УДК 004.9

ИГРА С «ЛИНИЕЙ ЖИЗНИ». СЛУЧАЙ ПОТОЧЕЧНОЙ ВСТРЕЧИ

В. Д. Ширяев, Е. В. Анощенкова

В статье рассматривается игра преследования с «линией жизни» в квадрате $S=\{(x;y)|-d\leq x\leq d,-d\leq y\leq d\}$; приводится решение игры с предположением, что преследуемый игрок (Е) использует кусочно-постоянные стратегии, а преследователь (Р) – стратегии с дискриминацией, при этом строятся сечения выигрывающих множеств игроков Р и Е.

Ключевые слова: игра, «линия жизни», стратегия, дискриминация игрока, зона безопасности, выигрывающее множество, огибающая.

«LIFE LINE» GAME. LINE OF PURSUIT MEETING

V. D. Shiryaev, E. V. Anoshchenkova

The object of the research is a game of pursuit with squared «life line» $S=\{(x;y)|-d\leq x\leq d,-d\leq y\leq d\}$. A solution of the game of pursuit is constructed on the following basis: assume an evader (Player E) uses piecewise constant strategies, whereas a pursuer (Player P) uses discrimination strategies. Under these conditions, sections of winning sets of players P and E are built.

Keywords: game of pursuit, «life line», strategy, discrimination for player, safety zone, winning set, envelope.

Предположим на плоскости задано некоторое множество S. Две точки – преследователь P и преследуемый E, обладая ограниченными по модулю линейными скоростями, перемещаются в множестве S, имея при этом возможность в каждый момент времени изменять направление движения (простое движение). В начальный момент времени игроки находятся во множестве S. Преследуемый E считается пойманным, как только расстояние между ним и преследователем P достигнет значения, меньшего или равного $l\,(l\geq 0)$. Число l называется радиусом встречи, а процесс поимки – l -встречей. Целью игрока P является поимка игрока E до достижения последним «линии жизни» – границы множества S. Игрок E преследует противоположную цель, т. е. стремится достичь «линии жизни» до l -встречи.

Будем рассматривать игры с дискриминацией игрока E, в которых E использует кусочно-постоянные стратегии $v_\sigma \in$ Е, а P использует стратегии с дискриминацией из Р+$(\bar{u})$. Стратегией с дискриминацией (констратегией) игрока P называется любая вектор-функция

$$u=\{u_1,u_2\}=\begin{Bmatrix} u_1(t,x_1,y_1,x_2,y_2,v), \\ u_2(t,x_1,y_1,x_2,y_2,v) \end{Bmatrix},$$

определенная для всех $t\geq 0, x_1,y_1,x_2,y_2$ и векторов $v=\{v_1,v_2\}$, $v_1^2+v_2^2\leq\beta^2$, а также удовлетворяющая условию $u_1^2+u_2^2\leq\alpha^2$ (Р+ – множество всех констратегий игрока P).

Пусть $z_1(t)$ $(z_2(t))$ траектория игрока $P(E)$ в ситуации $\{u,v_\sigma\}\in$ Р+$\times$ Е, исходящая из начальной точки $z_1^0 \left(z_2^0\right)$, и пусть

$$t_S^E = \inf\left\{t : z_2(t) \,\bar{\in}\, S\right\},$$

$t_P = \min\left\{t : \rho\left(z_1(t), z_2\left(t\right)\right) \le l\right\}$ (если таких t_P не существует, то t_P полагаем равным ∞). Тогда выигрыш игрока E равен:

$$K\left(z_1, z_2, u, v_\sigma\right) = \begin{cases} -1, \ 5A;8 \ \ t_P < t_S^E, t_P < \infty, \\ 0, \ 5A;8 \ \ t_P = t_S^E = \infty, \\ 1, \ 5A;8 \ \ t_P \ge t_S^E, t_S^E < \infty. \end{cases}$$

Определение 1. Выигрывающим множеством $W_P(W_E)$ игрока $P\left(E\right)$ называется множество всех точек $\left\{z_1; z_2\right\} \in R^4$, таких, что

$$\min_{u \in P^+} \max_{v_\sigma \in E} \ K\left(z_1, z_2, u, v_\sigma\right) = -1$$

$$(\max_{v_\sigma \in E} \min_{u \in P^+} \ K\left(z_1, z_2, u, v_\sigma\right) = +1).$$

Таким образом, если преследование начинается из точек z_1, z_2, удовлетворяющих условию $\left\{z_1; z_2\right\} \in W$, то игрок P всегда может поймать игрока E до достижения им «линии жизни». Аналогично, если преследование начинается из точек, таких, что $\left\{z_1; z_2\right\} \in W_E$, то игрок E может достичь «линии жизни» до момента l -встречи независимо от действий преследователя.

Определение 2. Сечение $W_P(z_2^0)$ выигрывающего множества $W_P \subset R^4$ игрока P плоскостью $z_2 = z_2^0$ – зоной встречи в позиции z_2^0, а сечение $W_E(z_1^0)$ выигрывающего множества $W_E \subset R^4$ плоскостью $z_1 = z_1^0$ называется зоной убегания в позиции z_1^0.

Зоны встречи и убегания, являющиеся множествами на плоскости, дают более наглядное представление о возможностях игроков, чем выигрывающие множества в четырехмерном пространстве.

Пусть $\bar{u}$ – некоторая фиксированная стратегия игрока P, обладающая свойством в любой ситуации $\left\{\bar{u}, v_\sigma\right\} \in$ Р+ × Е обеспечивать l -встречу с игроком E во всей плоскости, если в момент времени $t = 0$ игроки находятся в точках $z_1^0 = \left(x_{P^0}; y_{P^0}\right)$, $z_2^0 = \left(x_{E^0}; y_{E^0}\right)$.

Обозначим через $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$ множество всевозможных положений игрока E в момент l -встречи в ситуации $\left\{\bar{u}, v_\sigma\right\}$ для различных $v_\sigma \in$ Е (местоположение игрока E в момент l -встречи называется «точкой встречи»). Очевидно, что если множество $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$ имеет непустое пересечение с дополнением множества S, то игрок P, используя стратегию $\bar{u}$, не может гарантировать l -встречи с игроком E в множестве S.

Определим структуру множества $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$, с тем чтобы получить уравнения границ зоны встречи и зоны убегания. Имея явное выражение для границ множества $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$ и зная границу множества S, можно геометрически достаточно просто построить границу выигрывающего множества игрока E в позиции $P^0 = z_1^0$ как множество точек $z_2 \in S$, для которых граница множества $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$ касается границы множества S. Аналогично, имея явное выражение для границы множества $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$ и зная границу множества S, можно геометрически построить границу выигрывающего множества игрока P в позиции $E^0 = z_2^0$ как множества точек $z_1 \in S$, для которых граница множества $C_{\bar{u}}\left(z_1^0, z_2^0\right)$ касается границы множества S.

Приведем решение игры в случае поточечной поимки $\left(l = 0\right)$ в предположении, что игроки движутся с максимальной скоростью. Ясно, что игроки P и E, преследующие противоположные цели, должны использовать все свои возможности, в частности, они должны двигаться с максимальной скоростью. В этом случае уравнения движения имеют следующий вид:

$$\dot{x}_1 = u_1, \quad \dot{y}_1 = u_2, \quad u_1^2 + u_2^2 = \alpha^2,$$

$$\dot{x}_2 = v_1, \quad \dot{y}_2 = v_2, \quad v_1^2 + v_2^2 = \beta^2.$$

Будем считать, что скорость преследователя больше скорости убегающего $(\alpha > \beta)$, в противном случае всегда выигрывает игрок E.

Известно, что если E выбирает любое прямолинейное движение, то при параллельном сближении множество точек встречи являются окружностью Аполлония – границей круга $\rho(z, z_1^0)w \geq \rho(z, z_2^0)$, $w = \beta / \alpha$, [1]:

$$S_0 = \left\{ z \,\middle|\, \rho(z, z_1^0)\, w = \rho(z, z_2^0) \right\}.$$

Пусть K – «линия жизни». Рассмотрим семейство окружностей

$$\left\{ C(a, \rho(z_1^0, a)\, w) \right\}_{a \in K} \qquad (1)$$

с центрами на «линии жизни» и радиусами. Огибающей (или расширенной огибающей) семейства (1) будем называть кривую, которая в каждой своей точке касается хотя бы одной окружности C(a,p,(z_1^0,a)w), $a \in K$.

Теорема [1]. Если граница $F(z_1^0)$ зоны убегания $W_E(z_1^0)$ является гладкой кривой, то она совпадает с частью огибающей семейства (1).

Пусть «линия жизни» является гладкой и задана параметрически

$$K : x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [t_1, t_2], \qquad (1)$$

тогда огибающая семейства определяется системой уравнений:

$$\begin{cases} F(x,y,t) = (x - x(t))^2 + (y - y(t))^2 - w^2[(x_1^0 - x(t))^2 + (y_1^0 - y(t))^2] = 0, \\ -\dfrac{1}{2}F_t(x,y,t) = \dfrac{dx(t)}{dt}(x - x(t)) + \dfrac{dy(t)}{dt}(y - y(t)) + w^2[\dfrac{dx(t)}{dt}(x(t) - x_1^0) + \\ \qquad + \dfrac{dy(t)}{dt}(y(t) - y_1^0)] = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Пусть K – прямая, $z_1^0 = \{0; b\}$,

$$K : x(t) = t,\ y(t) = 0, -\infty < t < +\infty.$$

Система (2) имеет вид

$$\begin{cases} (x - t)^2 + y^2 = w^2(t^2 + b^2), \\ -(x + t) = w^2 t. \end{cases}$$

Исключим параметр t $(t = x / (1 - w^2))$:

$$\left(x - \frac{x}{1 - w^2} \right)^2 + y^2 = w^2 \left(\frac{x^2}{\left(1 - w^2\right)^2} + b^2 \right),$$

$$\frac{w^4}{\left(1 - w^2\right)^2} x^2 + y^2 = \frac{w^2}{\left(1 - w^2\right)^2} x^2 + w^2 b^2,$$

$$y^2 - \frac{w^2}{1 - w^2} x^2 = w^2 b^2,$$

$$\frac{y^2}{w^2 b^2} - \frac{x^2}{\left(1 - w^2\right) b^2} = 1.$$

Итак, $$\frac{y^2}{w^2 b^2} - \frac{x^2}{\left(1 - w^2\right) b^2} = 1. \qquad (3)$$

Огибающая (3) является гиперболой при $b \neq 0$ и вырождается в пару прямых при $b = 0$ (рис.1). Огибающая (3) совпадает с границей зоны убегания $W_E(z_1^0, K)$.

Направленная вверх ветвь гиперболы (3) совпадает с границей зоны убегания $W_E(z_1^0, CS)$ в игре с «линией жизни» в полуплоскости $S(-\infty < x < +\infty,\ y \geq 0)$.

Заметим, что абсцисса точки касания окружности Аполлония для начальных положений $z_1^0 = \{0; b\}$, $z_2 = \{x_E; y_E\}$ равна $x = \dfrac{x_E}{1-w^2}$.

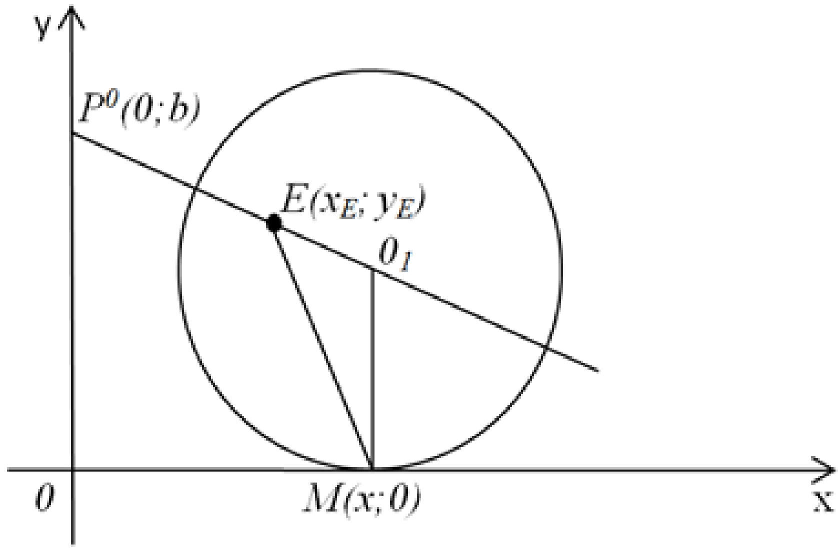

Рис. 1.

Аналогично можно показать, что при поточечной поимке зона встречи $W_P(z_2^0)$ $\left(z_2^0 = \{0; b\}\right)$ совпадает с областью, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{\dfrac{1-w^2}{w^2}b^2} + \frac{y^2}{\dfrac{1}{w^2}b^2} = 1.$$

Внутренняя часть эллипса, лежащая в полуплоскости S, является выигрывающим множеством игрока P в позиции E^0 (рис. 2). Заметим, что в данном случае абсцисса точки касания окружности Аполлония для начальных положений $z_1 = \{x_P; y_P\}$, $z_2^0 = \{0; b\}$ $\quad x = -\dfrac{w^2}{1-w^2}x_P$.

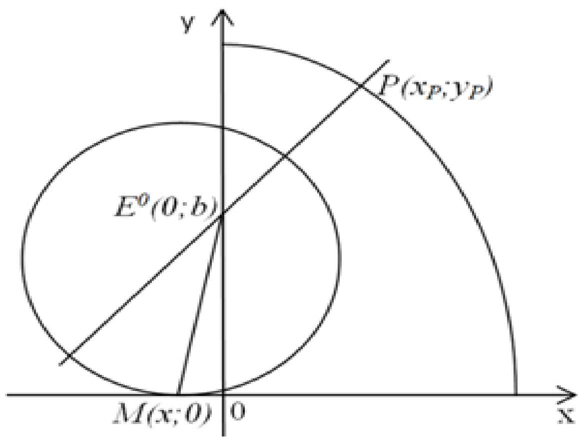

Рис. 2.

Рассмотрим случай, когда S является квадратом

$$\left(S=\left\{(x;y)\,\middle|\,-d\le x\le d,-d\le y\le d\right\}\right).$$

1) $S=\left\{(x;y)\,\middle|\,-\infty\le x\le+\infty,0\le y\le d\right\}$.

В этом случае K – прямая, $Z_1^0=\{0;0\}$,

$$K: x(t)=t,\ y(t)=d,\ -\infty<t<+\infty.$$

Система (2) имеет вид

$$\begin{cases}(x-t)^2+(y-d)^2=w^2(t^2+d^2),\\ -(x+t)=w^2t.\end{cases}$$

Исключив параметр t $(t=x/(1-w^2))$, получим

$$\frac{(y-d)^2}{w^2d^2}-\frac{x^2}{\left(1-w^2\right)d^2}=1. \qquad (4)$$

Направленная вверх ветвь гиперболы (4) совпадает с границей зоны убегания $W_E(z_1^0,CS)$ в игре с «линией жизни» в области $S(-\infty<x<+\infty,0\le y\le d)$.

2) $S=\left\{(x;y)\,\middle|\,-\infty\le x\le+\infty,-d\le y\le 0\right\}$.

Граница выигрывающего множества игрока E определяется аналогично и имеет вид

$$\frac{(y+d)^2}{w^2d^2}-\frac{x^2}{\left(1-w^2\right)d^2}=1.$$

Объединяя оба рассмотренных случая, получаем решение поставленной задачи в полосе $-\infty<x<+\infty,-d\le y\le d$. Граница выигрывающего множества игрока E в этом случае имеет вид

$$\frac{(y\pm d)^2}{w^2d^2}-\frac{x^2}{\left(1-w^2\right)d^2}=1. \qquad (5)$$

Вид границы выигрывающего множества игрока E при d=2, w=1/2 приведен на рис. 3.

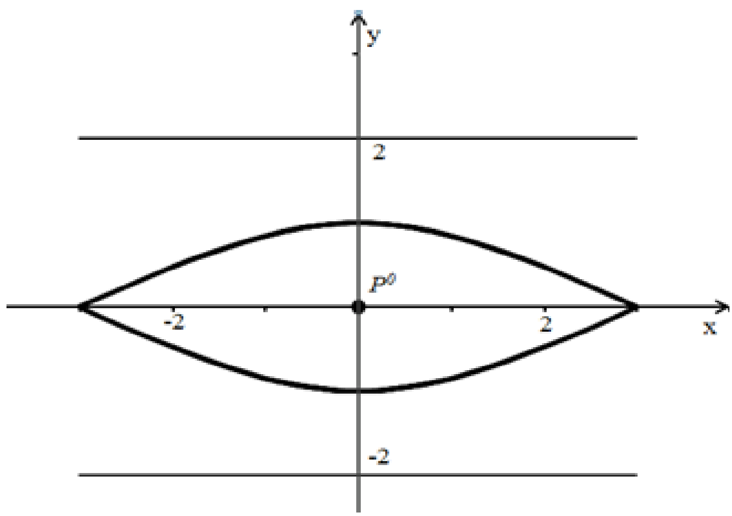

Рис. 3.

3) Рассмотрим случай, когда «линией жизни» игрока E является прямая $x=d$, т. е. $S=\left\{(x;y)\,\middle|\,0\le x\le d,-\infty<y<+\infty\right\}$.

В этом случае K – прямая, $z_1^0=\{0;0\}$

$$K: x(t)=d,\ y(t)=t,\ -\infty<t<+\infty.$$

Система (2) имеет вид

$$\begin{cases} d^2+(y-t)^2 = w^2(d^2+t^2), \\ -(y+t) = w^2 t. \end{cases}$$

Исключив параметр t $(t = x/(1-w^2))$, получим

$$\frac{(x-d)^2}{w^2d^2} - \frac{y^2}{\left(1-w^2\right)d^2} = 1. \qquad (6)$$

Часть полуплоскости S, расположенная правее линии (6), является выигрывающим множеством игрока E.

4) $S = \left\{(x;y) \mid -d \le x \le 0, -\infty < y < +\infty\right\}$.

Граница выигрывающего множества игрока E определяется аналогично и имеет вид

$$\frac{(x+d)^2}{w^2d^2} - \frac{y^2}{\left(1-w^2\right)d^2} = 1.$$

Объединяя оба рассмотренных случая, получим решение поставленной нами задачи в рамках полосы $-d \le x \le d, -\infty < y < +\infty$. Граница выигрывающего множества игрока E в этом случае имеет вид

$$\frac{(x\pm d)^2}{w^2d^2} - \frac{y^2}{\left(1-w^2\right)d^2} = 1. \qquad (7)$$

Вид границы выигрывающего множества игрока E при $d = 2$, $w = 1/2$ приведен на рис.4.

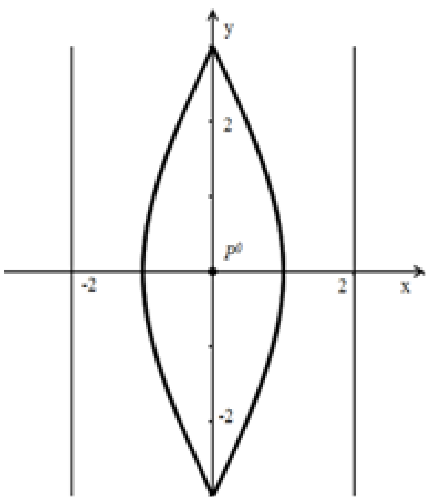

Рис. 4.

Далее решаем игру в квадрате. Граница выигрывающего множества игрока E в случае $S = \left\{(x;y) \mid -d \le x \le d, -d \le y \le d\right\}$ получается как граница пересечения выигрывающих множеств игрока E, определяемых соотношениями (5) и (7).

Вид этой границы при $d = 2$, $w = 1/2$ приведен на рис. 5.

Аналогично определяется граница выигрывающего множества игрока P ($z_2^0 = \{0;0\}$).

1) $S = \left\{(x;y) \mid -\infty < x < +\infty, 0 \le y \le d\right\}$.

Зона встречи $W_P(z_2^0)$ совпадает с областью, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{\dfrac{1-w^2}{w^2}d^2} + \frac{(y-d)^2}{\dfrac{1}{w^2}d^2} = 1.$$

2) $S = \left\{(x;y) \mid -\infty < x < +\infty, -d \le y \le 0\right\}$.

Зона встречи $W_P(z_2^0)$ совпадает с областью, ограниченной эллипсом

$$\frac{x^2}{\frac{1-w^2}{w^2}d^2}+\frac{(y+d)^2}{\frac{1}{w^2}d^2}=1.$$

Объединяя оба случая, получаем решение поставленной задачи в полосе $-\infty < x < +\infty, -d \le y \le d$. Граница выигрывающего множества игрока P в этом случае имеет вид:

$$\frac{x^2}{\frac{1-w^2}{w^2}d^2}+\frac{(y\pm d)^2}{\frac{1}{w^2}d^2}=1. \tag{8}$$

Вид границы выигрывающего множества игрока P при $d=2$, $w=1/2$ приведен на рис. 6.

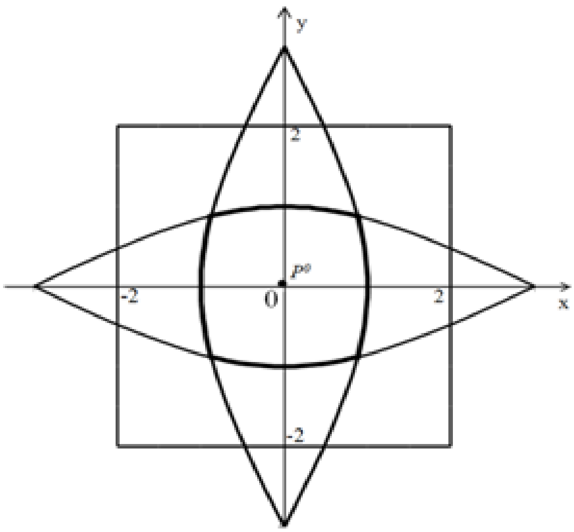

Рис. 5.

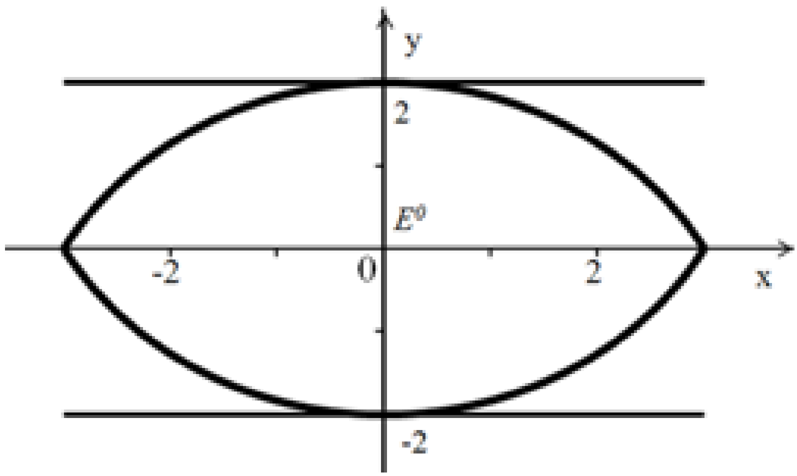

Рис. 6

3) $S=\{(x;y)\mid 0\le x\le d, -\infty<y<+\infty\}$.

Зона встречи $W_P(z_2^0)$ совпадает с областью, ограниченной эллипсом

$$\frac{(x-d)^2}{\frac{1}{w^2}d^2}+\frac{y^2}{\frac{1-w^2}{w^2}d^2}=1.$$

4) $S=\{(x;y)\mid -d\le x\le 0, -\infty<y<+\infty\}$.

Зона встречи $W_P(z_2^0)$ совпадает с областью, ограниченной эллипсом

$$\frac{(x+d)^2}{\frac{1}{w^2}d^2}+\frac{y^2}{\frac{1-w^2}{w^2}d^2}=1.$$

Объединяя оба случая получаем решение поставленной задачи в полосе $-d\le x\le d, -\infty<y<+\infty$. Граница выигрывающего множества игрока P в этом случае имеет следующий вид:

$$\frac{(x\pm d)^2}{\frac{1}{w^2}d^2}+\frac{y^2}{\frac{1-w^2}{w^2}d^2}=1. \qquad (9)$$

Вид границы выигрывающего множества игрока P при $d=2$, $w=1/2$ приведен на рис.7.

Далее решаем игру в квадрате. Граница выигрывающего множества игрока P в случае $S=\{(x;y)\mid -d\le x\le d, -d\le y\le d\}$ получается как граница объединения выигрывающих множеств игрока P, определяемых соотношениями (8) и (9).

Вид этой границы при $d=2$, $w=1/2$ приведен на рис. 8.

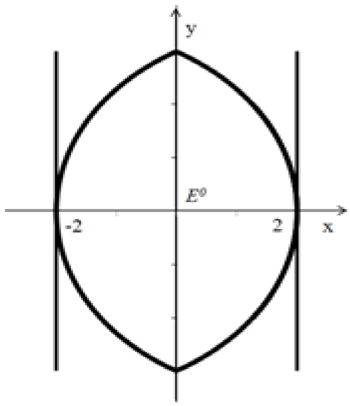

Рис. 7

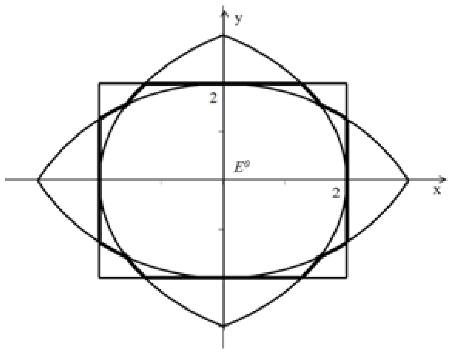

Рис. 8

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. **Петросян, Л. А.** Геометрия простого преследования / Л. А. Петросян, Г. В. Томский. – Новосибирск : Наука, 1983. – 144 с.

Поступила 19.12.2013 г.

Об авторах:
Ширяев Виктор Дмитриевич, профессор кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева» (г. Саранск, Россия), shiryaevvd@mail.ru
Анощенкова Екатерина Васильевна, преподаватель кафедры фундаментальной информатики факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева» (г. Саранск, Россия), anoshchenkovaev@mail.ru

Для цитирования: Ширяев, В. Д. Игра с «линией жизни» : Случай поточной встречи / В. Д. Ширяев, Е. В. Анощенкова // Вестник Мордовского университета. – 2014. – № 1. – С.139–147.

REFERENCES

1. Petrosyan L. A., Tomsky G. V. Geometrija prostogo presledovanija [Geometry of simple prosecution]. Novosibirsk, Science Publ., 1983, 144 p.

About the authors:
Shiryaev Victor Dmitriyevich, Professor, Department of Fundamental Informatics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Ogarev Mordovia State University (Saransk, Russia), Kandidat Nauk (PhD) degree holder in Physical and Mathematical sciences, shiryaevvd@mail.ru
Anoshchenkova Ekaterina Vasilyevna, lecturer, Department of Fundamental Informatics, Faculty of Mathematics and Information Technologies Ogarev Mordovia State University (Saransk, Russia), anoshchenkovaev@mail.ru

For citation: Shirjaev V. D., Anoshchenkova E. V. Igra s «liniej zhizni» : Sluchaj potochnoj vstrechi [«Life Line» Game. Line Of Pursuit Meeting]. *Vestnik Mordovskogo Universiteta* – Mordovia University Bulletin. 2014, no. 1, pp. 139 – 147.