Published in the Russian Federation
European Researcher
Has been issued since 2010.
ISSN 2219-8229
E-ISSN 2224-0136
Vol. 76, No. 6-1, pp. 1009-1018, 2014

DOI: 10.13187/issn.2219-8229
www.erjournal.ru

Physics and mathematics

Физико-математические науки

UDC 519.175.4

Limit Distributions of the Number of Loops and the Number of Multiple Edges of One Vertex of a Configuration Graph

Irina A. Cheplyukova

Institute of Applied Mathematical Research, Karelian Research Centre of RAS, Russian Federation
11 Pushkinskaya St., Petrozavodsk, Karelia, 185910
PhD (Physics and Mathematics)
E-mail: chia@krc.karelia.ru

Abstract. This article examines a chance graph that contains N vertices, in which independent similarly distributed chance quantities $\xi_1,\dots,\xi_N$, which are equal to the degrees of the graph's vertices, have a binomial distribution with parameters (N, p), where the parameter $p = p(N)$ is chosen in such a way that $N \to \infty$, $Np \to \lambda$, $0 < \lambda < \infty$. The author obtains the limit distributions of the number of loops and the number of multiple edges of one vertex of a chance graph.

Keywords: chance graph; configuration model; loop; multiple edge; limit distribution.

Введение. В настоящее время существует большое число работ, посвященных изучению случайных графов предназначенных для моделирования сложных сетей коммуникаций (см., например, [1] – [3]). Одна из наиболее известных моделей – конфигурационная модель с независимыми одинаково распределенными степенями вершин ([1] – [3]). Построение этой модели состоит из двух этапов. На первом этапе для каждой из N вершин графа определяется ее степень в соответствии с некоторым распределением вероятностей. Для удобства изложения процесса построения такой модели часто используется понятие полуребра, введенное в [3]. Из каждой вершины графа может выходить несколько полуребер, число которых равно степени данной вершины. Подразумевается, что все вершины и полуребра различны. На втором этапе построения происходит последовательное образование ребер: на каждом шаге два полуребра выбираются равновероятно и, соединившись, образуют ребро; если сумма всех полуребер является нечетным числом, то вводится вспомогательная вершина, степень которой равна 1, и последнее свободное полуребро образует ребро с этой дополнительной вершиной.

При изучении свойств случайных графов очень эффективным оказалось использование методов теории ветвящихся процессов ([4] – [7] и др.). Но поскольку соединение полуребер при построении конфигурационной модели происходит без ограничений, могут появиться кратные ребра и петли, а этих объектов в реализациях ветвящихся процессов нет. Следовательно, для исследования конфигурационных графов нужно уметь оценивать вероятности появления петель и кратных ребер. Первые такие результаты были получены в работах [8] и [9]. В [10] рассматривается предельная структура графа, содержащего N, $N \to \infty$, вершин при условии, что существует предельное распределение степеней вершин с конечными двумя первыми моментами. Пусть ν обозначает отношение второго факториального момента предельного распределения степеней вершин к первому моменту этого распределения. В [10] показано, что если максимальная степень вершины вышеуказанного графа имеет порядок $o\left(\sqrt{N}\right)$ при $N \to \infty$, то число петель и число кратных ребер асимптотически имеет распределение Пуассона с параметрами $\nu/2$ и $\nu^2/4$, соответственно. В этом случае конфигурационный граф асимптотически имеет только конечное число петель и кратных ребер. Следовательно, можно предположить, что предельная структура этого графа эквивалентна структуре уже хорошо изученной классической модели случайного графа Эрдеша-Реньи. В таком случайном графе, содержащем N вершин, степень вершины соответствует биномиальному распределению с параметрами $N-1$ и p, где p означает вероятность соединения пары вершин ребром. Существует много работ, посвященных исследованию структуры и свойствам случайного графа Эрдеша–Реньи. В книге [10] рассматривается частный случай такого графа, распределение степеней вершин которого имеет биномиальное распределение с параметрами $N-1$ и p, где параметр распределения $p = p(N)$ выбран так, что при $N \to \infty$ выполнено условие $Np = \lambda, 0 < \lambda < \infty.$ Тогда в асимптотике при $N \to \infty$ оно может быть приближено Пуассоновским распределением с параметром λ, и, по построению, такой граф не имеет ни петель, ни кратных ребер. Размер χ наибольшей компоненты связности этого графа при $N \to \infty$ имеет следующий вид

$$\chi = \begin{cases} \Theta(\ln N), & \text{при} \quad \lambda < 1; \\ \Theta\left(N^{2/3}\right), & \text{при} \quad \lambda = 1; \\ \Theta(N), & \text{при} \quad \lambda > 1, \end{cases}$$

кроме того, известно, что в графе Эрдеша–Реньи только при $\lambda > 1$ возникает гигантская компонента связности, т. е. компонента с числом вершин равным $\Theta(N)$. Запись $g = \Theta(f)$ означает, что $0 < C_1 \le \dfrac{g}{f} \le C_2 < \infty.$ Значит, в асимптотике структура конфигурационного графа с N вершинами и биномиальным распределением степеней вершин с параметрами (N, p), где параметр p удовлетворяет вышесказанному условию, аналогична этой классической модели Эрдеша–Реньи. Например, размер ее максимальной компоненты связности при $N \to \infty$ может измениться только за счет конечного числа петель и кратных ребер.

В данной работе рассматривается частный случай конфигурационного графа с биномиальным распределением степеней вершин, параметр распределения $p = p(N)$ которого выбран так, что при $N \to \infty$ выполнено условие $Np \to \lambda, \quad 0 < \lambda < \infty.$ Можно предположить, что в асимптотике при $N \to \infty$ структура такого графа эквивалентна соответствующей классической модели Эрдеша–Реньи. В работе получены предельные распределения вероятностей числа петель и числа кратных ребер для одной вершины в рассматриваемом случайном графе.

Основные результаты. Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$ означают независимые случайные величины, равные степеням вершин с номерами $1, 2, \ldots, N$ соответственно, распределение которых имеет вид

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1}$$

где параметр распределения $p = p(N)$ выбран так, что при $N \to \infty$ выполнено условие $Np \to \lambda,\ 0 < \lambda < \infty.$ Понятно, что для изучения случайного графа желательно знать предельные распределения основных характеристик этого графа, например, максимальную степень и сумму степеней графа. Легко показать, что для максимальной степени $\xi_{(N)} = \max\{\xi_1, \ldots, \xi_N\}$ справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $N \to \infty.$ Тогда для x таких, что $0 < C_3 \le Ne^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!} \le C_4 < \infty,$

справедливо

$$\mathbf{P}\{\xi_{(N)} < x\} = \exp\left\{-Ne^{-\lambda} \frac{\lambda^{\lceil x \rceil}}{\lceil x \rceil!}\right\}(1 + o(1)),$$

где $\lceil x \rceil$ означает ближайшее целое число, большее или равное x.

Замечание. Из условий леммы 1 нетрудно получить, что

$$x = \frac{\ln N}{\ln\ln N} + \frac{\ln N \ln\ln\ln N}{(\ln\ln N)^2} + \frac{\ln N \ln \lambda e}{(\ln\ln N)^2} + o\left(\frac{\ln N}{(\ln\ln N)^2}\right).$$

Учитывая последнее замечание, для изучения асимптотического поведения числа петель и числа кратных ребер нашего графа достаточно рассмотреть только те вершины, степени которых не превосходят максимальную, однако при доказательствах всех нижеприведенных теорем мы расширим это условие и будем рассматривать графы, степени d вершин которых удовлетворяют условию $d = o(\sqrt{N}).$

Выберем две произвольные вершины нашего графа, например вершины с номерами N и $N-1.$ Пусть случайная величина γ_N равна числу петель вершины с номером N, а случайная величина $\lambda_{N,N-1}$ равна числу ребер вида $(N, N-1).$ Введем следующие обозначения:

$$p_N(d_N; m) = \mathbf{P}\{\gamma_N = m | \xi_N = d_N\}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

$$p_N(d_N, d_{N-1}; m) = \mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}\}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{2}$$

$$\alpha_m = \begin{cases} \mathbf{E}[\xi]^m, & \text{если } m = 1, 2, \ldots, \\ 1, & \text{если } m = 0, \end{cases}$$

где $\mathbf{E}[\xi]^m$ означает факториальный момент, т.е.

$$\mathbf{E}[\xi]^m = \mathbf{E}\xi(\xi-1)\cdots(\xi-m+1).$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Пусть $N \to \infty,$ тогда для $m = 0, 1, 2, \ldots$ справедливы следующие утверждения.

1. При фиксированных d_N

$$p_N(d_N; m) = \frac{d_N!(1 + o(1))}{(d_N - 2m)!\, m!\, (2\lambda N)^m}.$$

2. При $d_N \to \infty$

$$p_N(d_N;m)=\left(\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right)^m\frac{1}{m!}\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\}(1+o(1)).$$

Теорема 2. Пусть $N\to\infty$, тогда для $m=0,1,2,\ldots$

$$\mathbf{P}\{\gamma_N=m\}=\frac{1+o(1)}{m!\,(2\lambda N)^m}\alpha_m,$$

где α_m определено в (2).

Следствие 1. Пусть $N\to\infty$, тогда

$$\mathbf{P}\{\gamma_N=0\}=1+o(1).$$

Теорема 3. Пусть $N\to\infty$, тогда для $m=0,1,2,\ldots$

$$p_N(d_N,d_{N-1};m)=\frac{d_N!\,d_{N-1}!\,(1+o(1))}{m!\,(d_N-m)!\,(d_{N-1}-m)!\,(\lambda N)^m}\exp\left\{-\frac{d_N^2}{\lambda N}-\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right\}.$$

Следствие 2. Пусть $N\to\infty$, тогда

$$p_N(d_N,d_{N-1};0)=1+o(1).$$

Следствие 3. Пусть $N,d_N,d_{N-1}\to\infty$, тогда для $m=0,1,2,\ldots$

$$p_N(d_N,d_{N-1};m)=\frac{(1+o(1))}{m!}\left(\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right)^m\exp\left\{-\frac{d_N d_{N-1}}{\lambda N}\right\}.$$

Теорема 4. Пусть $N\to\infty$, тогда для $m=0,1,2,\ldots$

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1}=m\}=\frac{1+o(1)}{m!\,(\lambda N)^m}\alpha_m^2.$$

Обозначим через K событие, состоящее в том, что вершина с номером N не имеет ребер кратности больше единицы.

Следствие 4. Пусть $N\to\infty$, тогда

$$\mathbf{P}\{K\}=1+o(1).$$

Вспомогательное утверждение. Обозначим через η_N сумму всех степеней вершин, т.е. $\eta_N=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N$ при отсутствии фиктивной вершины, в противном случае $\eta_N=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_N+1$.

Лемма 2. Пусть $N\to\infty$, тогда для целых неотрицательных k равномерно относительно $(k-N^2p)/\sqrt{N\lambda(1-p)}$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\eta_N=k\}=\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi N\lambda(1-p)}}\exp\left\{-\frac{(k-N^2p)^2}{N\lambda(1-p)}\right\}.$$

Доказательство. Обозначим через $\varphi(u)$ характеристическую функцию случайной величины ξ_1, через $\varphi_N(u)$ – характеристическую функцию $(\eta_N-N^2p)/\sqrt{N\lambda(1-p)}$. Из (1) следует, что

$$\varphi_N(u)=\exp\left\{-\frac{iN^2pu}{\sqrt{N\lambda(1-p)}}\right\}\varphi^N\left(\frac{u}{\sqrt{N\ \lambda(1-p)}}\right). \quad (3)$$

При достаточно малых u справедливо разложение

$$\ln\varphi(u)=u\left(\frac{\partial\ln\varphi(u)}{\partial u}\right)\Bigg|_{u=0}+\frac{u^2}{2}\left(\frac{\partial^2\ln\varphi(u)}{\partial u^2}\right)\Bigg|_{u=0}+\frac{u^3}{3!}Q(u)= \\ =iuNp-\frac{u^2}{2}\left(Np(1-p)\right)+\frac{u^3}{3!}Q(u), \tag{4}$$

где

$$|Q(u)|\le 2\max_{|\tau|\le|u|}\left|\frac{\partial^3\ln\varphi(\tau)}{\partial\tau^3}\right|.$$

Из (3) и (4) следует, что при любом фиксированном u справедливо соотношение

$$\ln\varphi_N(u)=-\frac{u^2N\ \ p}{2\lambda}+\frac{u^3}{6\sqrt{N}\left(\lambda(1-p)\right)^{3/2}}Q\left(\frac{u}{\sqrt{N\lambda(1-p)}}\right).$$

Учитывая, что $Np\to\lambda$ и $|Q(u)|\le C_5$ (здесь и далее $C_5, C_6,\dots$ обозначают некоторые положительные постоянные), несложно показать, что в последнем равенстве второе слагаемое при $N\to\infty$ стремиться к нулю, следовательно,

$$\varphi_N(u)\to e^{-u^2/2}. \tag{5}$$

Согласно формуле обращения вероятность $\mathbf{P}\{\eta_N=k\}$ можно представить в виде интеграла

$$\mathbf{P}\{\eta_N=k\}=\frac{1}{2\pi\sqrt{N\lambda(1-p)}}\int\limits_{-\pi\sqrt{N\lambda(1-p)}}^{\pi\sqrt{N\lambda(1-p)}}e^{izu}\varphi_N(u)du,$$

где $z=\left(k-N^2p\right)/\sqrt{N\lambda(1-p)}$.

Учитывая, что

$$(2\pi)^{-1/2}e^{-z^2/2}=(2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-izu-u^2/2\right\}du,,$$

разность

$$R=2\pi\left(\sqrt{N\lambda(1-p)}\mathbf{P}\{\eta_N=k\}-\sqrt{2\pi}e^{-z^2/2}\right)$$

можно представить в виде суммы $R=I_1+I_2+I_3+I_4$, где

$$I_1=\int\limits_{-A}^{A}e^{-izu}\left(\varphi_N(u)-e^{-u^2/2}\right)du, \qquad I_2=\int\limits_{A<|u|\le\varepsilon\sqrt{N\lambda(1-p)}}e^{-izu}\varphi_N(u)\,du,$$

$$I_3=\int\limits_{\varepsilon\sqrt{N\lambda(1-p)}<|u|\le\pi\sqrt{N\lambda(1-p)}}e^{-izu}\varphi_N(u)\,du, \qquad I_4=\int\limits_{A<|u|}\exp\left\{-izu-u^2/2\right\}du, \tag{6}$$

выбор постоянных A и ε будет ясен из дальнейшего.

Для доказательства леммы 2 достаточно показать, что разность R стремится к нулю.

Из (5) ясно, что $I_1\to 0$. Для интеграла I_4 справедливо

$$|I_4|\le\int\limits_{A\le|u|}e^{-u^2/2}du,$$

значит интеграл I_4 можно сделать сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Рассмотрим интеграл I_2. Учитывая, что $|Q(u)| \le C_6$, при $|u| < \varepsilon\sqrt{N\lambda(1-p)}$, $N \to \infty$ и достаточно малом ε находим, что

$$|\varphi_N(u)| \le \exp\left\{-C_7 u^2\right\}.$$

Отсюда получаем, что при $N \to \infty$ справедливо

$$|I_2| \le \int\limits_{A<|u|} \exp\left\{-C_7 u^2\right\} du,$$

следовательно, интеграл I_2 может быть сделан сколь угодно малым выбором достаточно большого A.

Оценим I_3. При $\varepsilon < |u| \le \pi$ справедливо неравенство $|\varphi(u)| \le e^{-C_8}$, тогда из (6) находим, что при $N \to \infty$

$$|I_3| \le C_9\sqrt{N} e^{-C_8 N} \to 0.$$

Это и завершает доказательство леммы 2.

Доказательство основных результатов. Обозначим через η_{N-1} сумму степеней графа без учета N -ой вершины, т.е. $\eta_N = \eta_{N-1} + \xi_N$. В [11] показано, что при заданных положительных целых d_N и четных $l_N = \sum_{i=1}^{N} d_i$ для вероятности $p_N(d_N; m)$ справедливо следующее соотношение

$$p_N(d_N; m) = \sum_{l_N = d_N}^{N^2} R(m|d_N, l_N) \mathbf{P}\{\eta_{N-1} = l_N - d_N\}, \tag{7}$$

где

$$R(m|d_N, l_N) = \mathbf{P}\{\gamma_N = m | \xi_N = d_N, \eta_{N-1} = l_N - d_N\} = \frac{d_N!}{(d_N - 2m)!\, m!\, 2^m} Q(m|d_N, l_N),$$

$$Q(m|d_N, l_N) = 2^{d_N - m} \frac{(l_N - d_N)!}{l_N!} \frac{(l_N/2)!}{(l_N/2 - d_N + m)!} \quad \text{при } d_N \ge 2m;$$

$$R(m|d_N, l_N) = 0, \quad \text{при } d_N < 2m.$$

Вероятность $p_N(d_N; m)$можно представит в виде следующей суммы

$$p_N(d_N; m) = S_1 + S_2 + S_3 + S_4, \tag{8}$$

где

$$S_i = \sum_{l_N \in K_i} R(m|\, d_N, l_N) \mathrm{P}\{\eta_{N-1} = l_N - d_N\},$$

$$K_1 = \{j : j - \text{целое} \quad \text{число, } j \in [d_N, \lambda N/2)\},$$

$$K_2 = \left\{j : j - \text{целое} \quad \text{число, } j \in \left[\lambda N/2, N^2 p - A\sqrt{\lambda(1-p)N}\right)\right\}$$

$$K_3 = \left\{j : j - \text{целое} \quad \text{число, } j \in \left[N^2 p - A\sqrt{\lambda(1-p)N}, N^2 p + A\sqrt{\lambda(1-p)N}\right]\right\},$$

$$K_4 = \left\{j : j - \text{целое} \quad \text{число, } j \in \left[N^2 p + A\sqrt{\lambda(1-p)N}, N^2\right]\right\},$$

выбор величины A будет ясен из дальнейшего.

Основной вклад в вероятность $p_N(d_N;m)$ дает слагаемое S_3. Используя формулу Стирлинга и асимптотику

$$\left(1-\frac{a}{x}\right)^{x-a}=\exp\left\{-a+\frac{a^2}{2x}+O\left(\frac{a^3}{x^2}\right)\right\},\quad a=o(x),\ \ x\to\infty, \tag{9}$$

из (7) находим, что при $l_N\in K_3,\quad N\to\infty$

$$\begin{aligned}Q(m|d_N,l_N)&=\frac{e^m}{l_N^m}\left(1-\frac{d_N}{l_N}\right)^{l_N-d_N}\left(1-\frac{2(d_N-m)}{l_N}\right)^{-l_N/2+d_N-m}(1+o(1))=\\&=\frac{(1+o(1))}{l_N^m}\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2l_N}\right\}=\frac{(1+o(1))}{(\lambda N)^m}\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\}.\end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $d_N\to\infty$. Тогда из (7) и (10), применяя формулу Стирлинга, получаем, что при $N\to\infty$

$$R(m|d_N,l_N)=\frac{1}{m!}\left(\frac{d_N{}^2}{2\lambda N}\right)^m\exp\left\{-\frac{d_N{}^2}{2\lambda N}\right\}(1+o(1)). \tag{11}$$

Из соотношений (8) и (11) находим, что

$$\begin{aligned}S_3&=\frac{1+o(1)}{m!}\left(\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right)^m\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\}\sum_{l_N\in K_3}\mathbf{P}\{\eta_{N-1}=l_N-d_N\}=\\&=\frac{1+o(1)}{m!}\left(\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right)^m\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\}\mathbf{P}\left\{-A\le\frac{\eta_{N-1}-N^2p}{\sqrt{\lambda N(1-p)}}\le A\right\}.\end{aligned}$$

Отсюда и из леммы 2, следует, что при $N\to\infty$ выбором достаточно большого A сумма S_3 может быть сделана сколь угодно близкой к выражению

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right)^m\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2\lambda N}\right\}.$$

Рассмотрим S_4. Несложно проверить, что при $l_N\in K_4$, $N\to\infty$

$$Q(m|d_N,l_N)=\frac{1+o(1)}{l_N^m}\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2l_N}\right\}.$$

Тогда для S_4 из (8) находим, что

$$\begin{aligned}S_4&=\sum_{l_N\in K_4}\frac{d_N^{2m}}{m!2^m}Q(m|d_N,l_N)\mathbf{P}\{\eta_{N-1}=l_N-d_N\}(1+o(1))=\\&=\frac{d_N^{2m}}{m!}\sum_{l_N\in K_4}\frac{1}{(2l_N)^m}\exp\left\{-\frac{d_N^2}{2l_N}\right\}\mathbf{P}\{\eta_{N-1}=l_N-d_N\}(1+o(1)).\end{aligned}$$

Учитывая, что при $l_N\in K_4$ функция $\dfrac{d_N^{2m}}{(2l_N)^m}\exp\left\{-\dfrac{d_N^2}{2l_N}\right\}$ убывает, отсюда получаем, что

$$S_4=o(S_3). \tag{12}$$

Рассмотрим S_1. Используя известное неравенство для случайной величины ρ, имеющей биномиальное распределение с параметрами n и p (см., например [6]):

$$\mathbf{P}\{\rho \le np/2\} \le \exp\{-np/8\},$$

из (8) находим, что

$$S_1 \le \sum_{l_N \in K_1} \mathbf{P}\{\eta_{N-1} = l_N - d_N\} < \mathbf{P}\{\eta_{N-1} \le N^2 p/2\} \le \exp\{-N^2 p/8\} = o(S_3). \qquad (13)$$

Для оценки суммы S_2 из (8) и (11) получаем, что

$$S_2 = \sum_{l_N \in K_2} R(m|d_N, l_N)\mathbf{P}\{\eta_{N-1} = l_N - d_N\} \le \frac{d_N^{2m}}{m!(2/3)^m(\lambda N)^m} \sum_{l_N \in K_2} \mathbf{P}\{\eta_{N-1} = l_N - d_N\} =$$

$$= \frac{d_N^{2m}}{m!(2/3)^m(\lambda N)^m} \mathbf{P}\left\{\eta_{N-1} < N^2 p - A\sqrt{\lambda(1-p)N} - d_N\right\} = o(S_3).$$

Отсюда и из соотношений (8), (12) и (13) следует утверждение теоремы 1 в случае, когда $d_N \to \infty$.

Рассмотрим случай, когда степень d_N фиксирована. Из (7), (8) и (10) находим, что при $d_N \ge 2m$ справедливо

$$S_3 = \frac{d_N!(1+o(1))}{m!(d_N - 2m)!(2\lambda N)^m} \sum \mathbf{P}\left\{\eta_{N-1} = N^2 p + z\sqrt{\lambda(1-p)N} - d_N\right\},$$

где $Z = \left\{ z : z = \dfrac{j}{\sqrt{\lambda(1-p)N}},\ j - \text{целое} \quad \text{число}, |z| < A\sqrt{\lambda(1-p)N} \right\}$.

Следовательно, используя лемму 2, при $N \to \infty$ выбором достаточно большого A последнее выражение можно сделать сколь угодно близким к выражению

$$\frac{d_N!(1+o(1))}{m!(d_N - 2m)!(2\lambda N)^m}.$$

Оценки сумм S_1, S_2 и S_4 проводятся аналогично тому, как сделаны оценки S_1, S_2 и S_4 в предыдущем случае. Теперь теорема 1 доказана полностью.

Вероятность $\mathbf{P}\{\gamma_N = m\}$ можно представить в виде следующей суммы

$$\mathbf{P}\{\gamma_N = m\} = \sum_{k=2m}^{\ln N} p_N(k;m)\mathbf{P}\{\xi_N = k\} + \sum_{k > \ln N} p_N(k;m)\mathbf{P}\{\xi_N = k\} = S_1 + S_2. \qquad (14)$$

Несложно видеть, что основной вклад в $\mathbf{P}\{\gamma_N = m\}$ дает слагаемое S_1. Действительно, из соотношения (1) и теоремы 1, нетрудно получить, что при $N \to \infty$, $m = 0$

$$S_1 = \sum_{k=0}^{\ln N} C_N^k p^k (1-p)^{N-k}(1+o(1)) = 1 + o(1), \qquad (15)$$

при $m \ne 0$

$$S_1 = \sum_{k=2m}^{A} p_N(k;m)\mathbf{P}\{\xi_N = k\} + \sum_{k=A+1}^{\ln N} p_N(k;m)\mathbf{P}\{\xi_N = k\} =$$

$$= \frac{1+o(1)}{m!(2\lambda N)^m}\left(\sum_{k=2m}^{A} k(k+1)\cdots(k-2m+1)\mathbf{P}\{\xi_N = k\} + \sum_{k=A+1}^{\ln N} k^{2m}\mathbf{P}\{\xi_N = k\} \right). \qquad (16)$$

Выбором достаточно большого A вторая сумма в последнем равенстве может быть сделана сколь угодно малой, значит и все выражение приближается к

$$\frac{1+o(1)}{m!(2\lambda N)^m}\mathbf{E}[\xi_N]^m.$$

Для суммы S_2, используя неравенство $\lambda^k / k! < C_{10}k^{-k/2-1/2}$, из (1) и (14) находим, что

$$S_2 \le \sum_{k>\ln N} p_k \le C_{11} \sum_{k>\ln N} \frac{\lambda^k}{k!} \le C_{12}\int y^{-\ln N/2}dy = O\left(N^{-\ln\sqrt{\ln N}}\right). \qquad (17)$$

Из соотношений (14) – (17) следует утверждение теоремы 2.
Доказательства двух последних теорем (теоремы 3 и 4) строиться по той же схеме, которая предложена для доказательства первых двух теорем (теоремы 1 и 2) при этом используется следующее соотношение:

$$\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{A}\mathbf{P}\{\lambda_{N,N-1} = m | \xi_N = d_N, \xi_{N-1} = d_{N-1}, \eta_{N-2} = l_N - d_N - d_{N-1}, \gamma_N = k\} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\gamma_N = k | \xi_N = d_N\}(1+o(1)).$$

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, грант 13–01–00009 и Программы стратегического развития Петрозаводского государственного университета на 2012–2016 гг.

Примечания:

1. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch. On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.
2. Newman M.E.Y., Strogatz S.H., Watts D.Y. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Physical Review E. 2001. 64. 026118.
3. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol.55. P. 3–23.
4. Erdös P., Rényi A. On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1960. Vol.5. P. 17–61.
5. Hofstad R., Hooghiemsra G., Znamenski D. Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees // Electronic Journal of Probability. 2007. Vol.12. P. 703–766.
6. Janson S., Luczak T., Rucinski A. Random graphs. New York: Wiley, 2000. 348p.
7. Pavlov Yu.L. On power-law random graphs and branching processes // Proceedings of the Eight International Conference CDAM. Minsk: Publishing center BSU. 2007. Vol.1. P. 92–98.
8. Bender E.A., Canfield E.R. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 1978. Vol.24, Iss. 3. P. 296–307.
9. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labeled regular graphs // European Journal of Combinatorics. 1980. Vol.1. P. 311–316.
10. Hofstad R. Random graphs and complex networks. 2011. 386 p.
11. Павлов Ю.Л., Степанов М.М. Предельные распределения числа петель случайного конфигурационного графа // Труды математического института им. В.А.Стеклова.

References:

1. Faloutsos M., Faloutsos P., Faloutsos Ch. On power-law relationships of the internet topology // Computer Communications. 1999. Rev. 29. P. 251–262.
2. Newman M.E.Y., Strogatz S.H., Watts D.Y. Random graphs with arbitrary degree distribution and their applications // Physical Review E. 2001. 64. 026118.
3. Reittu H., Norros I. On the power-law random graph model of massive data networks // Performance Evaluation. 2004. Vol.55. P. 3–23.

4. Erdös P., Rényi A. On the evolution of random graphs // Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. 1960. Vol.5. P. 17–61.
5. Hofstad R., Hooghiemsra G., Znamenski D. Distances in random graphs with finite mean and infinite variance degrees // Electronic Journal of Probability. 2007. Vol.12. P.703–766.
6. Janson S., Luczak T., Rucinski A. Random graphs. New York: Wiley, 2000. 348p.
7. Pavlov Yu.L. On power-law random graphs and branching processes // Proceedings of the Eight International Conference CDAM. Minsk: Publishing center BSU. 2007. Vol.1. P. 92–98.
8. Bender E.A., Canfield E.R. The asymptotic number of labeled graphs with given degree sequences // Journal of Combinatorial Theory, Series A. 1978. Vol.24, Iss. 3. P. 296–307.
9. Bollobas B. A probabilistic proof of an asymptotic formula for the number of labeled regular graphs // European Journal of Combinatorics. 1980. Vol.1. P. 311–316.
10. Hofstad R. Random graphs and complex networks. 2011. 386p.
11. Pavlov Yu.L., Stepanov M.M. Predel'nye raspredeleniya chisla petel' sluchainogo konfiguratsionnogo grafa // Trudy matematicheskogo instituta im.V.A.Steklova.

УДК 519.175.4

Предельные распределения числа петель и числа кратных ребер одной вершины конфигурационного графа

Ирина Александровна Чеплюкова

ИПМИ КарНЦ РАН, Российская Федерация
185910, Республика Карелия, Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11
Кандидат физико-математических наук
E-mail: chia@krc.karelia.ru

Аннотация. Рассматривается случайный граф, содержащий N вершин, в котором независимые одинаково распределенные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, равные степеням вершин графа, имеют биномиальное распределение с параметрами (N, p), где параметр $p = p(N)$ выбран так, что $N \to \infty, Np \to \lambda, 0 < \lambda < \infty$. Получены предельные распределения числа петель и числа кратных ребер одной вершины случайного графа.

Ключевые слова: случайный граф; конфигурационная модель; петля; кратное ребро; предельное распределение.