UDC 519.87

Stochastic Approach to the Study of Economic Events

[1] Tatyana A. Shornikova
[2] Anastasia V. Alenina

[1] Penza State Technological Academy, Russia
PhD (Technical)
440605, Penza, pr. Baydukova/ul.Gagarin st., 1a/11
E-mail: shornikovat@mail.ru
[2] Penza State Technological Academy, Russia
440605, Penza, pr. Baydukova/ul.Gagarin st., 1a/11
Assistant Researcher

Abstract. The paper considers the application of stochastic modeling in the study of economic processes. The solution is found in the asymptotic form in the case of several transitions from different states. The transition probabilities are determined by the recurrence formula and after the differential change is converted into economic performance. The main feature of the process – the use of the generating function.

Keywords: stochastic modeling; the probability of transition; generating function; matrix of transition probabilities.

Введение. Характер явлений, с которыми встречаются при исследовании социальных и экономических процессов и управлении ими, требует применения стохастических моделей. Для этих явлений типичны случайные отклонения и взаимосвязь во времени. Применение стохастических моделей при исследовании экономических процессов заключается как в заимствовании моделей, оправдавших себя в других областях, так и в разработке специальных моделей, когда ставится цель оценить рассматриваемые явления и изучить особенности оценивающих функций в различных ситуациях. Покажем реальные возможности применения стохастических моделей при изучении экономических явлений, в которых сам характер этих явлений требует стохастического подхода. Если удаётся моделировать ход некоторого процесса, то можно попытаться оценить каждый ход. Далее можно искать такие пути, где комбинация отдельных возможных переходов будет оптимальной с точки зрения оценивания.

Вероятности перехода p_{ij} из состояния i в состояние j можно приписать некоторую оценку r_{ij}. В экономических приложениях такая оценка (цена, единичные затраты) вполне естественна и помогает оценить различные ситуации в сопоставимых единицах (как правило, денежных).

Осуществим расчёт дохода не только для случая одного перехода между состояниями, но и для случая нескольких шагов.

Предположим, что $v_i(n)$ - ожидаемый общий доход после n шагов, если процесс начался с состояния i. Его можно определить по рекуррентной формуле

$$v_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{ij}(r_{ij} + v_j(n-1)), i = 1,..., N. \qquad (1)$$

Отсюда следует, что общий ожидаемый доход зависит не только от матрицы оценок (r_{ij}), но и от общего ожидаемого дохода $v_j(n-1)$ для числа шагов, меньшего на единицу.

Если

$$q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{ij} r_{ij},$$

то (1) можно записать в виде

$$v_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{ij} v_j(n-1), \qquad (2)$$

или в матричной форме

$$v(n) = q + Pv(n-1), \qquad (2')$$

где $v(n)$ - вектор общего ожидаемого дохода после n шагов, q - вектор $\sum_j p_{ij} r_{ij}$, P - матрица вероятностей перехода.

При увеличении n имеет место постоянный прирост $v(n)$. Эта особенность тесно связана с предельными свойствами процесса, описывать который выгоднее с помощью производящей функции (z - преобразования).

Для общего ожидаемого дохода можно написать производящую функцию (z - преобразование) в виде

$$f(z, v) = \sum_{n=0} v(n) z^n. \qquad (3)$$

Поскольку

$$v(n+1) = q + Pv(n),$$

то можно написать

$$\sum_{n=0}^{\infty} v(n+1) z^n = \sum_{n=0}^{\infty} q z^n + \sum_{n=0}^{\infty} Pv(n) z^n, \qquad (3')$$

получаем

$$\frac{1}{z}(f(z,v) - v(0)) = \frac{1}{1-z} q + Pf(z,v).$$

После преобразования имеем

$$(I - zP) f(z,v) = \frac{z}{1-z} q + v(0).$$

Окончательно получаем

$$f(z,v) = \frac{z}{z-1}(I - zP)^{-1} q + (I - zP)^{-1} v(0). \qquad (4)$$

Если исходному процессу соответствует производящая функция $(I - zP)^{-1}$, то производящая функция дохода также определяется просто, а именно умножением на дополнительные характеристики q или $v(0)$. При этом практически в большинстве случаев $v(0) = 0$, исходный доход часто бывает по логике нулевым (прежде чем процесс начнётся, ни один переход не даёт никакого дохода).

От производящей функции $f(z,v)$ перейдём опять к вектору общего ожидаемого дохода с помощью обратного преобразования. Определим асимптотические формулы для $v(n)$.

Асимптотическое поведение вектора $v(n)$ можно исследовать также на основе известного разложения вероятностей перехода более высокой ступени, например, с помощью производящих функций для стационарной и транзитивной частей

$$(I - zP)^{-1} = \frac{1}{1-z} S + F_z(T), \qquad (5)$$

где $F_z(T)$ - производящая функция транзитивной части (перед умножением на соответствующий вектор).

Если подставить (5) в (4), получим

$$f(z,v) = \frac{z}{(1-z)^2} Sq + \frac{z}{1-z} F_z(T) q + \frac{z}{1-z} Sv(0) + F_z(T) v(0). \qquad (6)$$

В дальнейшем временно предполагается, что $v(0) = 0$.

Функция $\frac{z}{(1-z)^2}$ является производящей функцией $f(n)=n$, $\frac{z}{1-z}$ является функцией $f(n)=1$ и $Sv(0)$ - постоянная. Окончательно можно установить, что $\frac{z}{1-z}F_z(T)$ включает постоянную часть $F_1(T)$ и члены, содержащие более высокие степени дробей, которыми можно пренебречь при большом n. Так же и выражение $F_z(T)v(0)$ включает более высокие степени дробей, которыми можно пренебречь при большом n.

Теперь можно записать:

$$v(n) = nSq + F_1(T)q + Sv(0)\,, \tag{7}$$

где в Sq входят величины, которые, будучи обозначенными через g, составят

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} s_{ij} q_j\,. \tag{8}$$

Это средний доход на один шаг ($q_j = \sum_{i=0} p_{ij} v_{ij}$), взвешенный по предельным вероятностям s_{ij}, показывающим вероятности отдельных состояний после достаточно длительного хода процесса. Если матрица вероятностей перехода регулярна (строки S идентичны и равны вектору π), то процесс имеет единственную предельную оценку (доход)

$$g = \sum_{i=1} \pi_i q_i\,.$$

Вектор-столбец $F_1(\tau)q + Sv(0)$ не зависит от n и включает постоянные члены, зависящие только от i. В общем виде асимптотическое поведение элементов вектора ожидаемых доходов может быть представлено в виде

$$v(n) = ng + v \tag{9}$$

или

$$v_i(n) = ng_i + u_i\,, \tag{9$'$}$$

где в случае регулярной матрицы переходных вероятностей $g_i = g$. Следовательно, получаем систему N уравнений $n+1$ неизвестных.

Откажемся теперь от предположения неизменных оценок переходов. Изменение оценок будет учтено не в полной мере, а на основе умножения матрицы коэффициентов r_{ij} на некоторый коэффициент, который может выражать дисконтный фактор (коэффициент дисконтирования). Коэффициент $\beta < 1$ соответствует начальной величине дохода, который выплачивается в конце некоторого периода (интервала, для которого определятся, произошел или не произошел переход). Указанному коэффициенту соответствует норма процента i, так что $\beta = \frac{1}{1+i}$. Этот коэффициент применяется при процентировании.

Коэффициент может отражать и другие соображения: если речь идет об эффективности живого труда, то она может быть увеличена в результате повышения эффективности общественного труда. Приведенный коэффициент может иметь и вероятностный смысл: $\beta < 1$ означает вероятность дальнейшего повторения процесса. Применение коэффициента целесообразно там, где можно ожидать, что процесс окончится, но не известно точно, когда это произойдет.

Введем отмеченное обстоятельство в уравнение общего ожидаемого дохода изучаемого процесса. Уравнение для $v_i(n)$ будет иметь вид

$$v_i(n) = \sum_j^N p_{ij}[r_{ij} + \beta v_j(n-1)], \qquad (10)$$

или (для $q_i = \sum p_{ij} r_{ij}$)

$$v(n+1) = q + \beta P v(n). \qquad (10')$$

Производящую функцию $f(z,u)$, получим из соотношения

$$\frac{1}{z}[f(z,v) - v(0)] = \frac{1}{1-z} q + \beta P f(z,v)$$

в виде

$$f(z,v) = \frac{1}{1-z}[I - \beta z P]^{-1} q + [I - \beta z P]^{-1} v(0). \qquad (11)$$

Здесь в большинстве случаев опять $v(0) = 0$ (начальный доход равен нулю).

Величины $v_i(n)$ при достаточно большом n будут постоянными, не зависящими от n. Выведем $v(n)$ в общем виде.

При этом будем исходить из того, что выражение $(I - zP)^{-1}$ можно разложить на стационарную (умноженную на $\frac{1}{1-z}$) и транзитивную $F_z(T)$ части, т.е. часть, соответствующую переходному процессу. Поэтому можно записать

$$(I - \beta z P)^{-1} = \frac{1}{1-\beta z} S + F_{\beta z}(T). \qquad (12)$$

Для $f(z,v)$ будем иметь

$$f(z,v) = \frac{z}{1-z}\left[\frac{1}{1-\beta z} S + F_{\beta z}(T)\right] q + \left[\frac{1}{1-\beta z} S + F_{\beta z}(T)\right] v(0). \qquad (13)$$

Коэффициент при $v(0)$ стремится к нулю, коэффициент при q можно представить в виде постоянной и стремящейся к нулю части. Разложением по методу неопределенных коэффициентов можно показать, что постоянная часть определяется величиной

$$\frac{1}{1-\beta} S + F_\beta.$$

Для больших n $f(z,v)$ стремится к величине

$$\frac{1}{1-z}\left[\frac{1}{1-\beta} S + F_\beta\right] q,$$

а $v(n)$ - к величине

$$\left[\frac{1}{1-\beta} S + F_\beta\right] q.$$

Это выражение есть не что иное, как

$$v = (I - \beta P)^{-1} q. \qquad (14)$$

Эту формулу можно получить, расписав выражение

$$v(n+1) = q + \beta P v(0),$$

в котором для $n = 0,1,2,\ldots,$ получим

$$
\begin{aligned}
&v(1) = q + \beta P v(0);\\
&v(2) = q + \beta P q + \beta^2 P^2 v(0);\\
&\dots\\
&v(n) = [\sum_{j=1}^{n-1} \beta^j P^j] q + \beta^n P^n v(0).
\end{aligned}
$$

Так как $\beta < 1$, а выражение в квадратных скобках представляет собой эквивалентное разложение для обратной матрицы, то

$$\lim_{n\to\infty} v(n) = (I - \beta P)^{-1} q\ .$$

Если v_i не зависят от n, то можно записать:

$$v = q + \beta P v\ . \qquad (14')$$

Отметим, что отдельные значения v_i в этом случае получаются решением (14′), так как речь идет об N уравнениях с N неизвестными; в явном виде это записывается соотношением (14).

Примечания:

1. Жакод Ж., Ширяев А.И. Предельные теоремы для случайных процессов. Т. 1. М.: Физматлит, 1994.
2. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория. М.: Прогресс, 1985.
3. Колемаев В.А. Математическая экономика. М.: ЮНИТИ, 1998.
4. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1984.
5. Розанов Ю.А. Теория вероятностей, математическая статистика и случайные процессы. М.: Наука, 1999.
6. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. М.: ФАЗИС, 1998.

УДК 519.87

Стохастический подход при исследовании экономических явлений

[1] Татьяна Александровна Шорникова
[2] Анастасия Валерьевна Алёнина

[1] Пензенская государственная технологическая академия, Россия
Кандидат технических наук, доцент
440605, Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1-а/11
E-mail: shornikovat@mail.ru
[2] Пензенская государственная технологическая академия, Россия
440605, Пенза, пр. Байдукова/ул. Гагарина, д. 1-а/11
Лаборант исследователь

Аннотация. В статье рассматривается применение стохастического моделирования при исследовании экономических процессов. Решение задачи находится в асимптотическом виде в случае нескольких переходов из различных состояний. Переходные вероятности определяются по рекуррентной формуле и после соответствующих дифференциальных преобразований преобразуются в экономические характеристики. Основная особенность процесса – использование производящей функции.

Ключевые слова: стохастическое моделирование; вероятность перехода; производящая функция; матрица вероятностей перехода.