УДК 648.23 (088.8)

Исследование неоднородных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих колебания стиральных машин

[1] Валерий Георгиевич Фетисов
[2] Сергей Николаевич Алехин
[3] Сергей Петрович Петросов

[1] Южный математический институт РАН, Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса, Россия
346500, г. Шахты, ул. Шевченко, 147
Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru
[2] Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса, Россия
346500, г. Шахты, ул. Шевченко, 147
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: alex_cn@mail.ru
[3] Южно-Российский государственный университет экономики и сервиса, Россия
346500, г. Шахты, ул. Шевченко, 147
Доктор технических наук, профессор
E-mail: mabn@sssu.ru

Аннотация. Ранее в [1] была решена слабо связанная система дифференциальных уравнений, описывающих динамику случайных колебаний подвесной части стиральной машины барабанного типа. В настоящей работе исследован общий случай неоднородных уравнений с переменными коэффициентами, описывающих колебания стиральных машин.

Ключевые слова: Слабо связанная система; консервативный тип уравнений; переменные жесткость и диссипация подвески.