UDC 519.5, 519.6

The Model Estimates of the Coefficient of Turbulent Diffusion on the Differential Characteristics of the Wind Velocity Field, Applied to the Problem of Pollution Transport in the Atmospheric Boundary Layer

Tatiana V. Garshina

North - Caucasus Federal University, Russia
355000, Russia, Stavropol, st. Pushkin 1
PhD student
E-mail: travkinatv@mail.ru

Abstract. A model of a priori estimate of the turbulent diffusion coefficient as measured by the differential characteristics of the wind velocity field in the boundary layer of the atmosphere.

Keywords: mathematical models of transport theory; numerical studies; the evaluation of the atmospheric turbulence; wind speed.

Введение. Коэффициенты турбулентного обмена в направлении координатных осей в условиях пограничного слоя атмосферы, функционально связаны с производными компонент векторного поля скорости ветра по пространственным переменным. В статье рассматривается это направление исследований и его возможные применения в задачах математического моделирования переноса субстанции в турбулентных средах.

В статье [1] подробно изложены постановка обратной задачи для оценки коэффициента турбулентной диффузии из уравнения переноса и этапы построения соответствующего регуляризирующего алгоритма. Уравнение переноса загрязняющих примесей в пограничном слое атмосферы в условиях турбулентности в направлении координатной оси $\overrightarrow{Ox}$ записывается в виде:

$$\dot{q}(x,t) + \alpha q(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\big(V_x(x,t)q(x,t) - K(x,t)q'(x,t)\big) = S(x,t) \qquad (1)$$

В этом дифференциальном уравнении функция $q(x,t)$ описывает поле концентрации переносимого вещества, $V_x(x,t)$ - скорость ветра в направлении оси $\overrightarrow{Ox}$ и $K(x,t)$ - коэффициент турбулентной диффузии. Функция $S(x,t)$ в правой части уравнения (1) описывает распределенный источник в рассматриваемой задаче диффузионного переноса. Решение обратной коэффициентной задачи [1] требует задания в одномерном варианте функций $q(x,t)$, $V(x,t)$ и $S(x,t)$, вводимых в уравнение (1). Помимо этого требуется корректная оценка производных $q'_x(x,t)$ и $q'_t(x,t)$. При решении подобной сложной задачи может быть полезной априорная информация о функциональной связи поля скорости ветра $V(x,t)$ и коэффициентов турбулентной диффузии $K(x,t)$, представленная в виде неких полуэмпирических формул. Следует заметить, что исследования, связанные с построением полуэмпирических формул, как-то в среднем описывающих приближенно пространственно-временную изменчивость физических полей в пограничном слое атмосферы, имеет широкое распространение [2].

Ограничившись этими замечаниями, рассмотрим в качестве примера одну из простейших формул, связывающих значения $K(x,t)$ с характеристиками пространственно-временной изменчивости компонент скорости ветра в условиях пограничного слоя атмосферы, представленную выражением [2]:

$$K = c \cdot L^2 \cdot \left[\left(\frac{\partial V_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}, \qquad (2)$$

где L^2 и c - константы, выбираемые в зависимости от турбулентного состояния атмосферы. В частности, для пограничного слоя атмосферы значения константы L могут меняться в диапазоне от 50 до 2000м. При этом c рекомендуется полагать примерно равным 0.41. В соответствии с формулой (2) значение коэффициента K в некоторой точке поля $P(x,y,z)$ в момент времени t определяется как среднеквадратическое по пространственным производным компонентам скорости ветра. Последнее означает, что практически воспользоваться этой формулой можно лишь в том случае, если определены (заданы) значения системы функций $\left\{\partial V_i(x_1,x_2,x_3,t)/\partial x_j\right\}$, $(i,j=1,2,3)$. Таким образом, в принципе значения коэффициента $K(P,t)$ можно рассматривать как дифференциальную структурную характеристику поля скорости ветра. Поскольку поле скорости ветра является физической величиной, доступной измерениям, то определение указанной выше матрицы частных производных вектора $\vec{V}(P,t)$ по экспериментальным данным следует считать практически обоснованной самостоятельной задачей, решение которой представлено в работе [3].

Возвращаясь к формуле (2) и считая матрицу $\left\{\partial V_i/\partial x_j\right\}$ известной, по крайней мере, в некоторых точках области Ω, запишем формулу вида

$$K_i = c\cdot L^2\cdot\left[\sum_{j=1}^{3}\eta_{i,j}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2},\ (i=1,2,3), \qquad (3)$$

где $\eta_{i,j}$ - некоторые числа, образующие в совокупности матрицу $\left\{\eta_{i,j}\right\}_{3\times3}$ числовых параметров модели (3). Ясно, что из (3) можно получить формулу (2), соответствующим образом подбирая указанные коэффициенты. Если считать, что в данной задаче переноса помимо компонент скорости ветра $V_i(P,t)$ представлена матрица $\left\{\partial V_i/\partial x_j\right\}$, а также имеет место формула (3), то параметризованную модель переноса можно записать в виде

$$\begin{cases} \dot{q}+\alpha q+\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}(V_i q)-\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_i\frac{\partial q}{\partial x_i}\right)=S(P,t) \\ K_i = cL^2\left[\sum_{j=1}^{3}\eta_{i,j}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)^2\right]^{1/2}, \quad i=1,2,3 \end{cases} \qquad (4)$$

Последовательность решения уравнений системы (4) должна быть следующая: вычисляются значения компонент поля скорости ветра, затем вычисляются значения коэффициентов турбулентной диффузии (второе уравнение), далее эти оценки могут быть использованы для решения уравнения переноса загрязняющих примесей в атмосфере (первое уравнение).

Рассмотрим вычислительные алгоритм решения второго уравнения системы (4). Предлагаемый ниже алгоритм реализует возможность вычисления соответствующих производных поля скорости ветра. Идея состоит в использовании многочленов Бернштейна в алгоритме численного дифференцирования. Многочлены Бернштейна, как уже отмечалось ранее [4], позволяют аппроксимировать первую и вторую производные функции $f(x)$, $\forall x\in[0,1]$. При этом, согласно свойствам многочленов Бернштейна, $\lim\limits_{n\to\infty}B_n'(x)=f'(x)$ равномерно. Напомним при этом, что

$$B_n'(x)=n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\left(f(x_{k+1})-f(x_k)\right)\cdot P_{n-1,k}(x). \qquad (5)$$

Применим аппроксимационную формулу (5) к задаче численного дифференцирования частных производных поля скорости ветра. Для этого введем равномерную сетку узлов и соответствующие сеточные функции и массивы. Соответствующий алгоритм включает в себя следующие шаги:

а) Каждой точке $\hat{P}(x_1, x_2, x_3) \in \hat{\Omega}$, где $\hat{\Omega} = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ для каждого момента времени $t \in [0,1]$ поставим в соответствие точку на равномерной сетке узлов $P(x_m, x_l, x_k)$ в момент t_j, где $m = \overline{0, M}$, $l = \overline{0, L}$, $k = \overline{0, K}$, $j = \overline{0, N}$. В этом случае будем иметь массивы значений $\{V_i(x_m, x_l, x_k, t_j\}$, $i = 1,2,3$;

б) $j = 0$;

в) $i = 1$;

г) $k = \overline{0, K}$; $l = \overline{0, L}$; $m = \overline{0, M-1}$;

$$B_M(x_1, t_j) \approx \frac{\partial V_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_1}, \quad \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$B_M(x_1, t_j) = M \cdot \sum_{m=0}^{M-1} \big(V_i(x_{m+1} \mid x_l, x_k, t_j) - V_i(x_m \mid x_l, x_k, t_j)\big) \cdot P_{M-1,m}(x_1), \quad \forall x_1 \in [0,1];$$

д) $k = \overline{0, K}$; $m = \overline{0, M}$; $l = \overline{0, L-1}$;

$$B_L(x_2, t_j) \approx \frac{\partial V_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_2}, \ \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$B_L(x_2, t_j) = L \cdot \sum_{m=0}^{L-1} \big(V_i(x_{l+1} \mid x_m, x_k, t_j) - V_i(x_l \mid x_m, x_k, t_j)\big) \cdot P_{L-1,l}(x_2), \quad \forall x_2 \in [0,1];$$

е) $m = \overline{0, M}$; $l = \overline{0, L}$; $k = \overline{0, K-1}$;

$$B_K(x_3, t_j) \approx \frac{\partial V_i(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial x_3}, \ \forall t \in [t_j, t_{j+1}],$$

$$B_K(x_3, t_j) = K \cdot \sum_{m=0}^{K-1} \big(V_i(x_{k+1} \mid x_m, x_l, t_j) - V_i(x_k \mid x_m, x_l, t_j)\big) \cdot P_{K-1,k}(x_3), \quad \forall x_3 \in [0,1];$$

ж) $i = i + 1$, если $i \le 3$, то перейти на шаг б), иначе – на шаг з);

з) $j = j + 1$, если $j \le N$, то перейти на шаг а), иначе – конец алгоритма.

Предложенный алгоритм [а-з] позволяет вычислить значение частной производной $\{\partial V_i / \partial x_j\}$ в любой точке $\hat{P}(x_1, x_2, x_3) \in \hat{\Omega}$, где $\hat{\Omega} = [0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ в момент t_j в отличие от предыдущего алгоритма, позволяющего получать дискретные значения частных производных. Найденные значения производной подставляем во второе уравнение системы (4) и получим оценку коэффициента турбулентной диффузии по дифференциальным характеристикам поля скорости ветра в пограничном слое атмосферы.

Модель теории переноса (4) в принципе можно рассматривать как альтернативную той, в которой функции $\vec{V}(P,t)$ и $K_i(P,t)$ выступают как независимые исходные данные. В этом отношении модель (4) более определена и её можно считать лучше обусловленной, как систему дифференциальных уравнений, связывающую $q(P,t)$, $V(P,t)$, $K(P,t)$ и $S(P,t)$. Более подробное рассмотрение этих вопросов выходит за рамки данной статьи.

Заключение. Модель реализована в вычислительном эксперименте с использованием тестового примера, получены результаты по оценке коэффициента турбулентной диффузии, сходимости основных вычислительных схем и их устойчивости к погрешностям в исходных данных.

Примечания:

1. Травкина Т.В. Вычислительный алгоритм оценки коэффициента турбулентной диффузии в модели переноса загрязняющих примесей в атмосфере / Наац В.И. //Сборник

статей VII международной научно-технической конференции «Аналитические и численные методы моделирования естественнонаучных и социальных проблем». Пенза, 2012. С. 58-60.

2. Лайтхман Д.Л. Физика пограничного слоя атмосферы. Л., 1970.

3. Наац В.И. Определение производных эмпирических функций методом интегральных уравнений в задачах переноса. // Изв. ВУЗов. Сев.-Кав. рег. Естеств. науки. Приложение 5'05. Ростов-на-Дону, 2005. С.14-22.

4. Травкина Т.В. Исследование аппроксимации исходных данных при построении вычислительного алгоритма оценки коэффициента турбулентной диффузии в модели переноса загрязняющих примесей в атмосфере // Материалы VII Всероссийской научно-практической конференции молодых ученых «Наука и устойчивое развитие». Нальчик, 2013. С.134-136.

УДК 519.5, 519.6

Модель оценки коэффициента турбулентной диффузии по дифференциальным характеристикам поля скорости ветра, применительно к задаче переноса загрязнений в пограничном слое атмосферы

Татьяна Васильевна Гаршина

Северо-Кавказский федеральный университет, Россия
355009, г. Ставрополь, ул.Пушкина, 1
Соискатель
E-mail: travkinatv@mail.ru

Аннотация. Рассматривается модель априорной оценки коэффициента турбулентной диффузии, определяемого по дифференциальным характеристикам поля скорости ветра в пограничном слое атмосферы.

Ключевые слова: математические модели теории переноса; оценка атмосферной турбулентности; скорость ветра.