UDC 624.131.52+624.154

Modification of the Solution of Boussinesq Problem for Elastic Half-space under the Effect of the Normal Concentrated Force on the Boundary Line

[1] Evgenie N. Peresypkin
[2] Julia S. Peresypkina

[1] Sochi State University, Russia
Sovetskaya street 26a, Sochi, 354000
Dr. (technical), Professor
E-mail: pen40@rambler.ru
[2] Kuban State Technological University, «Training centre "Builder", the technician of laboratory «Tests of building materials and designs», Russia
350000, Krasnodar, street Chapaeva, 94
E-mail: serp@list.ru

Abstract. The article presents elementary solution of Boussinesq problem for elastic half-space under the effect of the normal concentrated force on the boundary line. Pressure is accepted distributed within the cone pressure, which sizes are calculated from a condition of equality of the maximum pressure in the approximate and exact solutions.

Keywords: Boussinesq problem; cone pressure; stress distribution.

Введение. Задача Буссинеска для упругого полупространства под действием нормальной сосредоточенной силы встречается при решении многих проблем механики деформируемого твёрдого тела, в частности, в области строительства при проектировании фундаментов. Её решение методами теории упругости выражено в функциях, требующих применения определённых вычислительных средств. В данной статье приводится простое решение, дающее приемлемый в численном отношении результат по сравнению с точным решением.

Метод исследования, принятый в работе, – аналитический с приближённым представлением функции напряжений. Материал объекта исследования – полупространства – считается подчиняющимся закону Гука.

Распределение напряжений, нормальных к границе на глубине z=h от поверхности, показано на рисунке в виде кривой 1.

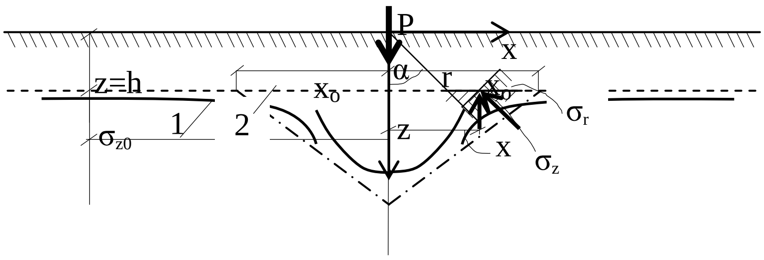

Рис. Распределение напряжений σ_z в полупространстве:
1 – точное (по Буссинеску), 2 - приближённое

Согласно точному решению задачи Буссинеска (например, [1]) функция напряжений, нормальных к площадкам, параллельным границе полуплоскости, имеет вид:

$$\sigma_z = \frac{3P\cos^3\alpha}{2\pi r^2}, \tag{1}$$

где все обозначения ясны из рисунка.

Поскольку $\cos\alpha = z/r$, $r=(x^2+z^2)^{1/2}=z(\eta^2+1)^{1/2}$, $\eta = x/z$, перепишем выражение (1):

$$\sigma_z = \frac{3Pz^3}{2\pi r^5} = \frac{3P}{2\pi z^2} \times \frac{1}{(r/z)^5} = \frac{3}{2\pi} \times \frac{1}{(\eta^2+1)^{5/2}} \times \frac{P}{z^2}. \tag{2}$$

Максимальное значение напряжений (при x=0, r=z) составляет

$$\sigma_{z,max} = \sigma_z(0) = \sigma_{z0} = \frac{3}{2\pi}\frac{P}{z^2}. \tag{3}$$

Так как эпюра давления является пространственной фигурой колоколообразного вида и может быть получена вращением кривой 1 в пределах от 0 до ∞ вокруг оси z, запишем значение эпюры давления на элементарной кольцевой площадке $dx{*}2\pi x$:

$$dN=\sigma_z{*}dx{*}2\pi x=\frac{3}{2\pi}\frac{1}{(x^2/z^2+1)^{5/2}}\frac{P}{z^2}\times 2\pi x dx=\frac{3P}{z^2}\frac{xdx}{(x^2/z^2+1)^{5/2}}=$$

$$=\frac{3P}{z^2}\frac{dx^2/2}{(x^2/z^2+1)^{5/2}}=$$

$$=\frac{3P}{2z^2}\frac{z^2 d(x^2/z^2+1)}{(x^2/z^2+1)^{5/2}}=\frac{3P}{2}\frac{d\varsigma}{\varsigma^{5/2}},\quad \varsigma=x^2/z^2+1.$$

Полное значение N (объём эпюры давления) равно

$$N=\int_0^\infty dN=\frac{3P}{2}\int_0^\infty\frac{d(x^2/z^2+1)}{(x^2/z^2+1)^{5/2}}=\frac{3P}{2}\int_1^\infty\frac{d\varsigma}{\varsigma^{5/2}}=\frac{3P}{2}\left(-\frac{\varsigma^{-1,5}}{1,5}\right)\Big|_1^\infty=$$

$$=P(-1/\varsigma^{1,5})\Big|_1^\infty=P(-0-(-1))=P\,.$$

Таким образом, при любом значении z эпюра давления уравновешивает внешнюю нагрузку.

Пользование формулой (2), разумеется, несложно, но требует определённых вычислительных средств, либо соответствующей таблицы. Если воспользоваться приближённым приёмом вычисления напряжений σ_z, состоящем в выделении конуса давления с боковой поверхностью, наклонённой к вертикали под углом π/4, то результат получается следующий:

$$\sigma_{z1}=P/(\pi z^2), \tag{4}$$

где в знаменателе стоит площадь круглого основания конуса давления, радиус которого равен координате z, так как угол наклона боковой поверхности π/4. При этом напряжения считаются одинаковыми по всей площади основания, а за её пределами равными нулю.

Отношение (4) к (3) показывает, что напряжения σ_{z1} (3) значительно отличаются от σ_z (4), в частности от максимального значения σ_{z0} они составляют 2/3. Это недопустимо грубое в практических расчётах приближение. Заменив равномерное распределение напряжений на конусообразное с основанием πz^2, получим следующее выражение

$$\sigma_{z2}=\sigma_{z2,max}(h-x)/h=\sigma_{z2,max}(z-x)/z=\sigma_{z2,max}(1-\eta), \tag{5}$$

где $\sigma_{z2,max}$ определяется из условия равенства объёма конической эпюры давления внешней нагрузке:

$$(1/3){*}\sigma_{z2,max}{*}\pi z^2=P,\qquad \sigma_{z2,max}=3P/(\pi z^2). \tag{6}$$

Из сравнения (6) и (3) видно, что максимальное значение $\sigma_{z2,max}$ в 2 раза превышает максимальное значение σ_{z0}, что также недопустимо.

Поэтому воспользуемся этим же приёмом замены равномерного распределения коническим, но при равенстве максимальных напряжений точному решению, а площадь основания конуса найдём из условия равенства его объёма внешней нагрузке P:

$$(1/3){*}\sigma_{z0}{*}\pi x_0^2=P,$$

откуда

$$x_0=[3P/(\pi\sigma_{z0})]^{1/2}=\sqrt{\frac{3P}{\pi\frac{3P}{2\pi z^2}}}=\sqrt{2}\,z\,. \tag{7}$$

С учётом (7) и (3) приближённое распределение напряжений σ_z будет иметь вид:

$$\sigma_z=\sigma_{z3}=\sigma_{z0}{*}(x_0-x)/x_0=\sigma_{z0}{*}(1-x/x_0)=\sigma_{z0}{*}(1-x/(2^{0,5}z))=$$

$$=3P/(2\pi z^2){*}(1-\eta/2^{0,5})=0{,}3376{*}(1{,}4142-\eta){*}P/z^2,\ \ 0\le\eta\le 1{,}4142. \tag{8}$$

Сравнение результатов точного (2) и приближённого (8) распределения напряжений σ_z дано в нижеследующей таблице.

Заметим, что угол раствора конуса давления в приближённом решении равен

$$\alpha=arc\ tg(x_0/z)=arc\ tg(\sqrt{2}\,z/z)=arc\ tg(\sqrt{2})=0{,}9553\ рад=54{,}74°,$$

что довольно существенно (на 17,8 %) отличается от часто принимаемого в приближённых решениях угла раствора пирамиды продавливания, равного 45° (например, при расчёте тела центрально нагруженного фундамента [2]).

Таблица

Сравнение результатов точного (2) и приближённого (8) решений

Множитель к табличным значениям P/z^2											
$\eta=$ $=x/z$	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2
σ_z (2)	0,4775	0,433	0,3295	0,221	0,1386	0,0844	0,0513	0,0317	0,02	0,013	0,009
σ_{z3} (8)	0,4775	0,41	0,3424	0,275	0,2074	0,1398	0,0723	0,0048	0	0	0
((8)-(2))/(2)	0	-0,053	0,039	0,244	0,496	0,656	0,409	-0,849	-	-	-

Данные таблицы показывают, что в области больших значений напряжений (вблизи линии действия внешней силы) приближённое решение с точностью примерно 5 % совпадает с точным решением. Относительно велики расхождения в области малых напряжений, где они уже не имеют практического значения.

Выводы:

формула (8)

$$\sigma_z=3P/(2\pi z^2)*(1-\eta/2^{0,5})=0,3376*(1,4142-\eta)*P/z^2,\ \ 0\le \eta\le 1,4142,\ \ \eta=x/z$$

пригодна для вычисления нормальных напряжений по площадкам, параллельным границе полупространства, загруженного на поверхности нормальной сосредоточенной силой.

Примечания:

1 Далматов Б. И. Механика грунтов, основания и фундаменты (включая специальный курс инженерной геологии). 2-е изд. перераб. и доп. Л.: Стройиздат, Ленинградское отделение, 1988. 415 с.

2 Байков В. Н., Сигалов Э. Е. Железобетонные конструкции: Общий курс: Учеб. для вузов. 6-е изд., репринтное. М.: ООО «Бастет», 2009. 768 с.: ил.

УДК 624.131.52+624.154

Модификация решения задачи Буссинеска для упругого полупространства под действием нормальной сосредоточенной силы на границе

[1] Евгений Николаевич Пересыпкин
[2] Юлия Сергеевна Пересыпкина

[1] Сочинский государственный университет, Россия
354000, г. Сочи, ул. Советская, 26а
доктор технических наук, профессор
E-mail: pen40@rambler.ru
[2] Кубанский государственный технологический университет, «Центр повышения квалификации «Строитель», Россия
Краснодар, ул. Чапаева, 94
техник
E-mail: serp@list.ru

Аннотация. В статье даётся элементарное решение задачи Буссинеска для упругого полупространства под действием нормальной сосредоточенной силы на границе. Напряжения принимаются распределёнными в пределах конуса давления, размеры которого определяются из условия равенства максимальных напряжений в приближённом и точном решениях.

Ключевые слова: задача Буссинеска; конус давления; распределение напряжений.