PAMUKKALE ÜNİVERSİTESİ MÜHENDİSLİK FAKÜLTESİ
PAMUKKALE UNIVERSITY ENGINEERING COLLEGE
MÜHENDİSLİK BİLİMLERİ DERGİSİ
JOURNAL OF ENGINEERING SCIENCES
YIL : 1999
CİLT : 5
SAYI : 1
SAYFA : 967-973

SONLU MARKOV ZİNCİRİNİN GRAFLARLA KATLANIŞI

Samim DÜNDAR*, **Pınar DÜNDAR,** **
* Dokuz Eylül Üniversitesi, İktisadi ve İdari Bilimler Fakültesi, Ekonometri Bölümü, Buca-İzmir
**Ege Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, Bornova-İzmir

ÖZET

Sonlu bir Markov zinciri P olasılık matrisi ile ifade edilebildiği gibi birleştirilmiş, yönlendirilmiş ve ağırlıklandırılmış bir grafla da (bu graflar olasılıksal graflar olarak bilinir) gösterilebilir. Markov zincirinin durum uzayının eleman sayısının büyük olduğu durumlarda, bu uzay hemen hemen eşit sayıda duruma sahip q tane alt uzaya ayrılıp, her bir alt uzayda hesaplamaları ayrı ayrı yapılıp, sonuç bunlardan elde edilir. Bu düşünce bilgisayar bilimlerinde paralel hesaplama olarak bilinmektedir. Böyle bir hesaplamanın uygulanmasında önemli olan etkin ve kolay uygulanabilen bir yöntemin verilmesidir. Bu çalışmada bir sonlu Markov zinciri olasılıksal bir graf olarak ele alınmış ve katlanabilir graflara ait bilgilerin yardımıyla kendisinden daha küçük boyutlu alt uzaylara ayrılmıştır. Ayrıca yöntemin bir algoritması verilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Sonlu markov zincirleri, Yönlendirilmiş graf, Graf parçalanışı

COLLAPSIBILICATION OF A FINITE MARKOV CHAIN BY GRAPHS

ABSTRACT

A finite Markov chain is presented by a P probability matrix, and it is represented by a connected, directed and weighted graph. When the state space of Markov chain is of large dimension, this space is divided into subspaces those have roughly same number states. The main solution is founded from the solutions in these subspaces. It is known that parallel computation in computer sciences. It is important to fınd a procedure which gives that operation which mentioned above. In this work, a finite Markov chain is considered a probabilistic graph and it is partitioned to its subspaces by using the knowledges of collapsible graphs. An algorithm of the procedure is given.

Key Words : Finite markov chains, Directed graphs, Graph partitioning

1. GİRİŞ

Uygulamalı bilimlerde bir sistemin durum uzayının boyutunun büyük olduğu hallerde işlem yapmak zor ve zaman alıcıdır. Böyle durumlarda durum uzayını belirli koşulları sağlayan alt uzaylara ayırıp, her bir alt uzayda çözümleri bulduktan sonra bu çözümlerden hareketle problemin çözümüne varmak bilgisayar bilimlerinde paralel hesaplama adını alır. Küçük boyutlu alt uzayların her birini farklı birer işlemcide çalıştırmak yoluyla problemin çözümüne varmak veri ve zaman tasarrufu sağlar. Bu şekilde çözümü elde etmedeki esas sorun, alt uzaylara ayırmayı sağlatan etkin bir yöntemi seçebilmektir.

Simetrik, sparse (sıfır elemanları çok) bir doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisinin (denklem sisteminin bağımsız değişkenlerine) parçalanması, katsayılar matrisini ağırlıklar matrisi kabul eden bir grafı parçalarına ayırmak olarak ele alınmıştır (Karpis ve Kumar 1996-a, b). Graf parçalanışı; hassas bilimsel hesaplamalar, coğrafi bilgi işlem sistemleri, görev dağılımı problemleri ve yöneylem araştırması gibi uygulama alanları olan önemli bir problemdir. Burada ilk düşünülen bir grafın tepeler kümesini herbiri hemen hemen eşit sayıda tepe içeren q tane alt kümeye ayırmaktır. Ayrıca böyle bir parçalamayı yaparken alt kümeleri birbirine bağlayan ayrıt sayısının minimum olması hedeflenmektedir.

Eğer doğrusal denklem sisteminin katsayılar matrisi simetrik değilse benzeri bir yöntemin uygulanabileceği bu çalışmadaki temel düşüncedir. Simetrik olmayan katsayılar matrisine sahip doğrusal denklem sistemleriyle sonlu markov zincirlerinde karşılaşılmaktadır. Tepeler kümesi V, ayrıtlar kümesi E olan bir G = (V,E) grafı ve üzerinde bir P olasılık dağılımı verildiğinde; V tepeler kümesinin elemanları durum uzayını, E ayrıtlar kümesinin elemanları bir durumdan başka bir duruma geçişi ve p_{ij} de v_i, $v_j \in V$ için v_i durumundan v_j durumuna geçiş olasılığını gösterecek şekilde düşünülürse bir Markov Zincirinin durum uzayının, bileşimleri durum uzayını veren ayrık alt uzaylarına ayrılmasıdır. Böyle bir ayrışımda temel hedefler; her alt uzayın hemen hemen eşit sayıda durum içermesi, alt uzaylar arasındaki geçiş ayrıtları sayısının minimizasyonu ve her alt uzaydaki olasılık dağılımının maksimizasyonu (kesim olasılıklarının minimizasyonu)dur.

P olasılık dağılımına sahip bir probabilistik G grafının n. kuvvet grafında P^n olasılığının G^{n-1} grafındaki olasılıkların çarpımlarının toplamı olarak ifade edilebileceği gösterilmiştir (Marton, 1993). Katlanabilir graf tanımı, bir grafın katlanabilirlik koşulları ve katlanabilir grafların eşlemelerle ilişkisine ait sonuçlar bilinmektedir (Chen ve Lai 1993).

Bu çalışmada bir sonlu Markov zincirine özdeşlenen birleştirilmiş, yönlendirilmiş ve ağırlıklandırılmış bir grafın parçalarına ayrılması işlemi Chen ve Lai (1993); Marton (1993) ve Karpis ve Kumar (1996-b) de verilen tanım ve sonuçları kullanarak yapılmaya çalışılmıştır. Yöntemin etkin bir algoritması verilmiştir.

2. YÖNTEM

Bu bölümde gerekli tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2. 1. Tanım

Bir fiziksel sistemin verilmiş bir durumunun t_2 anındaki bilinmeyen davranışı, önceki t_1 anındaki bilinen davranışına olasılık yasaları ile bağlı ise bu sisteme Markov süreci denir. Zamanın ayrık sürecinde gözlenmiş bir fiziksel sistem ele alınsın. Ardışık gözlemler x_0, x_1, ..., x_n ile gösterilsin. x_n rasgele değişken olsun. x_n'nin değeri fiziksel sistemin n. zamandaki durumunu gösterir. Eğer x_n ayrık rasgele değişken iken; m > 2 tam sayısı için $n1 < n2 < .... < nm$ kümesinde x_{n1}, x_{n2},..., x_{nm-1} bilinen değerleri için x_{nm} koşullu dağılımı en son bilinen x_{nm-1} değerine bağlı ise $\{x_n\}$ dizisi bir Markov zinciri adını alır (Parzen, 1962).

2. 2. Tanım

{0,1,2,...n} durum uzaylı $\{x_n\}$ Markov zincirinin olasılık geçiş matrisi,

$$P=\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ n \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & . & . & . & n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc} p_{00} & p_{01} & p_{02} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{0n} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n0} & p_{n1} & p_{n2} & \cdot & \cdot & \cdot & p_{nn} \end{array}\right] \end{array} \qquad (1)$$

ile gösterilir.

Burada $p_{ij} \geq 0$ tüm'i, j için

$\Sigma p_{ij} = 1$ tüm i'ler için (Kemeny, 1965; Parzen, 1962).

2. 3. Teorem

x_i durumundan x_j durumuna tek adımda geçiş olasılığı p_{ij} olan bir zincirde x_i durumundan x_j durumuna x_k durumlarından geçerek iki adımda varma olasılığı bu olasılık b_{ij} ile gösterilirse;

$b_{ij}= p_{ij}+\sum p_{ik}\, p_{kj}$'dir (Kemeny ve Snell, 1965). (2)

Burada S Markov zincirinin durum uzayını göstermektedir.

2. 4. Chapman-Kolmogorov Eşitliği

Elemanları n-adım geçiş olasılıkları olan matrisi,

$P^{(n)} = [\, p_{ij}^{(n)} \,]$ ile gösterilsin.

Teorem 2.1 in tekrarlı uygulamaları ile

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{x_k \varepsilon S} p_{ik}^{(n-1)} * p_{kj} \text{ elde edilir.}$$

Kısaca $P^{(n)} = P^n$ ile gösterilir. Ayrıca matrislerin özelliğinden $P^{n+r} = P^n * P^r$ dir (Parzen, 1962; Marton, 1993).

2. 5. Teorem

Bir Markov zincirinin durum uzayı S kümesi, durumların sonlu sayıdaki ayrık alt kümelerinin bileşimi olarak $S = C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_r$ biçiminde yazılabilir. Burada $C_i \cap C_j = \varnothing$ dir ve herbir C_r ya iletişim halindeki durumların bir kümesi ya da dönüşümsüz tek bir durum içerir (Parzen, 1962).

2. 6. Tanım

V tepeler kümesinin her tepe çiftini E ayrıtlar kümesinin bir elemanına götüren her dönüşüme bir graf denir. Bir graf G = (V, E) ile gösterilir (Chartrand ve Lesniak 1986).

2. 7. Tanım

Bir G grafı için $V_1 \subseteq V$ ve $E_1 \subset E$ ile tanımlı $H = (V_1, E_1)$ grafına G grafının bir alt grafı adı verilir. $V_1 = V$ ise bu alt grafa dallanmış alt graf denir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

2. 8.Tanım

G = (V, E) tepeler kümesi V, V'nin boyutu n ve ayrıtlar kümesi E olan bir graf olsun. G'nin tepeler kümesi V'nin $V_1, V_2, ..., Vq$ biçiminde q parçaya :

i) $V_i \cap V_j = \varnothing$ $(i \neq j)$

ii) $|V_i| = n/q$

iii) $\cup V_i = V$

iv) V_i yi V_j ye birleştiren ayrıtların sayısı minimum

koşulları altında ayrılmasına G grafının parçalanışı denir (Karpis ve ark., 1994; Karpis ve Kumar, 1996-a, b).

3. SONLU MARKOV ZİNCİRİNİN GRAFI

Bir Markov zincirinin durum uzayı bir G grafının V tepeler kümesine, durumlar arası bir adımlık geçişler G grafının E ayrıtlar kümesine ve bir durumdan diğer bir duruma geçiş olasılığı ilgili ayrıtın ağırlığına karşı getirildiğinde bir sonlu Markov zinciri yönlendirilmiş, birleştirilmiş ve ağırlıklandırılmış bir graf olarak ifade edilir. Böyle bir işlem sonucunda sonlu Markov zincirininin ayrık parçalanışını bulma problemi, birleştirilmiş, yönlendirilmiş ve ağırlıklandırılmış bir grafın başlangıç ve bitiş noktaları sabitlenmiş iletişimlerinin Tanım 2. 8'de verildiği biçimde parçalarına ayrılması problemine dönüşür. Sözü edilen düşünce altında bir G grafı bundan böyle G = (X, E) olarak kullanılacaktır.

Markov zincirinin olasılık geçiş matrisinde her satır G grafının bir x_i tepesi olarak ve p_{ij} değeri x_i tepesinden x_j tepesine giden ayrıtın ağırlığı olarak alındığında olasılık geçiş matrisi de bir graf olarak ifade edilmiş olur. Bu işlemle olasılık geçiş matrisli graf, katlanarak parçalarına ayrılmış olur. Katlanabilir graf tanımı ilk kez Chen ve Lai (1993) çalışmasında verilmiştir.

3. 1. Tanım

Bir G grafının bir x_i tepesine bitişik tepelerin sayısına x_i tepesinin derecesi denir.

3. 2. Tanım

Bir G = (X, E) grafı için, $\theta(G)$ ile G grafının tek dereceden tepeleri gösterildiğinde; $E_1 \subseteq E$ için G/E_1 büzülmesi, E_1 içindeki her bir ayrıtın uç tepelerinin bir tepe olarak düşünülerek bu ayrıtların silinmesi ile tanımlanır(Chen ve Lai 1993). Eğer H; G grafının bir alt grafı ise G/H(E) kısaca G/H ile gösterilir.

3. 3. Tanım

Bir G = (X, E) grafının çift sayıda tepeli her $R \subseteq X$ alt kümesi için,

$\theta(H_R) = R$ olan bir dallanmış, birleştirilmiş H alt grafı varsa G grafına katlanabilir graf adı verilir (Chen ve Lai 1993).

3. 4. Tanım

Bir G grafında, maximal katlanabilir H_i alt grafları için $G/\cup E(H_i)$ grafına G grafının indirgenmişi denir (Chen ve Lai, 1993).

3. 5. Tanım

Bir G grafında grafın tüm tepelerini içeren çevresiz alt grafa, grafın bir dallanmış ağacı adı verilir (Chartrand ve Lesniak, 1986).

3. 6. Teorem

Eğer bir G grafı iki tane ayrık ayrıtlı dallanmış ağaca sahipse, G katlanabilir bir graftır (Chen ve Lai 1993).

Teorem 3. 6'ya göre bir G grafının katlanabilir olması için iki tane ayrık ayrıtlı dallanmış ağacının var olduğunu göstermek yeterlidir. Bir G grafının dallanmış ağaçlarını bulan basit bir algoritma 4. cü bölümde verilmiştir.

4. SONLU MARKOV ZİNCİRİNİN GRAFLA KATLANIŞI

Burada n tepeli yönlendirilmiş, birleştirilmiş ve ağırlıklandırılmış bir G = (X, E) grafının sabitleşmiş iki tepesi x_g ve x_b olsun. Grafın X tepeler kümesi q tane,

(a) $|X_1| \approx |X_2| \approx ... \approx |X_q| \approx$ n/q tane tepe içeren kümeye ayrılmak istenmektedir. ≈ işareti hemen hemen eşit anlamında kullanılmıştır. Böyle bir ayrımda;
(b) $X_i \cap X_j = \emptyset$ olmalıdır.
(c) $G_1 = (X_1, E_1)$, $G_2 = (X_2, E_2)$,..., $G_q = (X_q, E_q)$ grafları G nin alt graflarıdır.
(d) Herbir G_i içindeki iletişimin olasılığı maksimum olmalıdır. (Bu koşul her G_i ile G_j arasındaki kesim ayrıtlarının minimum olasılıkta olması demektir).

Bu şekilde ayrışımı sağlayan bir algoritma, iki algoritmanın ardarda uygulanması ile sonuca varır.

1) Teorem II. 1'e göre grafın katlanabilirliğini gösteren ayrık ayrıtlı iki dallanmış ağacın bulunması.
2) Graf katlanabilirse katlamanın yapılması.

4. 1. Bir Grafın Dallanmış Bir Ağacının Bulunması

G = (X, E) grafının bir dallanmış ağacının bulunması aşağıdaki basit algoritma ile gerçekleştirilebilir.

(a) Bir e_1 ayrıtı seç.
(b) Eğer $e_1, e_2, ..., e_i$ ayrıtları seçilmişse, G içinde $e_1, e_2, ..., e_i, e_{i+1}$ bir çevre oluşturmayacak şekilde $E \backslash \{e_1, e_2, ..., e_i\}$ kümesinden bir e_{i+1} ayrıtı seç.
(c) İkinci adım uygulanamaz olunca dur.

Bu algoritma ile G grafının iki ayrık ayrıtlı ağacı bulunabiliyorsa Teorem 3. 6'ya göre graf katlanabilirdir.

4. 2. Katlanabilir Bir Grafın Tepeler Kümesinin Ayrılması

(a) Grafın tepeler kümesinin parça sayısı q'yu oku.
(b) G = (X,E) grafında Tanım 3. 3'e uygun olarak H_i maksimal katlanabilir alt grafları (en fazla tepe ve ayrıta sahip) sapta.
(c) Bir x_j tepesine en büyük ağırlıklı ayrıtla bitişik bir tepe bul. Başlangıçta $x_j = x_g$ giriş tepesi alınır. $x_j = x_g$ tepesine en büyük ağırlıkla bitişik ayrıt bulunur. Bu ayrıt $e = (x_g, x_c)$ olsun. Buna bitişik iki ayrıt da (x_c, x_i) ve (x_m, x_g) ayrıtları olsun.
(d) G grafı Tanım 3. 2'de verildiği biçimde Teorem 2.3'ü sağlayacak şekilde büzülür. Açıkça ifade edilirse; x_g tepesi x_c tepesi ile birlikte alınır. Diğer tepelerin bu iki tepe ile aynı yönlü iletişimleri olasılığı,

$$b_{gi} = \sum p_{gc} * p_{ci} \qquad b_{mg} = p_{mg} ,$$

(x_g, x_t) ve (x_t, x_s) ayrıtları varsa ters yönlü iletişim olasılığı,

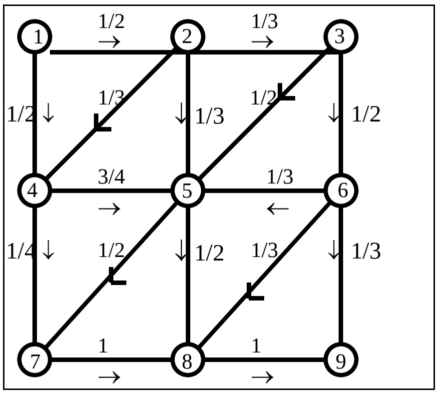
$b_{gs} = \sum p_{gt} * p_{ts}$
ve (x_g, x_c), (x_c, x_i), (x_g, x_i) şeklinde geri dönüşsüz bir durum varsa olasılığı,
$b_{gi} = \sum p_{gc} * p_{ci} + p_{gi}$ olarak hesaplanır.

Böylece G grafında bir tepe(x_c tepesi) büzülmüş olur. Büzülen tepe sayısı ≤ n/q ise ii) adımına geri dön. Aksi halde X_1 tepe kümesi bulunmuştur. $G_1 = (X_1, E_1)$ alt grafı belirlenmiştir. I = 1 al. Eğer I < q ise iii) adımına geç. Aksi halde işlemi bitir.

Bu grafta son tepe olan x_b tepesine ii) de verilen işlemleri uygulayarak X_2 tepe kümesini ve $G_2 = (X_2, E_2)$grafı belirlenmiştir. I = I +1 al. I< q ise adımına geç. Aksi halde işlemi bitir.

(e) Sonuç grafta G_1'in kaldığı yerden başlayarak ii) işlemlerini uygula. Her n/q tepe büzülmesinden sonra I = I + 1 al. Eğer I <.q ise ii) ile işlemleri sürdür. Aksi halde tepeler kümesinin X_1, X_2,..,X_q şeklinde parçalanışı bitmiştir. G grafı G_1, G_2,...,G_q biçiminde alt graflarla katlanmıştır.

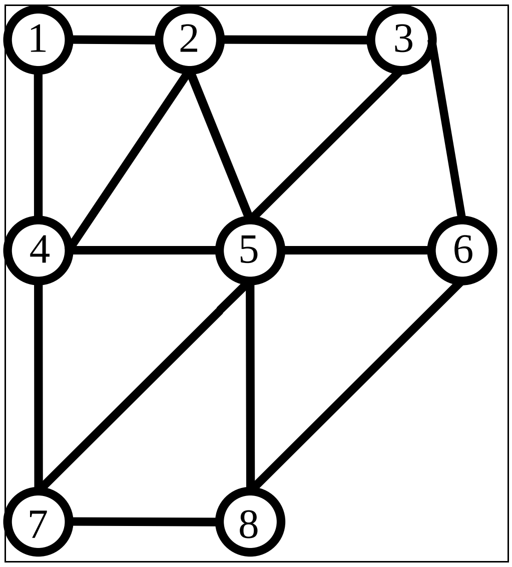
Aşağıda, verilen 9 tepeli, ayrıtlarına olasılıklar değer olarak bağlanmış grafın yukarıda verilen algoritma ile herbiri 3 tepeli 3 parçayla katlanışı :



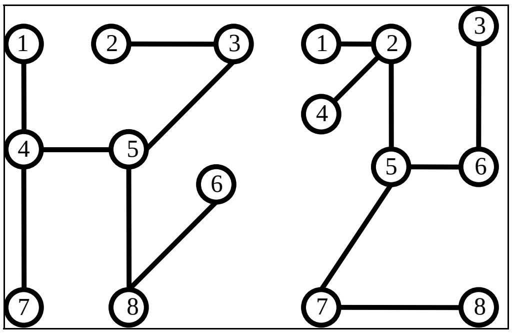
Şekil 1. 9 tepeli yönlendirilmiş G grafı
V={1,2,3,4,5,6,7,8,9}

R={1,2,3,4,5,6,7,8}

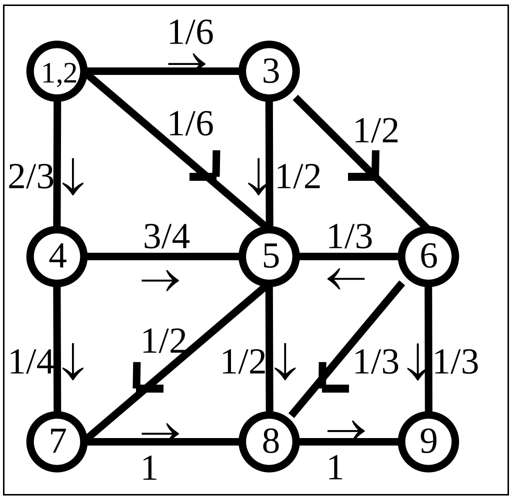
alınırsa ;



Şekil 2. G grafının H_1 altgrafı



Şekil 3. H_1 altgrafının dallanmış iki ağacı

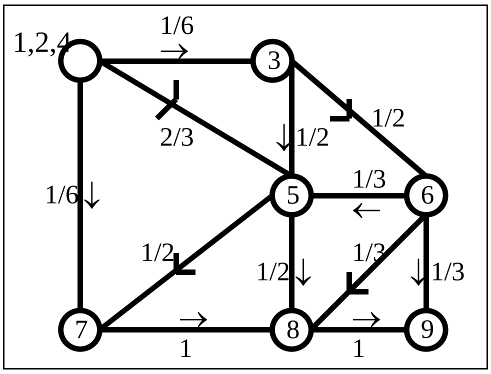


Şekil 4. 1, 2 tepelerinin büzülmesi. X_1 = 1, 2, 4 tepelerinin büzülmesi sonucu oluşan grafta olasılıklar

$p_{1,2,3}$=1/2.1/3=1/6

$p_{1,2,5}$=1/2.1/3=1/6

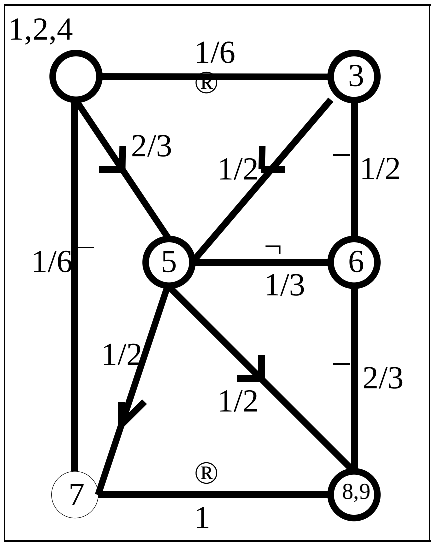
$p_{1,2,4}$=1/2+1/2.1/3=2/3



Şekil 5. X_1 = 1, 2, 4 tepelerinin büzülmesi sonucu oluşan grafta olasılıklar

$p_{1,2,4,3}$=1/6 $p_{1,2,4,5}$=1/6+2/3.3/4=2/3

$p_{1,2,4,7}$=2/3.1/4=1/6

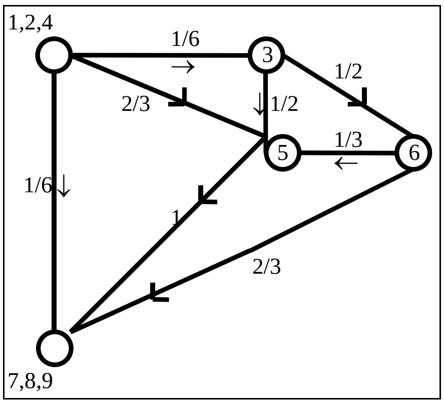


Şekil 6. 1, 2, 4 ve 8, 9 tepelerinin büzülmesi sonucu oluşan grafta olasılıklar

$p_{5,8,9}$=1/2.1=1/2

$p_{6,8,9}$=1/3+1/3.1=2/3

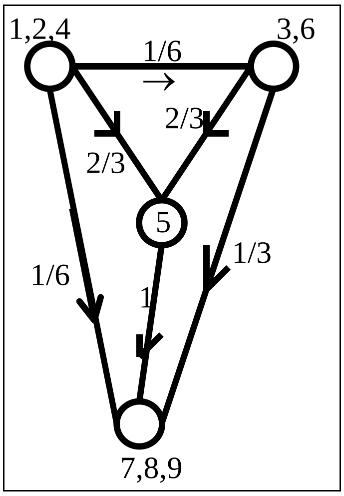
$p_{7,8,9}$=1



Şekil 7. X_1=1,2,4 ve X_2=7,8,9 tepelerinin büzülmesi sonucu oluşan grafta olasılıklar

$p_{5,7,8,9}$ =1/2+1/2=1 $p_{6,7,8,9}$=2/3

$p_{1,2,4,7,8,9}$=1/6

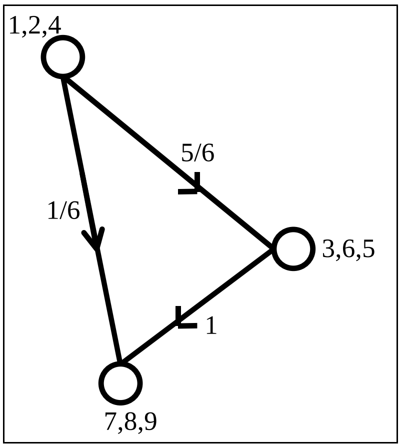


Şekil 8. 1, 2, 4 ve 7, 8, 9 ve 3, 6 tepelerinin büzülmesi sonucu oluşan grafta olasılıklar

$p_{1,2,4,3,6}$ = 1/6

$p_{3,6,5}$ = 1/2.1/3+1/2=2/3

$p_{3,6,7,8,9}$ = 1/2.2/3=1/3



Şekil 9. Tepeleri X_1=1, 2, 4 X_2 =7,8,9 ve X_3 =3,6,5 kümelerine ayrılmış, indirgenmiş grafta olasılıklar.

$p_{1,2,4,3,6,5}$ = 1/6+2/3=5/6

$p_{3,6,5,7,8,9}$ = 2/3.1+1/3=1

5. SONUÇ VE YORUM

Bir sonlu Markov zincirinin durum uzayının boyutunun büyük olması halinde zincir üzerinde yapılacak işlemler, karşı gelen grafın katları üzerinde yapılıp bunlardan elde edilen sonuçlar en son elde edilen indirgenmiş grafta yerleştirilirse genel sonuç buradan kolaylıkla bulunur.

Matris oyunları teorisinde, ödemeler matrisinin elemanları $0 \leq a_{ij} \leq 1$ koşulunu sağlıyorsa doğrusal programlama modeli yazıldığında Ax = b doğrusal denklem sistemine varılır. A katsayılar matrisi büyük boyutlu, kare, simetrik olmayan bir matris ise ve elemanları $0 \leq a_{ij} \leq 1$ koşullarını sağlıyorsa bu denklem sistemi ayrıtlarına olasılıklar yerleştirilmiş bir grafla ifade edilir.Böyle bir denklem sisteminin çözümünde sistemin tümünü çözmek yerine, karşı gelen grafın katları ile gösterilen alt denklem sistemlerini çözmek ve oluşabilen hataları sayısal hesaplama yöntemleri ile azaltmak uygulanan bir yöntemdir (Dündar ve Dündar 1998).

Petri Net teorisinde, bir Petri netin güvenilirliği söz konusu olduğunda yine olasılıksal Petri net graflarla karşılaşılır (Peterson 1996). Petri netin yer ve geçiş durumları sayısının büyük olduğu durumlarda ortaya çıkabilecek problemlerde Petri netin tümü yerine; karşı gelen graftan oluşturulmuş katlardan elde edilen çözümlerden sonuca varılır.

Yöntem olasılık teorisinde pek çok probleme uygulanabilmektedir. Örneğin, bir hipermarketi sabah sekizden akşam yediye kadar ziyaret eden müşterilerin sayısı bir gün boyu gözleniyor ve her müşteriye girişte yaşı soruluyor.Elde edilen verilere göre saatler bir grafın tepeleri alınır , herhangi iki saatten öncekinden sonrakine bir ayrıt çizilir ve belli bir saatlik peryotta hipermarketi gezip çıkan müşteri sayısının günlük toplam müşteri sayısına oranı da ayrıtların ağırlıkları olarak işaretlenirse olay bir grafla ifade edilir. Bu hipermarkette gün boyu gelen müşterilerden istenen saat aralığında belli bir yaş grubundan olanların beklenen değeri bulunmak istendiğinde çalışmadaki düşünce ile sadece o saat aralığındaki olasılığı hesaplayıp beklenen değer bulunur.

6. KAYNAKLAR

Chen, Z. ve Lai, H.1993:"Collapsible Graphs and Matching"Journal of Graph Theory, Vol.17, No 5.

Chartrand, G. ve Lesniak, L. 1986:"Graphs and Digraphs"Wadsworth and Brooks, California.

Dündar, P. ve Dündar, S. 1998:"Katsayılar Matrisi Simetrik Olmayan Doğrusal Denklem Sisteminin Çözümü İçin Bir Yöntem" XI.Ulusal Matematik Sempozyumu Bildirileri, Süleyman Demirel Üniversitesi, Isparta.

Karpis, G., Grama, A., Gupta, A. ve Kumar, V. 1994. "Introduction To Parallel Computing" The Benjamin Cumming Pub.Comp.

Karpis, G. ve Kumar, V. 1996-a. "Parallel Multilevel k-way Partitioning Scheme For Irregular Graphs" Supercomputing .

Karpis, G. ve Kumar, V. 1996-b. "A Parallel Algorithm For Multilevel Graph Partitioning And Sparce Matrix Ordering" International Parallel Processing Symposium.

Kemeny, J. ve Snell, J. L. 1965. "Finite Markov Chains" Van Nostrand Comp.

Marton, K. 1993. "On The Shannon Capasity Of Probabilistic Graph"Journal Combin.Theory Ser. B 57, No. 2.

Parzen, E. 1962. "Stochastic Processes" Holden Day.

Peterson, J. L. 1981. "Petri Net Theory and the Modeling of Systems",Prentice-Hall inc;Englewood, University of Texas.