

UDC 512.312

Model of the Process of Ion-exchange Porous Medium Filtration of the Suspension and its Analytical Solution

¹Normahmad Ravshanov²Bozorboy Palvanov

¹Centre on development of the programme products and hardware-programme complex under TUIT, Uzbekistan

100125, Tashkent, str. Durmon yuli, 25

Dr. (Technical)

E-mail: ravshanzade-09@mail.ru

²Centre on development of the programme products and hardware-programme complex under TUIT, Uzbekistan

100125, Tashkent, str. Durmon yuli, 25

Junior research scientist

E-mail: bpolvonov@mail.ru

Abstract. The article presents the model and analytical solution for technological process of ion-exchange porous medium filtration of the suspension and functional relationship for the pressure diffusion coefficient calculation.

Keywords: Mathematical model; computational experiment; an analytical solution; ion exchange filtration.

Введение. Бурное развитие техники и технологии переработки и приготовления сырья, товаров и продуктов общественного назначения дало возможность широко использовать ионообменный и экстракционный способов в химической, пищевой, фармацевтической, горно-металлургической и ряде других отраслей промышленности. Причиной этого является высокая экономичность и эффективность экстракционных и ионообменных методов извлечения промышленно ценных веществ из твердых материалов [1]. Поэтому для достижения максимально лучшего результата по очистке конечного продукта от нежелательных примесей в процессе фильтрования последний должен быть организован как технологический цикл с оптимальными параметрами, включающими характеристики самого фильтра и режима работы. Поскольку процесс фильтрации, особенно сильно загрязненных жидких ионизированных растворов, представляет собой сложный нестационарный процесс, зависящий от многих факторов, то решение проблемы оптимизации управления процессом фильтрации – весьма серьезная задача.

В связи с этим возникает весьма актуальная задача нахождения оптимальных режимов проведения процессов экстракции и ионообменного извлечения. До последнего времени эти процессы относились к числу малоизученных. Главная причина такого положения заключалась в отсутствии адекватных в широком диапазоне параметров математических описаний основных процессов извлечения из твердых веществ.

Развития вычислительной техники с аппаратным и программным обеспечениями дало возможность шире использовать современные способы исследования указанно выше процессов, позволяющих анализировать эти процессы в условиях, максимально приближающихся к объекту исследования. В процессе движения ионизированного раствора через ионитный фильтр зерна ионита набухают, и изменяется пористость и проницаемость фильтра, следовательно, меняется и его сопротивление. Математическая модель, учитывающая это явление, содержит новый параметр, так называемой коэффициент «бародиффузии» – D_b , который является опытным параметром. Для его определения в каждом конкретном случае необходимы экспериментальные наблюдения. Как правило, эти эксперименты очень трудоемкие. Однако при сочетании аналитического решения с очень простым экспериментальным наблюдением можно получить значение D_b с достаточно большой точностью. Настоящая работа посвящена определению коэффициента D_b .

Методы. Для определения коэффициента бародиффузии запишем общее уравнение динамики сорбции одного вещества с линейной изотермой сорбции Генри в виде [2-4]:

$$m \frac{\partial n}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{D_b}{P} \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \beta(n - \Gamma N), \quad (2)$$

$$m \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial P}{\partial x} \right), \quad (3)$$

с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} n_{01} = n, \quad N = N_0, \quad P = f(x), \quad (t = 0) \\ n = n_0, \quad k \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P = P_0, \quad (x = 0) \\ n = n_{02}, \quad \partial P / \partial x = 0, \quad (x = \infty) \end{aligned} \right\}, \quad (4)$$

где Γ - коэффициент Генри, $\gamma, f(x)$ - заданные величины; n, N - неравновесные концентрации в растворе и сорбенте; W - скорость движения раствора в ионитной колонке; D, D_b - коэффициенты диффузии и бародиффузии; P - давление; β - эффективная константа обменивающихся ионов; m, k - пористость и коэффициент проницаемости ионита; n_{01}, N_0 - исходные концентрации ионов в растворе и ионите; P_0 - начальное давление в колонке.

Задача заключается в том, что бы сочетая аналитическое решение системы (1)-(4) с экспериментальными данными получить явный аналитический вид коэффициента бародиффузии.

Для этой цели сначала решим уравнение (1) с соответствующими краевыми условиями (4).

Для получения аналитического решения поставленной задачи положим $k = const, m = const$ и получим вместо уравнения (3) следующее:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = a \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \quad (5)$$

при начальном

$$t = 0, P = P_0 = const, \quad (6)$$

и граничных

$$x = 0, \frac{\partial P}{\partial x} + \gamma P = f(t), \quad (7)$$

$$x = \infty, \partial P / \partial x = 0 \quad (8)$$

условиях, где $a = k/m$.

Задачу будем решать операционным методом. Если применить преобразование Лапласа к дифференциальному уравнению (5), то уравнение для изображения с учетом начального условия принимает вид

$$P_L''(x, s) - \frac{s'}{a} P_L(x, s) + \frac{P_0}{a} = 0. \quad (9)$$

Граничные условия для изображения следующие:

$$P_L' + \gamma P_L = F(s), \quad x = 0, \quad P_L' = 0. \quad (10)$$

Решение уравнения (9) в общем виде следующее:

$$P_L - \frac{P_0}{s} = Ae^{\sqrt{\frac{s}{a}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x}, \quad (11)$$

$$P' = \sqrt{\frac{s}{a}} \left[Ae^{\sqrt{\frac{s}{a}}x} - Be^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} \right],$$

$$x = 0, \quad \sqrt{\frac{s}{a}} \left(Ae^{\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot 0} - Be^{-\sqrt{\frac{s}{a}} \cdot 0} \right) + \gamma(A+B) = F, \quad \sqrt{\frac{s}{a}}(A-B) + \gamma(A+B) = F(s).$$

Из условия (4) получаем, что $A=0$. Постоянную B находим из граничного условия (4):

$$-B\sqrt{\frac{s}{a}} + \gamma B = F(s), \quad B(\gamma - \sqrt{\frac{s}{a}}) = F(s);$$

отсюда

$$B = \frac{F(s)}{\gamma - \sqrt{\frac{s}{a}}}. \quad (12)$$

Тогда решение для изображения примет вид

$$P_L(x, s) = \frac{F(s)}{(\gamma - \sqrt{s}/\sqrt{a})} e^{-\sqrt{\frac{s}{a}}x} + \frac{P_0}{s}. \quad (13)$$

Для нахождения оригинала воспользуемся таблицей изображений, из которой находим

$$P(x, t) = H \left\{ \frac{1}{(-b)^B} e^{bk+b^2t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) - \frac{1}{(-b)^B} \cdot \sum_{m=0}^2 (-2b\sqrt{t})^m \cdot i^m \cdot \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} \right\} + P_0,$$

где $b = \gamma\sqrt{a}$, $k = x/\sqrt{a}$, $H = \sqrt{a} \cdot c^n$;

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^2 (-2b\sqrt{t})^m \cdot i^m \cdot \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} &= \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} + (-2b\sqrt{t})i \cdot \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} + (-2b\sqrt{t})^2 i^2 \cdot \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} = \\ &= \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} [1 - 4b^2t] - 2b\sqrt{t} \cdot i \cdot \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} = \operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} \cdot (1 - 4b^2t - kb) - \frac{2b\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}}. \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$P(x, t) = H \left\{ \frac{1}{(-b)^B} e^{bk+b^2t} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{k}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t} \right) - \frac{1}{(-b)^B} \cdot \left[\operatorname{erfc} \frac{k}{2\sqrt{t}} \cdot (1 - 4b^2t - kb) - \frac{2b\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{k^2}{4t}} \right] \right\}.$$

Представляя функции $\operatorname{erfc} z$ в виде $\operatorname{erfc} z = 1 - \operatorname{erf} z$, вычисляем производную $\frac{\partial P}{\partial x}$:

$$\begin{aligned} P &= \frac{He^{b^2t}}{(-b)^B} e^{bx/\sqrt{a}} \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + b\sqrt{t} \right) \right] - \frac{H}{(-b)^B} (1 - 4b^2t) \cdot \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \\ &\quad + \frac{Hb}{(-b)^B \sqrt{a}} x \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} \right) \right] + \frac{H \cdot 2b\sqrt{t}}{(-b)^B \sqrt{\pi}} e^{-x^2/4at}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} = & \frac{He^{b^2t}}{(-b)^B} \cdot e^{bx/\sqrt{a}} \cdot b/\sqrt{a} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + b\sqrt{t} \right) \right] + \frac{He^{b^2t}}{(-b)^B} e^{bx/\sqrt{a}} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{at}} + b\sqrt{t}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \right) + \\ & + \frac{H}{(-b)^B} (1 - 4b^2t) \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{2\sqrt{at}}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} + \frac{H}{(-b)^B \sqrt{a}} \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{at}} \right) + \\ & + \frac{H}{(-b)^B \sqrt{a}} x \left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(x/2\sqrt{at}\right)^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{at}} \right) + \frac{H \cdot 2\sqrt{t}}{(-b)^B \sqrt{\pi}} \cdot e^{-x^2/4at} \cdot \left(-\frac{x}{2at} \right). \end{aligned}$$

Подставляем значения $P(x, t)$ и $\frac{\partial P}{\partial x}$ в первое уравнение (1) и получаем:

$$m \frac{\partial n}{\partial t} + W \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + D_b F(x, t).$$

Рассмотрим теперь уравнение ионообменной сорбции. Исключив из (1) и (2) $N(x, t)$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - W \frac{\partial n}{\partial x} - m \frac{\partial n}{\partial t} + F(x, t) \right) + \beta_1 \left(D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} - W \frac{\partial n}{\partial x} - m \frac{\partial n}{\partial t} + F(x, t) \right) = \beta \frac{\partial n}{\partial t},$$

где $F(x, t) = \frac{D_b}{P} \frac{\partial P}{\partial x}$, $\beta_1 = \beta \gamma$.

Подстановка $n = ue^{k_1t+k_2x}$ в последнее уравнение приводит к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2Dk_2 - W) \frac{\partial u}{\partial x} - m \frac{\partial u}{\partial t} + F_2 \right] + (\beta_1 + k_1) \left[D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2Dk_2 - W) \frac{\partial u}{\partial x} - m \frac{\partial u}{\partial t} + F_2 \right] = 0$$

Очередная замена переменных $u = ve^{k_3x+k_4t}$ приводит последнее уравнение к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} (2Dk_2 - W + 2Dk_3) - m \frac{\partial v}{\partial t} + [Dk_2^2 - Wk_2 - mk_1 - \beta - mk_4 + k_3(2Dk_2 - W)] + \right. \\ \left. + F_3 \right\} + \left\{ D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} (2Dk_2 - W + 2Dk_3) - m \frac{\partial v}{\partial t} + [Dk_2^2 - Wk_2 - mk_1 - k_1 - mk_4 + \right. \\ \left. + k_3(2Dk_2 - W)] \cdot v + F_3 \right\} + \left\{ D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial v}{\partial x} (2Dk_2 - W + 2Dk_3) - m \frac{\partial v}{\partial t} + \right. \\ \left. + [Dk_2^2 - Wk_2 - mk_1 - mk_4 + k_3(2Dk_2 - W)] v + F_3 \right\} = 0, \end{aligned}$$

(14) где $F_3 = F \cdot e^{-(k_1+k_4)t-(k_2+k_3)x}$.

Учитывая произвольности (k_1, k_2, k_3, k_4) , выбираем их так, чтобы

$$\left. \begin{aligned} 2Dk_2 - W + 2Dk_3 &= 0, \\ (Dk_2 - W)(k_2 + k_3) - k_2 - mk_1 &= 0, \\ (Dk_2 - W)(k_2 + k_3) - \beta - mk_4 &= 0, \\ (Dk_2 - W)(k_2 + k_3) - m(k_4 + k_1) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

откуда находим

$$k_1 = \frac{\beta}{m}, \quad k_2 = \frac{W}{D} - \frac{2(1+m)\beta}{mW}, \quad k_3 = -\frac{W}{2D} + \frac{2\beta(1+m)}{mW}, \quad k_4 = \frac{(1+m)\beta}{m^2} + \frac{\beta}{m}.$$

Уравнение (14) с учетом (15) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial v}{\partial t} + F_3 \right) + (\beta_1 + k_1) \left(D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial v}{\partial t} + F_3 \right) = 0 \quad (16)$$

с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} v_{|t=0} &= n_0 e^{-(k_2+k_3)x} = \varphi_1(x), \\ v_{|x=0} &= n_{01} e^{-(k_1+k_4)t} = \varphi_2(t), \\ v_{|x=\infty} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Обозначим:

$$\left(D \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - m \frac{\partial v}{\partial t} + F_3 \right) = \Phi_1. \quad (18)$$

Тогда из (1-16) получаем

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + (\beta_1 + k_1) \Phi_1 = 0. \quad (19)$$

Решение (19) следующее:

$$\Phi_1 = \Phi(x, 0) \cdot e^{-(\beta_1+k_1)t}, \quad (20)$$

где $\Phi(x, 0)$ – неизвестная функция.

Подставляем значение Φ_1 в (18) и получаем уравнение

$$\frac{\partial v}{\partial t} = C_0 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \Phi(x, t), \quad (21)$$

где $\Phi(x, t) = F_3 - \Phi_1$, $C_0 = D / m$, $V = V_1 + V_2$; V_1 - решение однородного уравнения с неоднородными краевыми условиями, V_2 - решение неоднородного уравнения с однородными краевыми условиями, т.е.

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = C_0 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2}, \quad v_1|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad v_1|_{x=0} = \varphi_2(t), \quad v_1|_{x=\infty} = 0, \quad (22)$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = C_0 \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \Phi, \quad v_2|_{t=0} = v_2|_{x=0} = v_2|_{x=\infty} = 0. \quad (23)$$

Задачу (22) решаем операционным методом Лапласа. Для изображения получаем

$$v_1 = \frac{n_0 \cdot e^{-(k_2+k_3)x}}{\lambda^2 - (k_2 + k_3)^2} + n_{01} e^{-(k_1+k_4)t} \cdot e^{-\lambda t} - \frac{n_0 e^{-\lambda x}}{\lambda^2 - (k_2 + k_3)^2}, \quad (24)$$

$$\lambda^2 = S / a.$$

Для нахождения оригинала воспользуемся таблицей изображений [4], окончательно получаем

$$v_1(x, t) = \frac{Dn_0}{m} e^{\frac{D}{m}(k_2+k_3)t} \left\{ e^{-(k_2+k_3)x} - \frac{1}{2} \left[e^{-\frac{mx}{D(k_2+k_3)}} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{D}{m}t}} - \sqrt{\frac{D}{m}t}(k_2+k_3) \right) + e^{\frac{mx}{D(k_2+k_3)}} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{D}{m}t}} - \sqrt{\frac{D}{m}t}(k_2+k_3) \right) \right] \right\} + \frac{n_{01}x}{2\sqrt{\frac{D}{m}}\pi t^3} e^{-(k_1+k_4)t} \cdot e^{-\frac{Dx^2}{4mt}}. \quad (25)$$

Для решения задачи (23) применяем синус преобразование Фурье и после некоторое преобразования окончательно получаем:

$$n(x, t) = q_1(x, t) + D_b q_2(x, t)$$

где:

$$q_1(x, t) = e^{(k_1+k_4)t+(k_2+k_3)x} \left\{ \frac{Dn_0}{m} e^{\frac{D}{m}(k_2+k_3)x} \cdot \left[e^{-(k_2+k_3)x} - \frac{1}{2} e^{-\frac{mx}{D}(k_2+k_3)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{D}{m}t}} - \sqrt{\frac{D}{m}t}(k_2+k_3) \right) + e^{\frac{mx}{D}(k_2+k_3)} \cdot \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{\frac{D}{m}t}} - \sqrt{\frac{D}{m}t}(k_2+k_3) \right) \right] + \frac{n_{01}x}{2\sqrt{\frac{D}{m}\pi t^3}} e^{-(k_1+k_4)t} \cdot e^{-\frac{Dx^2}{4mt}} \right\}$$

$$q_2(x, t) = \frac{1}{D} \int_0^t \Phi_0(\tau) \operatorname{erfc} \left(\frac{x}{2\sqrt{C_0(t-\tau)}} \right) d\tau.$$

Если известно значение n в какой-либо точке, не являющейся точкой на границах, то

$$D_b = \frac{n(x_k, t) - q_1(x_k, t)}{q_2(x_k, t)},$$

где x_k – любая точка внутри рассматриваемой области.

Результаты. На основе полученной формулы были проведены расчеты на ЭВМ (рис. 1–2).

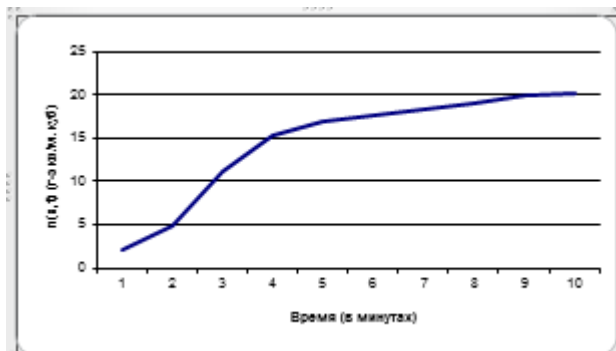


Рис. 1. Изменение концентрация ионов в растворе по времени

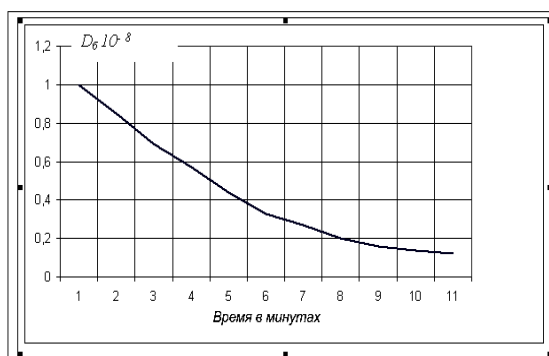


Рис. 2. Изменение коэффициента бародиффузии по времени

Выводы. Получено аналитическое решение уравнения, описывающее изменения давления в ионообменной колонне методом преобразования Лапласа. При этом краевое условие на входе задавалось в общем виде.

Получено аналитическое решение систем линейных уравнений диффузии и массообмена с постоянной скоростью движения и переменным градиентом давления. При незначительном количестве экспериментальных данных из полученных решений определялся коэффициент бародиффузии. С помощью вычисленных значений коэффициента бародиффузии, можно получить функциональную зависимость для его определения.

Примечания:

1. Ravshanov N., Palvanov B., Ravshanov Z. Computer model and computing experiment for technological process of multicomponent mixtures filtering study // European researcher. 2012. Vol. 19. № 4. PP. 358–362.

2. Ravshanov N., Shermatova G.U. Computational experiment for the analysis of functioning of technological process of filtering of suspension // European researcher. 2012.№ 2. PP. 114–119.

3. Ravshanov N., Shermatova G.U. Computational experiment for the analysis of functioning of technological process of filtering of suspension // European researcher. 2012. № 2. PP. 114–119.

4. Рихсиев Б.Б., Равшанов Н. Моделирование обезвоживания ионизированных растворов ионитным фильтром // Докл. АН РУз. Ташкент. 1999. №10. С. 30-33.

5. Brton D., Willers I.M., Zahor R.V.M. The automatic solution of systems of ordinary differential equations by the method of Taylor series. - Comput. I., 1971. № 3. P. 243–248.

6. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высшая школа, 1967. С. 600 с.

УДК 512.312

Модель процесса ионообменного фильтрования суспензии через пористую среду и ее аналитическое решение

¹Равшанов Нормаммад

²Палванов Бозорбой

¹ Центр разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при ТУИТ, Узбекистан

100125, г. Ташкента, ул. Дурмон йули 25

Доктор технических наук, заведующий лабораторией

E-mail: ravshanzade-09@mail.ru

² Центр разработки программных продуктов и аппаратно-программных комплексов при ТУИТ, Узбекистан

100125, г. Ташкента, ул. Дурмон йули 25

Младший научный сотрудник,

E-mail: bpolvonov@rambler.ru

Аннотация. Приводится модель и аналитическое решение для задач технологического процесса ионообменного фильтрования суспензии и функциональная зависимость для вычисления коэффициента бародиффузии.

Ключевые слова. Математическая модель; вычислительный эксперимент; аналитическое решение; ионообменное фильтрование.