UDC 519.21

About Nested Circuits Markov in one Parametric Queueing Model

[1] Arsen R. Simonyan
[2] Rafik A. Simonyan
[3] Elena I. Ulitina

[1] Sochi State University, Russia
Sovetskaya street 26a, Sochi, 354000
PhD (Physical and mathematical)
E-mail: oppm@mail.ru
[2]Kuban State University, Russia
Stavropolskaya street 149, Krasnodar, 350040
Graduate student
E-mail: raf55@list.ru
[3] Sochi State University, Russia
Sovetskaya street 26a, Sochi, 354000
PhD (Physical and mathematical)
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Abstract. In operation the single-channel queuing system with several Poisson entering flows and with Kleynrok's parametric discipline is considered. The Markov circuit which is received on a basis a vector of processes of the maximum priorities of flows of calls is completely studied.

Keywords: Markov chain; Kleynrok's model; probabilities of statuses; stationary mode.

Введение. Среди моделей очередей с несколькими входящими потоками особою место занимает модель, обозначаемая по классификации Кендалла-Башарина, как $M_r|C_r|1|\infty$.

В одноканальную систему с ожиданием поступают независимые пуассоновские потоки 1-вызовов, ..., r-вызовов с параметрами $a_1,...,a_r$ соответственно. Длительности обслуживания вызовов независимы в совокупности, не зависят от процесса поступления и для k-вызовов, $k=\overline{1,r}$ имеют функцию распределения $B_k(x), B_k(+0)=0$.

В момент t=0 в системе отсутствуют вызовы.

Разнообразие рассматриваемых и литературе дисциплин – источник *традиционных* постановок задач в математической теории очередей. Например, весьма широк класс консервативных дисциплин. Дисциплина *консервативна,* если работа (время обслуживания) не создается и не исчезает внутри модели, а привносится в модель извне.

В модели $M_r|C_r|1|\infty$ интерес вызывают подклассы консервативных дисциплин – дисциплины, зависящие от свободных параметров, варьируя которыми (параметрами), разработчик технической системы (сам!) может на этапе проектирования подобрать конкретные значения параметров, наиболее подходящие в его конкретных условиях.

Л.Клейнрок [1, 153], приводит следующий пример, подтверждающий необходимость рассмотрения *параметрических дисциплин.* Перед разработчиком технической системы ставится задача. Подобрать конкретную дисциплину модели $M_r|C_r|1|\infty$ так, чтобы отношения $\omega_{k1}/\omega_{k-11}, k=\overline{1,r}, \omega_{01}=1$ лежали в заранее заданных пределах. Здесь $\omega_{k1}, k=\overline{1,r}$ – стационарное среднее времени ожидания k-вызова.

В настоящей статье рассматривается следующая *дисциплина Клейнрока.* [2,3]. Поступивший в момент τ>0 в модель и не попавший до момента t, t>τ, на прибор k-вызов, в момент t получает приоритет

$$q_k(t)=b_k(t-\tau),$$

где $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_r > 0$ – заранее заданные числа. В моменты окончаний обслуживаний среди вызовов, находящихся в очереди, на обслуживание выбирается вызов с наибольшим приоритетом. Если таких вызовов несколько, то среди них выбирается тот, который поступил в систему раньше (или позже).

Дисциплина Клейнрока является (r-1)-параметрической и консервативной дисциплиной, зависящей от отношения (параметров) $b_2 / b_1, b_3 / b_2, \ldots, b_r / b_{r-1}$. Случаи $b_1 = \ldots = b_r$ и $b_{k+1} / b_k \to 0, k = \overline{0,1}$, соответствуют дисциплинам FIFO и относительных приоритетов [2].

Рассмотрим модель Клейнрока, в которой без ограничения общности считаем, что $0 < b_r < b_{r-1} < \ldots < b_1$.

Описание вложенной цепи Маркова. Перенумеруем вызовы в порядке обслуживания числами 1,2,..., независимо от номеров потоков, которым они принадлежат.

Пусть $t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots$ и $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots$ – последовательные моменты *начал* и *завершении* обслуживания вызовов. Здесь t'_n и t_n, $n \geq 1$ – моменты начала и завершения обслуживания n-того вызова. Обозначим через $\eta_k(t), k = \overline{1,r}, t \geq 0$ *максимальный* приоритет k-вызовов в *очереди* в момент времени t. Другими словами, $\eta_k(t), k = \overline{1,r}, t \geq 0$ – это приоритет того k-вызова из очереди в момент t, который поступил в систему *раньше* остальных k-вызовов, присутствующих в очереди в момент t. Если в момент t *в очереди* нет k-вызовов, $k = \overline{1,r}$, то полагаем, $\eta_k(t) = 0$. Обозначим через $\zeta(t), t \geq 0$ номер потока вызова, обслуживаемого в момент t. Если в момент t система свободна, то полагаем $\zeta(t) = 0$.

Вложенная в вектор-процесс $\{(\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_r(t); \zeta(t) : t \geq 0)\}$ вектор-последовательность

$$\{(\eta'_n, \zeta'_n)\} = \{(\eta'_{1n}, \ldots, \eta'_{rn}; \zeta'_n)\}, \tag{1}$$

где $\eta'_{kn} = \eta_{kn}(t'_n - 0), \zeta'_n = \zeta(t'_n + 0), k = \overline{1,r},$, образует *однородную цепь Маркова с непрерывным множеством состояний*. Аналогично, вложенная в вектор-процесс $\{(\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_r(t) : t \geq 0)\}$ вектор-последовательность

$$\{\eta_n\} = \{(\eta_{1n}, \eta_{2n}, \ldots, \eta_{rn})\}, \tag{2}$$

где $\eta_{kn} = \eta_{kn}(t_n - 0)$, $k = \overline{1,r}, n \geq 1$ образует *однородную цепь Маркова с непрерывным множеством состояний*. Отметим, что вектор-процесс

$$\{(\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_r(t) : t \geq 0)\}$$

не является марковским процессом. Кстати, то же самое справедливо и для вектор-процесса $\{(\eta_1(t), \eta_2(t), \ldots, \eta_r(t); \zeta(t) : t \geq 0)\}$

Обсуждение. Обсудим последовательность (1). Пусть

$$\eta(t) = (\eta_1(t), \ldots, \eta_r(t)) = x = (x_1, \ldots, x_r).$$

Это означает, что при данном t>0 имеют место равенства, т.е. максимальный приоритет k-вызовов, $k = \overline{1,r}$, в очереди в момент t равен x_k. Тогда говорим, что очередь имеет приоритет типа x.

Пусть задан вектор $\eta'_n = x$, где x имеет *попарно различные положительные* компоненты. Так как P (η'_n содержит совпадающие положительные компоненты)=0, то в дальнейшем случай совпадающих положительных компонент можно не учитывать. Речь не идет о наличии нескольких нулевых компонент у вектора x.

Вектор x с попарно различными положительными компонентами *однозначно* определяет вектор $i=(i_1,i_2,...,i_r)$ со следующими свойствами:

1.Компоненты вектора i попарно различны и принимают значения из множества {1,2,....,i};

2. Если $x_m < x_l$ при $m \neq l$, то $i_m < i_l$.

Таким образом, если в векторе л с положительными компонентами m-тыи поток (с максимальным приоритетом x_m) по приоритету "опережают" p и "отстают" r-p-1 потоков, то $i_m = p$. Итак, вектор i упорядочивает потоки по имеющимся приоритетам.

Если вектор $\eta'_n = x$ и вектор x имеет m нулевых и r-m попарно различных положительных компонент, то вектор i определяется однозначно следующими свойствами:

1. Последние m компонент вектора i равны нулю;
2. Первые r-m компонент вектора i попарно различны и принимают значения из множества {1,2,...,r-m};
3. Если $0<x_j<x_l$ при $j \neq l$, то $i_j > i_l$, где $i=(i_1,...,i_r)$.

Как правило, анализ марковских цепей по моментам t_n, $n \geq 1$ проще, чем по моментам t'_n (см.. например, [1]). Поэтому мы рассмотрим вектор-последовательность (2).

Вероятности состояний. При заданном векторе $x=(x_1,...,x_r)$ с неотрицательными компонентами под записью $\{\eta_n \leq x\}$ будем понимать событие

$$\{\eta_{1n} \leq x_1, \eta_{2n} \leq x_2, ..., \eta_{rn} \leq x_r\}$$

Вектор-последовательность (2) будем описывать с помощью непрерывных *справа* конечномерных распределений

$$p_n(x) = \sum p_{kn}(x), \; p_{kn}(x) = p(\eta_n < x, \zeta_n = k), \; k = \overline{1,r}.$$

где $\zeta_n = \zeta(t_n - 0)$. Это вызвано тем, что $p(\eta_{kn} = 0) > 0$ при всех $k = \overline{1,r}$ и $n \geq 1$.

Пусть: $d_x = d_{x_1} ... d_{x_r}$, где d – знак дифференциала; $d_x p_{kn}(x)$ есть вероятность того, что n-тым обслуживается k-вызов, и в момент t_n-0 очередь имеет приоритет типа x, где для корректности полагаем $d_{x_1} = 1$, если $x_i = 0, i = \overline{1,r}$.

Множество *состояний* x марковской цепи (2) сплошь заполняет точки множества $\underbrace{R^+ \times \ldots \times R^+}_{r}$, где $R^+ = [0,+\infty)$, а $\times$ – знак декартова произведения.

Замечание 1. Пусть $g_m = (a_m, b_m, B_m(\bullet))$. Функционирование системы однозначно регулирует набор параметров $(g_1, g_2, ..., g_r)$. При каждом $n \geq 1$ вероятность $p_n(x)$ *симметрична* относительно своих аргументов в следующем смысле. Если x_i и x_j поменять местами, то при обмене параметрами потоков i-вызовов и j-вызовов (g_i на g_j) значение вероятности $p_n(x)$ не меняется.

По вектору x введем интегральные преобразования следующим образом. Пусть x имеет k положительных и r-k нулевых компонент, числа $i_1 < ... < i_k$ определяют номера положительных компонент. Обозначим

$$p^*_{in}(s_{i_1}, ..., s_{i_k}) = \int_{0+}^{\infty} ... \int_{0+}^{\infty} \exp\left\{ - \sum_{j=1}^{k} s_{i_j} \cdot x_{i_j} \right\} d_x p_{in}(x), \; k = \overline{1,r}, \; n \geq 1 \qquad \textbf{(3)}$$

где $s = (s_1, ..., s_r)$ – вектор с неотрицательными компонентами.

При заданном k имеется C_r^k таких интегральных преобразований (i фиксируем). Суммируя их, получаем преобразование *уровня* k:

$$p_{in}^*(k;s)=\sum_{(i_1,\dots,i_k)} p_{in}^*\left(s_{i_1},\dots,s_{i_k}\right),\ k=\overline{1,r},\ n\geq 1. \qquad (4)$$

Преобразования уровней r и 0 имеют виды

$$p_{in}^*(s)=p_{in}^*(r;s)=\int_{0+}^{\infty}\cdots\int_{0+}^{\infty}\exp\left\{-\sum_{m=1}^{r}s_m\cdot x_m\right\}d_x p_{in}(x)$$

и $p_{in}^*=p_{in}^*(0;s)=p_{in}^*\left(0^{(r)}\right),\quad 0^{(r)}=\underbrace{(0,0,\dots,0)}_{r}$ соответственно. Отметим, что $p_n\left(0^{(r)}\right)$ есть вероятность того, что n-тый обслуженный вызов является i-вызовом и после себя оставляет систему пустой. Наконец, положим,

$$P_n(s)=\sum_{i=1}^{r}P_{in}(s),\ P_{in}(s)=p_{in}^*+\sum_{k=1}^{r},\ p_{in}^*(k;s),\ k=\overline{1,r},\ n\geq 1. \qquad (5)$$

Пусть независимо от функционирования системы наступают s_1-катастрофы,..., s_r-катастрофы, образующие независимые пуассоновские потоки с параметрами $s_1\geq 0,\dots,s_r\geq 0$ соответственно. Если за времена, равные максимальным приоритетам 1-вызовов,...,r-вызовов в очереди в момент t не наступают s_1-катастрофы,...,s_r-катастрофы соответственно, то говорим, чти в момент t имеется приоритетный набор без катастроф.

Функция $p_{in}^*\left(s_{i_1},\dots,s_{i_k}\right)$ (см.(3)) интерпретируется как вероятность того, что n-тым обслуживается i-вызов, в момент t_n-0 имеется приоритетный набор без катастроф, в очереди имеется не менее одного вызова из каждого потока с номерами $i_1,\dots,i_k$, и нет вызовов других потоков. Функция (см.(3)-(5))

$$P_{in}(s)=\underbrace{\int_{0-}^{\infty}\cdots\int_{0-}^{\infty}}_{r}\exp\left\{-\sum_{m=1}^{r}s_m\cdot x_m\right\}d_x p_{in}(x),\ k=\overline{1,r},\ n\geq 1,$$

есть вероятность того, что в момент t_n-0 имеется приоритетный набор без катастроф, и n-тым обслуживается i-вызов. $P_n(s)$ (см.(5)) есть вероятность того, что в момент t_n-0 имеется приоритетный набор без катастроф.

<u>Замечание 2</u>. Гак как s_i относится к потоку i-вызовов, то в вероятности $p_{in}\left(s_{i_1},\dots,s_{i_k}\right)$ можно опустить условие $i_1<\dots<i_k$.

<u>Замечание 3</u>. С учетом замечания 2, пусть $i_1,\dots,i_k,\ j_1,\dots,j_{r-k}$ попарно различны и принимают значения из множества $\{1,2,\dots,r\}$.

Вероятность $p_n^*\left(s_{i_1},\dots,s_{i_k}\right)$ можно получить из $p_n^*\left(s_1,\dots,s_k\right)$ помощью следующей пошаговой процедуры.

1. Если $i_m\leq k$, то параметры потока i_m-вызовов $\left(g_{i_m}\right)$ сохраняем. Образуем множество A': A' есть $\{1,2,\dots,k\}$ минус те индексы i_m, *для* которых $i_m\leq k$.

2. Если $j_l>k$, то параметры потока j_l-вызовов $\left(g_{i_l}\right)$ сохраняем. Образуем множество B': B' *есть* $\{1,2\dots,k\}$ минус те индексы j_l, для которых $j_l>k$.

3. Множества A' и $A=\{i_m : i_m > k\}$ имеют одинаковое число элементов. Между A' и A устанавливаем взаимнооднозначное соответствие и по нему обмениваем параметры соответствующих потоков.

4. Множества B' и $B=\{j_l : j_l \le k\}$ имеют одинаковое число элементов. Между B' и B устанавливаем взаимнооднозначное соответствие и по нему обмениваем параметры соответствующих потоков.

Отметим, что в обозначениях настоящего пункта специфика дисциплины Клейнрока не проявилась.

Стационарный режим. Нас интересуют стационарные величины $\overline{\eta_k}$, $k=\overline{1,r}$, максимального приоритета k-вызовов в момент окончания обслуживания и стационарная функция распределения $P(\eta \le x) = p(x)$, где $\eta = (\overline{\eta_1},...,\overline{\eta_r})$.

Пусть $\beta_{k1} = \int\limits_0^\infty x dB_k(x)$, $k=\overline{1,r}$, $p_1 = \sum\limits_{i=1}^r a_i \beta_{i1}$

<u>Теорема</u> *Условие* $p_1 < 1$ *служит условием существования стационарного распределения у вектор-последовательности* (2).

Доказательство. Обозначим через $q_{in}(m)$, где $m=(m_1,...,m_r)$, $m_1 \ge 0,...,m_r \ge 0$, вероятность того, что в момент $t_n - 0$ имеется очередь типа m, т.е. в очереди находятся m_1 штук 1-вызовов,...,m_r – r-вызовов, и n-тым обслуживается i-вызовов.

Поскольку при $p_1 < 1$ среднее общего периода занятости модели $M_r|G_r|1|\infty$ конечно (см. [4]) в классе консервативных дисциплин, а случайная вектор-последовательность длин очередей (с учетом типа обслуживаемого вызова) в момент окончаний обслуживаний вызовов образует регенерирующий процесс, то по теореме из [5], том 2., с. 446, при $\rho_1 < 1$ существуют стационарные вероятности

$$q_i(m) = \lim_{n \to +\infty} q_{in}(m), \quad |m| = m_1 + ... + m_r > 0,$$

$$\sum_{i=1}^r \sum_{|m| \ge 0} q_i(m) = 1, \tag{6}$$

того, что к моменту окончания обслуживания имеется очередь типа m, и обслуживается i-вызов. Пусть максимальный приоритет i-вызов, $i=\overline{1,r}$ в момент $t_n - 0$ в очереди равен x_i (см. рис. 1)

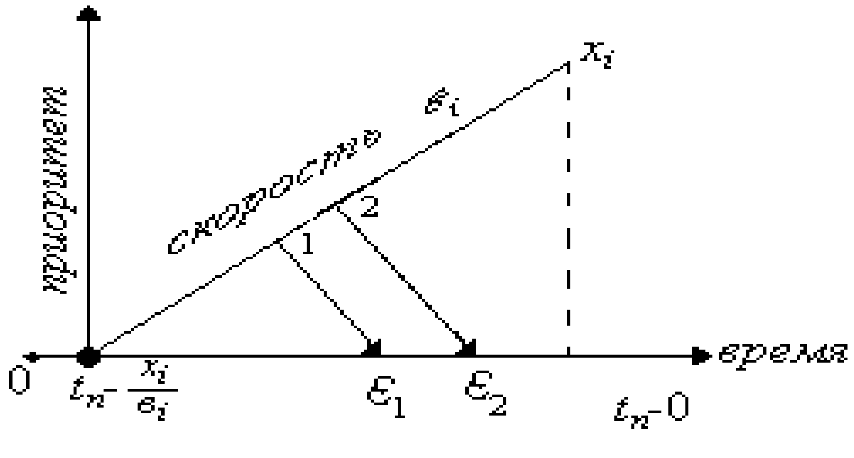

Рис. 1.

Это означает, раньше всех поступивших в систему i-вызов из числа присутствующих в очереди в момент $t_n - 0$ i-вызовов поступил в систему в момент $t_n - \frac{x_i}{b_i}$. Очередь i-вызовов в момент $t_n - 0$ складывается из этого i-вызова и i-вызовов, поступивших в промежутке времени $\left(t_n - \frac{x_i}{b_i}, t_n\right)$ длины $\frac{x_i}{b_i}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ – моменты поступлений i-вызовов на рис. 1.

Вышесказанное справедливо для класса консервативных дисциплин с дисциплиной FIFO (first input – first output) внутри потоков, и в этом случае доказывается теорема 1.

Образуем производящую функцию, когда у вектора x компоненты $x_{i_1} > 0, \ldots, x_{i_k} > 0$, а остальные равны нулю:

$$q_{in}^*\left(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\right) = \sum_{m_{i_1} > 0} \sum_{m_{i_k} > 0} q_{in}(m) z_{i_1}^{m_{i_1}} \ldots z_{i_k}^{m_{i_k}} =$$

$$= \underbrace{\int_{0+}^{\infty} \ldots \int_{0+}^{\infty}}_{k} \exp\left\{ - \sum_{j=1}^{k} \frac{a_{i_j}}{b_{i_j}} \left(1 - z_{i_j}\right) \cdot x_{i_j} \right\} d_x p_{in}(x), \tag{7}$$

$$0 \le z_{i_1} \le 1, \ldots, 0 \le z_{i_k} \le 1,\ n \ge 1,\ i = \overline{1, r}$$

Согласно (6), при $p_1 < 1$ и $n \to +\infty$ существует предел левой части (7):

$$q_i^*\left(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\right) = \lim_{n \to \infty} q_{in}^*\left(z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}\right). \tag{8}$$

Сравнивая (3) и (7), заключаем, что при $p_1 < 1$ существует предел

$$p_i^*\left(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\right) = \lim_{n \to +\infty} p_{in}^*\left(s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}\right) =$$

$$= \frac{\lim\limits_{n \to +\infty} q_{in}^*\left(1 - \frac{s_{i_1}}{a_{i_1}}, \ldots, 1 - \frac{s_{i_k} \cdot b_{i_k}}{a_{i_1}}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{s_{i_j} \cdot b_{i_j}}{a_{i_j}}\right)} = \frac{q_{in}^*\left(1 - \frac{s_{i_1}}{a_{i_1}}, \ldots, 1 - \frac{s_{i_k} \cdot b_{i_k}}{a_{i_1}}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{k}\left(1 - \frac{s_{i_j} \cdot b_{i_j}}{a_{i_j}}\right)} \tag{9}$$

в области $s_{i_j} = \left[0, \frac{a_{i_j}}{b_{i_j}}\right], \quad j = \overline{1, k}$. Таким образом, согласно (8), (3)-(5), при $p_1 < 1$ в области $s_i = \left[0, \frac{a_i}{b_i}\right], \quad i = \overline{1, r}$ установлено существование пределов

$$P_i(s) = \lim_{n \to +\infty} P_{in}(s), \quad s_1 \ge 0, \ldots, s_r \ge 0, \quad i = \overline{1, r}. \tag{10}$$

Покажем, что

$$\sum_{i=1}^{r} P_i\left(0^{(r)}\right) = 1. \tag{11}$$

Пусть независимо от функционирования системы каждый k-вызов, $k=\overline{1,r}$, независимо от других вызовов, является красным с вероятностью z_k. Тогда

$$Q_n(z)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{|m|\geq 0}q_i(m)=1,\quad n\geq 1,\quad 0\leq z_i\leq 1,\quad i=\overline{1,r},$$

есть вероятность того, что в момент t_n-0 в очереди все вызовы красные. Здесь, если $m=(m_1,...,m_r)$ и $z=(z_1,...,z_r)$ – два вектора размерности r, где $m_k\geq 0$, m_k – целочисленны, $0\leq z_k\leq 1, k=\overline{1,r}$, то $z^m = z_1^{m_1}...z_r^{m_r}$.

Вероятность "окраса" вызовов, аналогично интерпретации (3)-(5) введение "катастроф", позволяет при каждом $n\geq 1$ получать следующие равенства

$$Q_{in}(z)=q_{in}(0(r))=\sum_{k=1}^{r}\sum_{(i_1,...,i_k)}z_{i_1}...z_{i_k}q_{in}^{*}\left(z_{i_1},...,z_{i_k}\right),$$

$$Q_{in}(z)=\sum_{i=1}^{r}Q_{in}(z), i=\overline{1,r}, n\geq 1. \tag{12}$$

Здесь во внутренней сумме суммируется так же, как и в (4). Отсюда, учитывая (8), при $p_1<1$ получаем

$$Q_i(z)=\lim_{n\to+\infty}Q_{in}(z)=q_{in}\left(0^{(r)}\right)=\sum_{k=1}^{r}\sum_{(i_1,...,i_k)}z_{i_1}...z_{i_k}q_{in}^{*}\left(z_{i_1},...,z_{i_k}\right),$$

$$i=\overline{1,r}, n\geq 1.$$

Из (9) при $\rho_1<1$ следует

$$p_i^{*}\left(s_{i_1},...,s_{i_k}\right)\Big|_{s_{i_1},...,s_{i_k}=0}=q_i^{*}\left(z_{i_1},...,z_{i_k}\right)\Big|_{z_{i_1},...,z_{i_k}=1}, i=\overline{1,r},$$

для любого набора $(i_1,...,i_k), k=\overline{1,r}$. Из сравнения (5) и (12) при $p_1<1$ вытекает

$$Q_i\left(1^{(r)}\right)=p_i\left(0^{(r)}\right), i=\overline{1,r},$$

где $1^{(r)}=\underbrace{(1,1,\cdots,1)}_{r}$ и $Q\left(1^{(r)}\right)=\lim_{n\to+\infty}Q_n\left(1^{(r)}\right)=p\left(0^{(r)}\right)$.

Согласно (6), $Q\left(1^{(r)}\right)=1$, откуда получаем (11). Таким образом, в области $\left\{s_i\in\left[0,\frac{a_i}{b_i}\right], i=\overline{1,r}\right\}$ имеем

$$P(s)=M\exp\left\{-\sum_{i=1}^{r}s_i\cdot\overline{\eta_i}\right\},$$

где $Q\left(1^{(r)}\right)=1$.

Преобразование Лапласа-Стильтьеса $p(s)$ в данной окрестности нуля однозначно определяет стационарную функцию распределения $p(x)=p(\bar{\eta}\le x)$, где $p\underbrace{(+\infty,...,+\infty)}_{r}$.

Теорема 6 доказана.

Уравнения равновесия. Введем уравнения для $d_x p_i(x), i=\overline{1,r}$ – вероятности того, что обслуживается *i*-вызов, и к завершению его обслуживания очередь имеет приоритет типа $x=(x_1,...,x_r)$. Такие уравнения называют уравнения *равновесия*. По очереди приоритета типа $(x_1b_1, x_2b_2,...,x_rb_r)$, где $x_1>0,...,x_r>0$, запишем вектор $(b_{i_1}x_{i_1}, b_{i_2}x_{i_2},...,b_{i_r}x_{i_r})$, где $x_{i_1}\ge x_{i_2}\ge...\ge x_{i_r}$ и i_k, $k=\overline{1,r}$ – номер потока, для которого x_{i_k} является по величине *k*-тым среди величин $x_1, x_2,..., x_r$.

Составим уравнение равновесия для *i*-вызова, $i=\overline{1,r}$, момент завершения обслуживания которого условно совместим с моментом 0 (см. рис. 2).

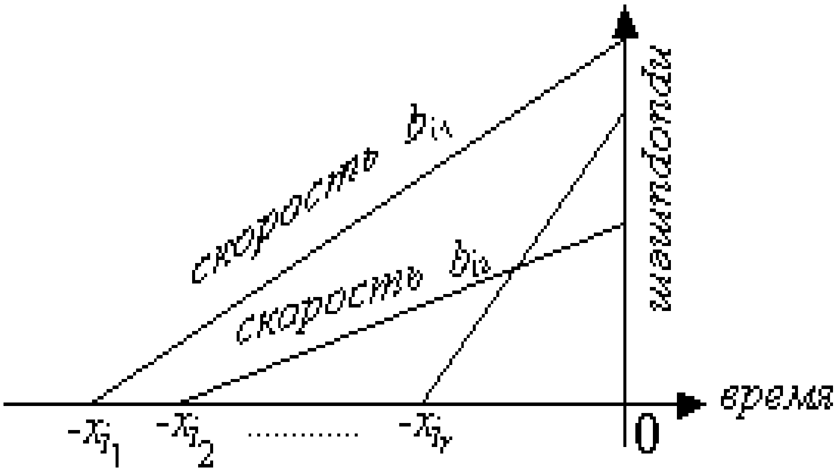

Рис. 2.

На оси ординат указаны значения приоритетов $i_1, i_2,..., i_r$-вызовов (максимальных), а $-x_{i_1}, -x_{i_2},..., -x_{i_r}$ – моменты поступления вызовов, доставляющих максимальные приоритеты потокам $i_1, i_2,..., i_r$ вызовов соответственно.

Обозначим через (-*y*) – момент начала обслуживания данного *i*-вызова, $i=\overline{1,r}$.

Возможны следующие взаимнонепересекающикся случаи

$$y> x_{i_1}, \qquad x_{i_k}<y\le x_{i_{k+1}}, k=\overline{1,r}, \qquad 0<y<x_{i_r}$$

Пусть $y>x_{i_1}$. Тогда в момент начала обслуживания *i*-вызова, $i=\overline{1,r}$ в очереди отсутствуют вызовы. Вероятность этого события равна

$$(1-p_1)\frac{a_i}{\sigma}+\sum p_k^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right). \qquad (13)$$

Действительно, этот случай подразделяется на два подслучая. Либо предыдущий обсужденный вызов оставил систему пустой (вероятность 1-p_1), и первым в свободную систему поступил *i*-вызов (вероятность $\frac{a_i}{\sigma}$); либо предыдущий обслуженный вызов был *k*-

вызовом, $k=\overline{1,r}$ и после себя оставил один i-вызов и ни одного вызова других потоков (вероятность $p_k^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)$).

Пусть $x_{i_k} < y \le x_{i_{k+1}}$, $k=\overline{1,r}$. Ситуация изображена на рис. 3.

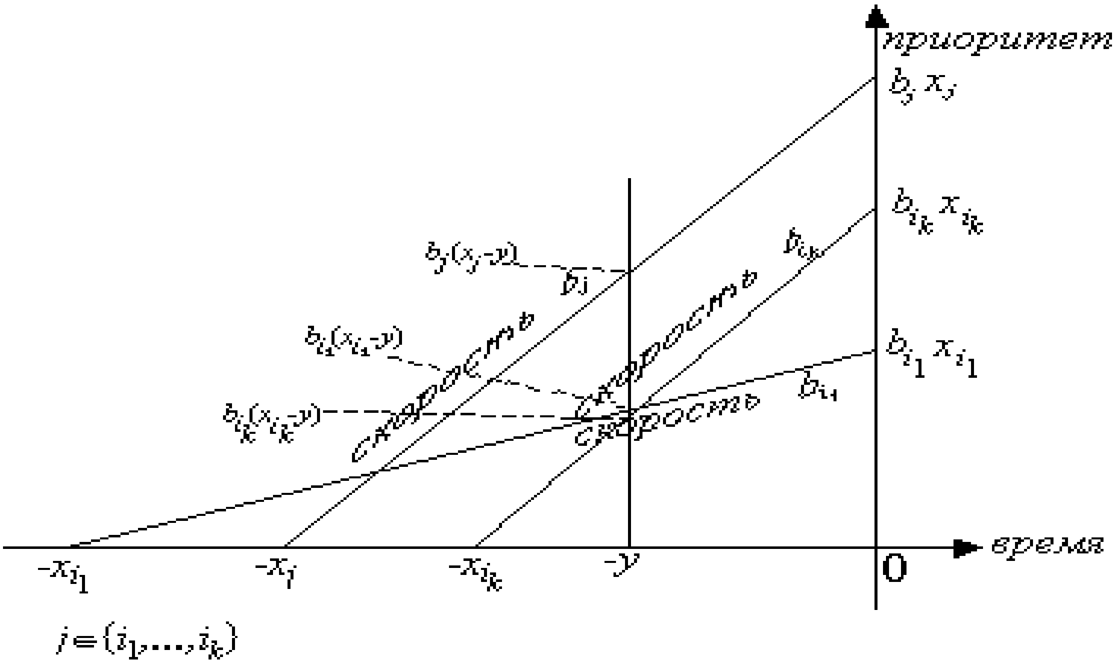

Рис. 3.

В момент (-y+0) начала обслуживания данного iвызова в очереди отсутствуют i_m-вызовы, $m=\overline{k+1,r}$ (первый i_m-вызов поступил в систему в момент x_{i_m} через время y-x_{i_m} с вероятностью $a_{i_m}\cdot\exp\left\{-a_{i_m}\cdot\left(y-x_{i_m}\right)\right\}d_{x_{i_m}}$); максимальные приоритеты потоков i_j-вызовов, $i=\overline{1,k}$ равны $b_{i_j}\left(x_{i_j}-y\right)$. Возможны два взаимоисключающих подслучая $i\in\{i_{k+1},\dots,i_r\}$.

<u>Подслучай $i\in\{i_1,\dots,i_k\}$.</u> Пусть $i=i_j$. Ведем вектор $x^{(k)}$: у $x^{(k)}$ компоненты с номерами i_s, $s\ne j, s\in\{1,2,\dots,k\}$ равны $b_{i_s}\left(x_{i_s}-y\right)$, компонента с номером $i=i_j$ равна b_i и, остальные компоненты равны нулю. Вероятность данного события равна

$$a_{i_{k+1}}\dots a_{i_r}a_i\exp\{-a_i(y-x_i)\}dx_{i_{k+1}}\dots dx_{i_r}dx_i\cdot\int\limits_{\max\limits_{1\le s\le k}\frac{b_{i_s}}{b_i}\left(x_{i_s}-y\right)}^{\infty}\exp\{-a_iu\}\cdot d_{x^{(k)}}\,p\left(x^{(k)}\right),$$

$$d_{x^{(k)}}=d_{x_{i_1}}\dots d_{x_{i_{j-1}}}d_u d_{x_{i_{j+1}}}\dots d_{x_k} \qquad (14)$$

Действительно, предыдущий обслуженный вызов оставляет очередь приоритета типа $x^{(k)}$, где $b_iu\ge\max b_{i_s}\left(x_{i_s}-y\right)$, с вероятностью $d_{x^{(k)}}\,p\left(x^{(k)}\right)$. Здесь b_iu – величина приоритета данного i-вызова. Следующий i-вызов должен поступить в систему лишь через время $u-(x_i-y)$ после поступления данного i-вызова с вероятностью $a_i\cdot\exp\{-a_i(u-(x_i-y))\}d_{x_i}$, чтобы в момент начала обслуживания данного i-вызова приобрести приоритет $b_i(x_i-y)$.

Подслучай $i\in\{i_{k+1},\ldots,i_r\}$. Ведем вектор $x^{(k+1)}$: у $x^{(k+1)}$ компоненты с номерами i_j, $i=\overline{1,k}$, равны $b_{i_j}\left(x_{i_j}-y\right)$, компонента с номером i равна b_i и, остальные компоненты равны нулю. Вероятность данного события равна

$$a_{i_{k+1}}\ldots a_{i_r}a_i\exp\left\{-\sum_{l=k+1}^{r}a_{i_l}\left(y-x_{i_l}\right)\right\}dx_{i_{k+1}}\ldots dx_{i_r}\times$$

$$\times\int\limits_{\max\limits_{1\le s\le k}\frac{b_{i_s}}{b_i}\left(x_{i_s}-y\right)}^{\infty}\exp\{-a_iu\}d_{x^{(k+1)}}\,p\left(x^{(k+1)}\right) \qquad (15)$$

(В отличие от предыдущих подслучаев, к началу обслуживания данного i-вызова в очереди нет других i-вызовов). Пусть $0<y<x_{i_r}$ и $i=i_j$. Введем вектор $\overset{-}{x}^{(r)}$: у $\overset{-}{x}^{(r)}$ компоненты с номерами $l\ne i$, равны $b_l(x_l-y)$, а i-тая компонента равна $b_iu\ge\max\limits_{1\le s\le r}b_{i_s}\left(x_{i_s}-y\right)$. В момент $(-y+0)$ в очереди присутствуют вызовы всех потоков; максимальные приоритеты потоков l-вызовов, $l=\overline{1,r}$ равны $b_l(x_l-y)$. Вероятность данного события равна

$$a_ie^{-a_i(y-x_i)}dx_i\cdot\int\limits_{\max\limits_{1\le s\le r}\frac{b_s}{b_i}(x_s-y)}^{\infty}\exp\{-a_iu\}d_{\overset{-}{x}^{(r)}}\,p\left(\overset{-}{x}^{(r)}\right) \qquad (16)$$

Собирая воедино (13)-(16) при $x_1>0,\ldots,x_r>0$, полагая $b\cdot x=(b_1x_1,b_2x_2,\ldots,b_rx_r)$, получаем

$$d_xp_i(bx)=\left\{(1-p_1)\frac{a_i}{\sigma}+\sum_{k=1}^{r}p_k^*\left(\frac{a_i}{b_i}\right)\right\}\cdot\left[1-B_i\left(\max_{1\le s\le r}x_s\right)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{r-1}a_{i_{k+1}}\ldots a_{i_r}\int\limits_{x_{i_k}}^{x_{i_{k+1}}}\exp\left\{-\sum_{l=k+1}^{r}a_{i_l}\left(y-x_{i_l}\right)\right\}\cdot\left\{\int\limits_{\max\limits_{1\le s\le r}\frac{b_s}{b_i}(x_s-y)}^{\infty}\exp\{-a_iu\}\times\right.$$

$$\left.\times\left[\sum_{\substack{j=1\\ i_j\ne i}}^{k}d_{x^{(k+1)}}\,p\left(x^{(k+1)}\right)+a_i\cdot\exp\{-a_i(y-x_i)\}dx_id_{x^{(k)}}\,p\left(x^{(k)}\right)\right]\right\}dB_i(y)+$$

$$+\int_0^{x_{i_r}} a_i \cdot e^{-a_i(y-x_i)} \cdot \left\{ \int_{\max\limits_{1\le s\le r}\frac{b_s}{b_i}(x_s-y)}^{\infty} \exp\{-a_i u\} d_{\bar{x}^{(r)}}\, p\left(\bar{x}^{(r)}\right) \right\} dB_i(y)dx_i. \qquad (17)$$

Аналогично выводятся уравнения равновесия по очереди приоритета типа $x=(x_1,...,x_r)$, где некоторые компоненты равны нулю. Например, пусть очередь имеет приоритет типа $\left(b_1x_1,...,b_ux_u,\underbrace{(0,...,0)}_{r-u}\right)$, где $x_1>0,...,x_u>0$.

Процедура та же применительно к $x_1,...,x_u$, только в формуле (17) при времени обслуживания у данного iвызова в правой части появляются сомножители $\exp\left\{-\sum_{m=u+1}^{r} a_m y\right\}$ – вероятность того, что за время обслуживания *i*-вызова не поступают $\overline{u,r}$-вызовы. При этом, вероятности $p(x)$ в правой части (17) в векторе *x* содержится нулевые компоненты с номерами *u*, *u*+1,...,*r*, если $i\notin\{u,u+1,...,r\}$, и с номерами *u*,...,*r* без номера *i*, если $i\in\{u,u+1,...,r\}$.

Из-за сложности полученных уравнений их аналитическое исследование затруднено. Однако, решение уравнений может быть найден численными методами путем *дискретизации* значений вектора *x*.

Примечания:

1. Клейнрок Л. Вычислительные системы с очередями. М.: Мир, 1979. С. 600.
2. Симонян А.Р., Сунцова М.А., Улитина Е.И., Об одной теореме для виртуальных времен ожидания в модели Клейнрока // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2008. Т. 15. Вып.3. С.48-49.
3. Симонян А.Р., Улитина Е.И., Нестационарные характеристики в модели Клейнрока с нелинейной функцией приоритета // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2010. Т. 17. Вып. 2. С. 57-80.
4. Гнеденко Б.В., Даниелян Э.А. и др. Приоритетные системы обслуживания. М.: МГУ, 1973. С. 447.
5. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее применения. М.: Мир, 1984. Т.2. С. 751.

УДК 519.21

О вложенных цепях Марков в одной параметрической модели массового обслуживания

[1] Арсен Рафикович Симонян
[2] Рафик Арсенович Симонян
[3] Елена Ивановна Улитина

[1]Сочинский государственный университет, Россия
354000, г.Сочи, ул.Советская, 26а
Кандидат физико-математических наук
E-mail: oppm@mail.ru
[2]Кубанский государственный университет, Россия

350040, г.Краснодар, ул.Ставропольская, 149
Аспирант
E-mail: raf55@list.ru
[3]Сочинский государственный университет, Россия
354000, г.Сочи, ул.Советская, 26а
Кандидат физико-математических наук
E-mail: ulitinaelena@mail.ru

Аннотация. В работе рассматривается одноканальная система массового обслуживания с несколькими пуассоновскими входящими потоками и с параметрической дисциплиной Клейнрока. Полностью изучена марковская цепь, которая получена на основе вектор процессов максимальных приоритетов потоков вызовов.

Ключевые слова. Цепь Маркова; модель Клейнрока; вероятности состояний; стационарный режим.