Published in the Russian Federation
European Researcher
Has been issued since 2010.
ISSN 2219-8229
E-ISSN 2224-0136
Vol. 76, No. 6-1, pp. 1019-1027, 2014

DOI: 10.13187/issn.2219-8229
www.erjournal.ru

UDC 519.212.2

Limit Distributions of the Maximum Filling of Cells in One Allocation Scheme

[1] Elena V. Khvorostyanskaya
[2] Yury L. Pavlov

[1] Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Russian Federation
11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910
PhD (Physics and Mathematics)
E-mail: cher@krc.karelia.ru
[2] Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Russian Federation
11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910
Dr (Physics and Mathematics), Professor
E-mail: pavlov@krc.karelia.ru

Abstract. This article examines a model for allocating particles to N different cells, wherein the chance quantities $\xi_1, \ldots, \xi_N$, which are equal to the number of particles in cells, are independent and have a Poisson distribution. The author obtains the limit distributions of the maximum filling of cells for the subset of realizations of such a scheme which satisfy the condition $\xi_1+\ldots+\xi_N \le n$, at $N\to\infty$.

Keywords: allocating particles to cells; limit distribution; maximum filling of cells.

Введение. В работе [1] рассматривалась следующая схема размещения частиц по ячейкам. Предположим, что при размещении частиц в N ячеек с номерами $1,\ldots,N$ величины $\xi_1,\ldots,\xi_N$, равные числу частиц в соответствующих ячейках, независимы и имеют распределение Пуассона:

$$p_k = \mathrm{P}\{\xi_i = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, \ldots, N, \quad \lambda > 0.$$

Из бесконечного числа всех возможных реализаций такой схемы выделим подмножество H, в котором выполнено условие $\xi_1+\ldots+\xi_N \le n$, и будем считать, что вероятностная мера на H индуцируется совместным распределением $\xi_1,\ldots,\xi_N$. Поскольку для случайных величин $\eta_1,\ldots,\eta_N$, равных заполнениям ячеек в H, справедливо равенство

$$\mathbf{P}\{\eta_1 = k_1,\ldots,\eta_N = k_N\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k_1,\ldots,\xi_N = k_N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N \le n\}, \qquad (1)$$

такая модель является частным случаем схемы размещения не более чем n частиц в N различных ячеек, рассмотренной в [2,3] и основанной на идеях обобщенной схемы размещения [4]. Так же, как и для обобщенной схемы размещения, основными характеристиками описанной модели являются число ячеек μ_r, содержащих ровно r частиц, и члены вариационного ряда $\eta_{(1)},\ldots, \eta_{(N)}$, полученного расположением случайных величин

$\eta_1,\ldots,\eta_N$ в неубывающем порядке, т.е $\eta_{(1)}$, $\eta_{(N)}$ – минимальное и максимальное заполнения ячеек, соответственно. Многочисленные примеры исследования поведения таких характеристик в различных задачах, сводящихся к обобщенной схеме размещения, можно найти в [4 – 8]. Нетрудно понять, что эти на примеры можно распространить и результаты, изложенные в [1 – 3] и доказанные ниже в данной статье. В [1] при $N\to\infty$ получены предельные теоремы для μ_r в большинстве зон изменения параметров n, r и λ. В настоящей работе изучается предельное поведение максимального заполнения ячейки $\eta_{(N)}$ при $N\to\infty$.

Результаты. Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $n,N\to\infty$, $\lambda N\to\infty$, $\lambda^3/N\to 0$, $(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2}\geq -C>-\infty$, r выбрано так, что $Np_{r-1}\to\infty$, $Np_r\to\alpha$, где α – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}=r-1\}\to e^{-\alpha},\quad \mathrm{P}\{\eta_{(N)}=r\}\to 1-e^{-\alpha}.$$

Теорема 2. Пусть $n,N\to\infty$, $\lambda N\to\infty$, $\lambda^3/N\to 0$, $(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2}\to-\infty$, $(n-\lambda N)N^{-2/3}\lambda^{-1/2}\to 0$, $r\geq 3$ выбрано так, что $(n/N-\lambda)^2 r/\lambda\to 0$, $Np_{r-1}\to\infty$, $Np_r\to\alpha$, где α – некоторая неотрицательная постоянная. Тогда

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}=r-1\}=\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}\left(1+\left(1+\frac{nr}{\lambda N}-r\right)^2\right)\right\}+o(1),$$

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}=r\}=1-\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}\left(1+\left(1+\frac{nr}{\lambda N}-r\right)^2\right)\right\}+o(1).$$

Теорема 3. Пусть n, $N\to\infty$, $\lambda/\ln N\to x$, r выбрано так, что $r>\lambda$ и $Np_r\to\alpha$, где x, α – некоторые положительные постоянные, и пусть $(n-\lambda N)N^{-2/3}\lambda^{-1/2}\to 0$ при $(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2}\to-\infty$. Тогда

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}\leq r+k\}\to\exp\left\{-\frac{\alpha\gamma^{k+1}}{1-\gamma}\right\},$$

где k – любое фиксированное целое число, γ – корень уравнения $\gamma+x(\ln\gamma-\gamma+1)=0$ в интервале $0<\gamma<1$.

Теорема 4. Пусть n, $N\to\infty$, $\lambda^3/N\to 0$, $\lambda/\ln N\to\infty$ и пусть $(n-\lambda N)N^{-2/3}\lambda^{-1/2}\to 0$ при $(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2}\to-\infty$. Тогда

$$\mathrm{P}\left\{\frac{\eta_{(N)}-\lambda-\lambda\, u\left(\lambda^{-1}(\ln N-(\ln\ln N)/2)\right)}{\sqrt{\lambda/2\ln N}}+\frac{\ln 4\pi}{2}\leq z\right\}\to e^{-e^{-z}},$$

где $u(w)$ – положительная функция, заданная в интервале $0<w<\infty$ уравнением $-u+(1+u)\ln(1+u)=w$.

Теорема 5. Пусть $N\to\infty$, n фиксировано. Тогда

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}=0\}=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda N)^k}{k!}\right)^{-1},\quad \mathrm{P}\{\eta_{(N)}=1\}=1-\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(\lambda N)^k}{k!}\right)^{-1}+o(1).$$

Теорема 6. Пусть n, $N\to\infty$, $\lambda N\leq C<\infty$. Тогда

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}=0\}=e^{-\lambda N}+o(1),\quad \mathrm{P}\{\eta_{(N)}=1\}=1-e^{-\lambda N}+o(1).$$

Замечание 1. Нетрудно видеть, что в теоремах 1, 2 из соотношений $Np_{r-1}\to\infty$, $Np_r=Np_{r-1}\lambda/r\to\alpha$ следует, что

$$\lambda/r\to 0. \qquad (2)$$

Очевидно, что $\lambda/\ln N\to 0$ при $0<\lambda\leq C_1<\infty$, а если $\lambda\to\infty$, то, как легко видеть из (2), $r\to\infty$ и с помощью (1) и формулы Стирлинга находим, что

$$\ln Np_r = r\left(\frac{\lambda}{r}\frac{\ln N}{\lambda} + \ln\frac{\lambda}{r} - \frac{\lambda}{r} - \frac{\ln\sqrt{2\pi}}{r} - \frac{\ln r}{2r} + 1\right). \qquad (3)$$

Поскольку при $\alpha > 0$ справедливо неравенство $|\ln Np_r| \le C_2 < \infty$, из (2), (3) получаем, что и в этом случае $\lambda/\ln N \to 0$. Если же $\alpha = 0$, то имеет место соотношение $\ln Np_r \to -\infty$, которое выполнено, как легко видеть с учетом (2), (3), при $\lambda/\ln N \ge C_3 > 0$ и, в некоторых случаях, при $\lambda/\ln N \to 0$.

Замечание 2. Для нашей модели теоремы 1–5 охватывают более широкую область изменения параметров в сравнении с теоремами 5–7 работы [3]. В частности, случай, когда параметр λ распределения случайных величин $\xi_1,\dots,\xi_N$ стремится к бесконечности, в работе [3] не рассматривался.

Вспомогательные утверждения. Воспользуемся равенствами [3]:

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = 0\} = \frac{(1-P_0)^N}{\mathbf{P}\{\zeta_N \le n\}}, \quad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} \le r\} = (1-P_r)^N \frac{\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} \le n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N \le n\}}, \quad r = 1,2,\dots, \qquad (4)$$

где

$$P_r = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}, \quad \zeta_N = \xi_1 + \dots + \xi_N, \quad \zeta_N^{(r)} = \xi_1^{(r)} + \dots + \xi_N^{(r)},$$

а случайные величины $\xi_1^{(r)},\dots,\xi_N^{(r)}$ независимы и для $k = 0,1,2,\dots$

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \le r\}, \quad i = 1,\dots,N.$$

Согласно (4) для получения предельного распределения $\eta_{(N)}$ достаточно знать слабую сходимость величин ζ_N, $\zeta_N^{(r)}$ и поведение NP_r при $N \to \infty$.

Обозначим $m_r = \mathbf{E}\xi_1^{(r)}$, $\sigma_r^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(r)}$. Легко показать, что

$$m_r = \lambda\left(1 - \frac{p_r}{1-P_r}\right), \quad \sigma_r^2 = \lambda\left(1 - \frac{(r+1-\lambda)p_r}{1-P_r} - \frac{\lambda p_r^2}{(1-P_r)^2}\right). \qquad (5)$$

Лемма 1. Пусть $N \to \infty$, $\lambda N \to \infty$, $\lambda^3/N \to 0$, $r \ge 1$. Тогда распределение $\left(\zeta_N^{(r)} - Nm_r\right)/\sigma_r\sqrt{N}$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство. Обозначим через $\varphi_r(t)$, $\psi_r(t)$ характеристические функции случайных величин $\xi_1^{(r)}$ и $\left(\zeta_N^{(r)} - Nm_r\right)/\sigma_r\sqrt{N}$, соответственно. С помощью формулы Тейлора находим, что при $\lambda N \to \infty$ для любого фиксированного t справедливо равенство

$$\ln\psi_r(t) = -\frac{itNm_r}{\sigma_r\sqrt{N}} + N\ln\varphi_r\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)$$

$$= -\frac{itNm_r}{\sigma_r\sqrt{N}} + N\ln\left(1 + \frac{itm_r}{\sigma_r\sqrt{N}} - \frac{\sigma_r^2 + m_r^2}{2\sigma_r^2 N}t^2 + \frac{\varphi_r'''(\delta)t^3}{6\sigma_r^3 N^{3/2}}\right),$$

где $\left|\varphi_r'''(\delta)\right| \le \mathbf{E}\left(\xi_1^{(r)}\right)^3$. Используя эти соотношения, нетрудно показать, что при выполнении условий леммы

$$\ln\psi_r(t) \to -t^2/2.$$

Отсюда по теореме непрерывности получаем утверждение леммы.

В [1] доказано следующее утверждение.

Лемма 2. Если $N \to \infty$ и $\lambda N \to \infty$, то распределение $\left(\zeta_N - \lambda N\right)/\sqrt{\lambda N}$ слабо сходится к стандартному нормальному закону.

Доказательство теоремы 1. Из условий теоремы следует, что $r \geq 2$ при $\lambda \to 0$ и $r \to \infty$ при $\lambda > 0$. Аналогично доказательству леммы 2.6.2. [9], с помощью (1) и (2) можно показать, что

$$NP_r \to 0, \quad NP_{r-1} \to \alpha, \quad NP_{r-2} \to \infty. \qquad (6)$$

Пусть $r \geq 3$ и j равно одному из чисел $r,\ r-1,\ r-2$. Из лемм 1, 2 получаем равенство

$$\frac{\mathrm{P}\left\{\zeta_N^{(j)} \leq n\right\}}{\mathrm{P}\left\{\zeta_N \leq n\right\}} = \frac{\int_{-\infty}^{x_j} e^{-z^2/2} dz}{\int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2} dz}\left(1 + o(1)\right), \qquad (7)$$

где

$$x_j = \frac{n - Nm_j}{\sigma_j \sqrt{N}}, \quad y = \frac{n - \lambda N}{\sqrt{\lambda N}}.$$

Учитывая (5), (6), легко проверить, что

$$x_j = \left(y + \frac{p_j \sqrt{\lambda N}}{1 - P_j}\right)\left(1 + \frac{p_j\left(j + 1 - \lambda\right)}{2} + o\left(p_j\left(j + \lambda\right)\right)\right). \qquad (8)$$

Используя (1), (2) и формулу Стирлинга, находим, что

$$rp_{r-2} \leq C_4\left(\lambda e/r\right)^{r-5/2}\sqrt{\lambda}e^{-\lambda} \to 0,$$

где символы $C_4, C_5, \ldots$ означают некоторые положительные постоянные.

С помощью этого соотношения и (1), (2), (6) получаем, что

$$p_{r-2}\left(r - 2 + \lambda\right) = rp_{r-2}\left(1 - \frac{2}{r} + \frac{\lambda}{r}\right) \to 0,$$

$$p_{r-1}\left(r - 1 + \lambda\right) = rp_{r-2}\frac{\lambda}{r-1}\left(1 - \frac{1}{r} + \frac{\lambda}{r}\right) \to 0,$$

$$p_r\left(r + \lambda\right) = rp_{r-2}\frac{\lambda^2}{r\left(r-1\right)}\left(1 + \frac{\lambda}{r}\right) \to 0,$$

(9)

$$\frac{\sqrt{\lambda N}\, p_r}{1 - P_r} = \sqrt{Np_r \lambda\, p_r}\left(1 + o(1)\right) = o(1),$$

$$\frac{\sqrt{\lambda N}\, p_{r-1}}{1 - P_{r-1}} = \sqrt{Np_r\, rp_{r-2}\frac{\lambda}{r-1}}\left(1 + o(1)\right) = o(1),$$

$$\frac{\sqrt{\lambda N}\, p_{r-2}}{1 - P_{r-2}} = \sqrt{Np_r\frac{r\left(r-1\right)\lambda^{r-3}e^{-\lambda}}{\left(r-2\right)!}}\left(1 + o(1)\right) = O(1).$$

Используя (4), (6)–(9), нетрудно показать, что $x_j = y(1 + o(1))$ при $y \to \infty$ и справедливы соотношения

$$\mathrm{P}\left\{\eta_{(N)} \leq r\right\} \to 1, \quad \mathrm{P}\left\{\eta_{(N)} \leq r - 1\right\} \to e^{-\alpha}, \quad \mathrm{P}\left\{\eta_{(N)} \leq r - 2\right\} \to 0. \qquad (10)$$

Если $|y| \leq C_5 < \infty$, то с помощью (7), (8) находим, что $x_r - y \to 0$, $x_{r-1} - y \to 0$, $x_{r-2} - y = O(1)$, и, учитывая теорему о среднем, легко видеть, что

$$\frac{\int_{-\infty}^{x_r} e^{-z^2/2}dz}{\int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}dz} = 1 + o(1), \quad \frac{\int_{-\infty}^{x_{r-1}} e^{-z^2/2}dz}{\int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}dz} = 1 + o(1), \quad \frac{\int_{-\infty}^{x_{r-2}} e^{-z^2/2}dz}{\int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}dz} = O(1).$$

Отсюда и из (4), (6), (7) получаем соотношения (10).

Для $r = 2$ из (1), (4) и леммы 2 находим, что

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)} \le r - 2\} = \frac{e^{-\lambda N}}{\int_{-\infty}^{y} e^{-z^2/2}dz} \to 0,$$

а соотношения $\mathrm{P}\{\eta_{(N)} \le r\} \to 1$, $\mathrm{P}\{\eta_{(N)} \le r - 1\} \to e^{-\alpha}$ доказываются аналогично случаю $r \ge 3$, т.е. выполнено (10). Утверждение теоремы 1 очевидно следует из соотношений (10).

Доказательство теоремы 2. Обозначим

$$q = \frac{n}{N} - \lambda.$$

При выполнении условий теоремы 2 нетрудно проверить, что $r \ge 3$ при $\lambda \to 0$, $r \to \infty$ при $\lambda > 0$ и справедливы соотношения (6), (8), (9), где $j=r$, $r-1$, $r-2$. Поскольку $y=(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2} \to -\infty$, из (8), (9) находим, что $x_j = y(1+o(1)) \to -\infty$. Следовательно, при оценке вероятностей $\mathbf{P}\{\zeta_N \le n\}$, $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(r)} \le n\}$ необходимо использовать уточнения центральной предельной теоремы для больших уклонений. Легко видеть, что для рассматриваемых случайных величин выполнено условие Крамера и $y^3 N^{-1/2} \to 0$, $x_j^3 N^{-1/2} \to 0$. Отсюда и из теоремы 6.1.1 [10] получаем (7).

Поскольку при $a \to \infty$ справедливо равенство

$$\int_{a}^{+\infty} e^{-z^2/2}dz = \frac{e^{-a^2/2}}{a}(1 + o(1)), \qquad (11)$$

с помощью (7)–(9) находим, что

$$\frac{\mathrm{P}\{\zeta_N^{(j)} \le n\}}{\mathrm{P}\{\zeta_N \le n\}} = e^{-\left(x_j^2 - y^2\right)/2}(1 + o(1)), \qquad (12)$$

причем

$$x_r^2 - y^2 = \left(\frac{\alpha q^2 r}{\lambda} + 2\alpha q\right)(1 + o(1)),$$

$$x_{r-1}^2 - y^2 = \left(\alpha\left(\frac{qr}{\lambda}\right)^2 + \frac{2\alpha qr}{\lambda}\right)(1 + o(1)),$$

$$x_{r-2}^2 - y^2 = Np_{r-1}\left(\frac{q^2 r(r-1)}{\lambda^2}(1 + o(1)) + \frac{2q(r-1)}{\lambda}(1 + o(1))\right).$$

Отсюда, из (2), (4), (6), (12) и условия $q^2 r/\lambda \to 0$ получаем, что

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)} \le r\} \to 1,$$

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)} \le r - 1\} = \exp\left\{-\frac{\alpha}{2}\left(1 + \left(\frac{qr}{\lambda} + 1\right)^2\right)\right\}(1 + o(1)),$$

$$\mathrm{P}\left\{\eta_{(N)} \le r-2\right\} = \exp\left\{-NP_{r-2} - \frac{x_{r-2}^2 - y^2}{2}\right\}\left(1+o(1)\right) \to 0,$$

поскольку

$$NP_{r-2} + \frac{x_{r-2}^2 - y^2}{2} \ge Np_{r-1}\left(1 + \frac{(qr)^2}{3\lambda^2} + \frac{2qr}{3\lambda}\right) = \frac{rNp_r}{3\lambda}\left(2 + \left(\frac{qr}{\lambda}+1\right)^2\right) \to \infty.$$

Из этих соотношений следует утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. При выполнении условий теоремы справедлива лемма 2.6.3 [9], согласно которой

$$\frac{\lambda}{r} \to \gamma, \quad NP_{r+k} \to \frac{\alpha\gamma^{k+1}}{1-\gamma} \qquad (13)$$

для любого целого фиксированного k. Используя (5), (13), нетрудно показать, что для $x_j = \left(n - Nm_j\right)/\sigma_j\sqrt{N}$, $j=r+k$, имеет место соотношение (8), где $y=(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2}$,

$$\frac{\sqrt{\lambda N}\,p_{r+k}}{1-P_{r+k}} = \alpha\gamma^k\sqrt{\frac{\lambda}{N}}\left(1+o(1)\right) \to 0,$$

(14)

$$\left(\lambda + r\right)p_{r+k} = \frac{(1+\gamma)\gamma^{k-1}\alpha\lambda}{N}\left(1+o(1)\right) \to 0.$$

Аналогично доказательству теоремы 1, с помощью (8), (14) и лемм 1, 2 можно показать, что при $y \ge -C_6 > -\infty$ для любого целого фиксированного k выполнено соотношение

$$\frac{\mathrm{P}\left\{\zeta_N^{(r+k)} \le n\right\}}{\mathrm{P}\left\{\zeta_N \le n\right\}} = 1 + o(1). \qquad (15)$$

Если $y \to -\infty$, то из (8), (14) следует, что $x_j \to -\infty$. Заметим, что в этом случае $y(\lambda/N)^{1/2} = q \to 0$, поскольку $\lambda/\ln N \to x$, $y^3 N^{-1/2} \to 0$. Используя теорему 6.1.1 [10] для больших уклонений, находим, что справедливо (12), где $j=r+k$ и

$$x_{r+k}^2 - y^2 = 2q\alpha\gamma^k + \alpha^2\gamma^{2k}\frac{\lambda}{N} + o\left(q + \frac{\lambda}{N}\right) \to 0.$$

Следовательно, выполнено (15).

Утверждение теоремы 3 получаем из (4), (13), (15).

Доказательство теоремы 4. Пусть n, $N \to \infty$, $\lambda^3/N \to 0$, $\lambda/\ln N \to \infty$ и

$$r = \lambda + \lambda\, u\left(\frac{\ln N - (\ln\ln N)/2}{\lambda}\right) + \sqrt{\frac{\lambda}{2\ln N}}\left(z - \frac{\ln 4\pi}{2}\right).$$

Согласно лемме 2.6.6 [9] справедливы равенства

$$NP_r = e^{-z} + o(1), \quad p_r = O\left(\frac{1}{N}\sqrt{\frac{\ln N}{\lambda}}\right). \qquad (16)$$

Учитывая (5), (16) и лемму 2.6.5 [9], нетрудно получить соотношение

$$x_r = \left(y + \frac{p_r\sqrt{\lambda N}}{1-P_r}\right)\left(1 + \frac{p_r}{2}\sqrt{\lambda\ln N} + o\left(p_r\sqrt{\lambda\ln N}\right)\right), \qquad (17)$$

где $y=(n-\lambda N)(\lambda N)^{-1/2}$. Используя (16) и леммы 1, 2 при $y \ge -C_7 > -\infty$ легко показать, что

$$\frac{\mathrm{P}\left\{\zeta_N^{(r)} \le n\right\}}{\mathrm{P}\left\{\zeta_N \le n\right\}} \to 1. \qquad (18)$$

Если $y \to -\infty$, то из (16), (17) получаем соотношение $x_r \to -\infty$, а из условий теоремы следует, что $y^3 N^{-1/2} = q^3 N \lambda^{-3/2} \to 0$, $q \to 0$. В этом случае с помощью теоремы 6.1.1 [10] и соотношений (11), (16), (17), находим, что выполнено (12), где $j=r$ и

$$x_r^2 - y^2 = \frac{q^2 N p_r \sqrt{\ln N}}{2\sqrt{\lambda}}\left(1+o(1)\right) + 2qNp_r\left(1+o(1)\right) \to 0,$$

т.е. имеет место (18). Утверждение теоремы 4 очевидно теперь следует из (4), (16), (18).

Доказательство теоремы 5. При выполнении условий теоремы, учитывая (1), находим, что

$$\left(1-P_0\right)^N = e^{-\lambda N}, \quad \mathrm{P}\left\{\zeta_N \le n\right\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda N)^k e^{-\lambda N}}{k!}, \qquad (19)$$

$$\left(1-P_1\right)^N \mathrm{P}\left\{\zeta_N^{(1)} \le n\right\} = \sum_{k=0}^{n} \binom{N}{k} \lambda^k e^{-\lambda N} = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda N)^k e^{-\lambda N}}{k!}\right)\left(1+o(1)\right).$$

Отсюда и из (4) получаем утверждение теоремы 5.

Доказательство теоремы 6. Пусть n, $N \to \infty$, $\lambda N \le C < \infty$. Поскольку

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda N)^k e^{-\lambda N}}{k!} = 1,$$

из (4), (19) следует равенство

$$\mathrm{P}\left\{\eta_{(N)} = 0\right\} = e^{-\lambda N} + o(1).$$

С помощью (1), (4) нетрудно показать, что

$$\mathrm{P}\left\{\eta_{(N)} \le 1\right\} = \frac{\sum_{k=0}^{\min\{n,N\}} \binom{N}{k} \lambda^k}{\sum_{k=0}^{n} (\lambda N)^k / k!}. \qquad (20)$$

Очевидно, что если $N \le n$, то числитель равен $(1+\lambda)^N$, а если $N > n$, то

$$\sum_{k=0}^{\min\{n,N\}} \binom{N}{k} \lambda^k = (1+\lambda)^N - \sum_{k=n+1}^{N} \binom{N}{k} \lambda^k. \qquad (21)$$

Используя формулу Стирлинга, получаем, что если $N-k = O(1)$, то

$$\binom{N}{k} \lambda^k = \left(\frac{e\lambda N}{k}\right)^k \frac{\sqrt{N/k}}{(N-k)!\, e^N}\left(1+o(1)\right)$$

и выполнено соотношение

$$\binom{N}{k} \lambda^k = o\left(\left(e\lambda N/k\right)^k\right), \qquad (22)$$

а при $N-k \to \infty$

$$\binom{N}{k} \lambda^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi k}}\left(\frac{\lambda N}{k}\right)^k \left(1-\frac{k}{N}\right)^{-N+k-1/2} \left(1+o(1)\right). \qquad (23)$$

Легко видеть, что если $k/N \to 0$, то

$$\ln\left(1-\frac{k}{N}\right)^{-N+k-1/2}=(-N+k-1/2)\left(-\frac{k}{N}-\frac{k^2}{2N^2}+O\left(\frac{k^3}{N^3}\right)\right)=k-\frac{k^2}{2N}(1+o(1)),$$

а если $0<\varepsilon\le k/N\le 1$, то

$$(1-k/N)^{-N+k-1/2}\le(1-\varepsilon)^{-(N-k)-1/2}\to 0.$$

Из этих соотношений и (23) получаем, что и при $N-k\to\infty$ справедлива оценка (22). С помощью равенств (21), (22) при $\lambda N\le C<\infty$ из (20) находим, что

$$\mathrm{P}\{\eta_{(N)}\le 1\}=\frac{e^{\lambda N}+o(1)}{\sum_{k=0}^{n}(\lambda N)^k/k!}=1+o(1).$$

Теорема 6 доказана.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 13–01–00009 и Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

Примечания:

1. Хворостянская Е.В. О случайных пуассоновских заполнениях ячеек // Труды Карельского научного центра РАН. Сер. Математическое моделирование и информационные технологии. 2013. №1. С. 112–116.
2. Чупрунов А.Н. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для числа ячеек заданного объема / А.Н. Чупрунов, И. Фазекаш // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 1. С. 140–158.
3. Чупрунов А.Н. Аналог обобщенной схемы размещения. Предельные теоремы для максимального объема ячейки / А.Н. Чупрунов, И. Фазекаш // Дискретная математика. 2012. Т. 24, вып. 3. С. 122–129.
4. Колчин В.Ф. Случайные графы. М.: Физматлит, 2000. 256 с.
5. Павлов Ю.Л. Асимптотическое распределение максимального объема дерева в случайном лесе // Теория вероятностей и ее применения. 1977. Т. 22, вып. 3. С. 523–533.
6. Павлов Ю.Л. Предельные теоремы для числа деревьев заданного объема в случайном лесе // Математический сборник. 1977. Т. 103, вып. 3. С. 392–403.
7. Павлов Ю.Л. Случайные графы Интернет-типа и обобщенная схема размещения / Ю.Л. Павлов, И.А. Чеплюкова // Дискретная математика. 2008. Т. 20, вып. 3. С. 3–18.
8. Павлов Ю.Л. О предельных распределениях степеней вершин в условных Интернет-графах // Дискретная математика. 2009. Т. 21, вып. 3. С. 14–23.
9. Колчин В.Ф. Случайные размещения / В.Ф. Колчин, Б.А. Севастьянов, В.П. Чистяков. М.: Наука, 1976. 159 с.
10. Ибрагимов И.А. Независимые и стационарно связанные величины / И.А. Ибрагимов, Ю.В. Линник. М.: Наука, 1965. 524 с.

References:

1. Khvorostyanskaya E.V. O sluchainykh puassonovskikh zapolneniyakh yacheek // Trudy Karel'skogo nauchnogo tsentra RAN. Ser. Matematicheskoe modelirovanie i informatsionnye tekhnologii. 2013. №1. S. 112–116.
2. Chuprunov A.N. Analog obobshchennoi skhemy razmeshcheniya. Predel'nye teoremy dlya chisla yacheek zadannogo ob"ema / A.N. Chuprunov, I. Fazekash // Diskretnaya matematika. 2012. T. 24, vyp. 1. S. 140–158.
3. Chuprunov A.N. Analog obobshchennoi skhemy razmeshcheniya. Predel'nye teoremy dlya maksimal'nogo ob"ema yacheiki / A.N. Chuprunov, I. Fazekash // Diskretnaya matematika. 2012. T. 24, vyp. 3. S. 122–129.
4. Kolchin V.F. Sluchainye grafy. M.: Fizmatlit, 2000. 256 s.
5. Pavlov Yu.L. Asimptoticheskoe raspredelenie maksimal'nogo ob"ema dereva v sluchainom lese // Teoriya veroyatnostei i ee primeneniya. 1977. T. 22, vyp. 3. S. 523–533.

6. Pavlov Yu.L. Predel'nye teoremy dlya chisla derev'ev zadannogo ob"ema v sluchainom lese // Matematicheskii sbornik. 1977. T. 103, vyp. 3. S. 392–403.

7. Pavlov Yu.L. Sluchainye grafy Internet-tipa i obobshchennaya skhema razmeshcheniya / Yu.L. Pavlov, I.A. Cheplyukova // Diskretnaya matematika. 2008. T. 20, vyp. 3. S. 3–18.

8. Pavlov Yu.L. O predel'nykh raspredeleniyakh stepenei vershin v uslovnykh Internet-grafakh // Diskretnaya matematika. 2009. T. 21, vyp. 3. S. 14–23.

9. Kolchin V.F. Sluchainye razmeshcheniya / V.F. Kolchin, B.A. Sevast'yanov, V.P. Chistyakov. M.: Nauka, 1976. 159 s.

10. Ibragimov I.A. Nezavisimye i statsionarno svyazannye velichiny / I.A. Ibragimov, Yu.V. Linnik. M.: Nauka, 1965. 524 s.

УДК 519.212.2

Предельные распределения максимального заполнения ячеек в одной схеме размещения

[1] Елена Владимировна Хворостянская
[2] Юрий Леонидович Павлов

[1] ИПМИ КарНЦ РАН, Российская Федерация
185910, Республика Карелия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Кандидат физико-математических наук
E-mail: cher@krc.karelia.ru
[2] ИПМИ КарНЦ РАН, Российская Федерация
185910, Республика Карелия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Доктор физико-математических наук, профессор
E-mail: pavlov@krc.karelia.ru

Аннотация. Рассматривается модель заполнения N различных ячеек частицами, в которой случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, равные числу частиц в ячейках, независимы и имеют распределение Пуассона. Для подмножества реализаций такой схемы, удовлетворяющих условию $\xi_1+\ldots+\xi_N \leq n$, при $N\to\infty$ получены предельные распределения максимального заполнения ячеек.

Ключевые слова: размещение частиц по ячейкам; предельное распределение; максимальное заполнение ячейки.