UDC 519.21

Modelling (B, S)-Markets, Subject to Aggressive Buying of Shares

Elina A. Pilosyan

Sochi State University, Russia
354000, Krasnodar region, Sochi, ul. Sovetskaya, 26 a
PhD
E-mail: azalto@mail.ru

Abstract. The article is devoted to modeling (B, S)-market with a finite number of aggressive buyers of shares, a theoretical study of such models of markets, have developed an algorithm to calculate the hedging of portfolios of various financial obligations.

Keywords: Haar uniqueness; no-arbitrage market share; aggressive buyers.

Введение. Произведем подробный анализ теоретико-вероятностных структур, на которых моделируются (B, S)-рынки с конечным числом агрессивных скупщиков акций. Пусть Ω – конечное множество исходов (ситуаций) на финансовом рынке, тогда фильтрации удобно описывать деревьями. Начнем с самого простого дерева (рис. 1). По нему стохастический базис определяется следующим образом: $\Omega = \{B_1, B_2, \ldots, B_n, G_n\}$, H_n — совокупность всех подмножеств множества Ω, P — некоторая вероятность, нагружающая все точки множества Ω, $\mathbf{H_n} = a\ \{B_i, \ldots, B_n, G_n\}$ — алгебра событий, порожденная элементарными событиями $B_i, \ldots, B_n, G_n$ (т.е. совокупность всевозможных сумм этих элементарных событий плюс пустое множество). Полученная фильтрация $(\mathbf{H}_n)^{N}{}_{=}\Omega$ называется специальной хааровской фильтрацией. На этом стохастическом базисе рассматриваются (B , S)-рынки, где банковский счет и цена акции могут эволюционировать произвольным образом. Событие G_n означает, что в момент времени n акция продолжает торговаться на рынке. Событию B_n придается следующий смысл: если это событие происходит, то это означает, что акция скуплена в момент времени n одним (или усредненным) агрессивным скупщиком. После этого она начинает эволюционировать так же, как банковский счет (в дисконтированном случае при некоторых предположениях ее цена замораживается). Данное обстоятельство адекватно отражает процесс агрессивной скупки: скупленная акция на рынок не возвращается, а ложится «под сукно» вплоть до окончания агрессивной скупки.

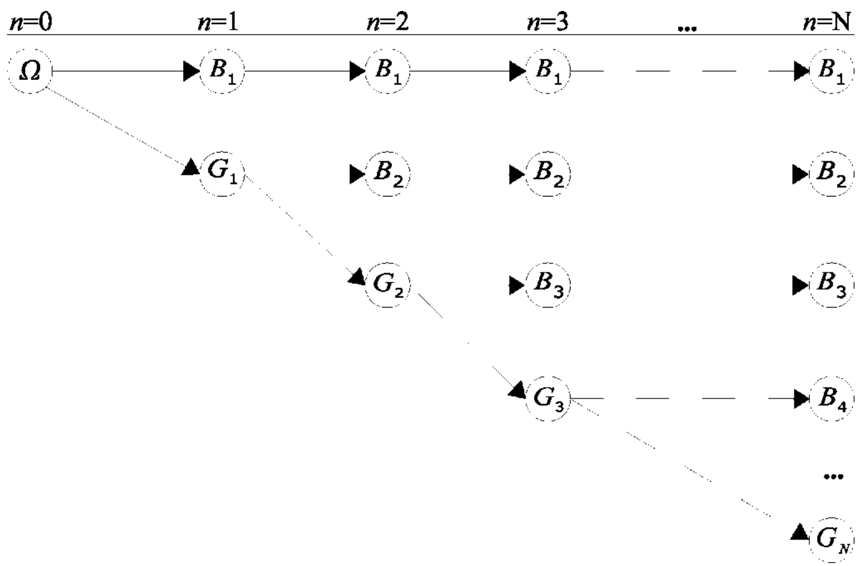

Рис. 1.

Именно этот временной период функционирования рынка можно моделировать с помощью вышеописанной схемы. Хорошие вычислительные свойства этой модели основаны на том, что если выполняются условия безарбитражности рассматриваемого (B , S)-рынка, то этот рынок либо будет полным, либо хотя бы при одном n < N цена акции тривиализуется (на экономическом языке тривиализация означает, что в момент n усредненная цена скупки совпадает с установившейся ценой на нескупленные акции и с ценой акции в предыдущий момент времени).

Перейдем теперь к более сложной модели. Рассмотрим дерево, представленное на рисунке 2.

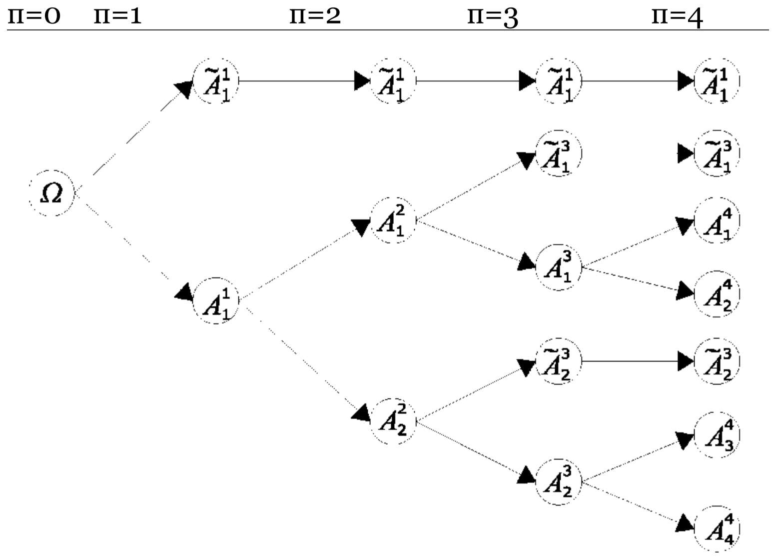

Рис. 2.

Отличительная особенность данной модели состоит в том, что в ней разделены моменты времени, когда происходит объявление новых цен на акции, и моменты, когда совершается целенаправленная скупка акций. Формализуется это обстоятельство следующим образом: предполагается, что в чётные моменты времени объявляются новые цены на акции, а в нечетные, «промежуточные» моменты происходит скупка. Естественно также предполагать, что информация о состоянии рынка в нечётные моменты не является общедоступной и что в нечётные моменты также происходит рыночное колебание цен на акции (возможно, правда, не с такой амплитудой, как в чётные).

В связи с описанным разделением ролей чётных и нечётных времён, алгебры событий, составляющие фильтрацию, имеют различную структуру в чётные и нечётные моменты времени.

Атомы $\tilde{A}_k^i$, i = $\overline{1,n}$, рассматриваются как события, состоящие в том, что в момент времени i акция скуплена и цена её, начиная с этого момента, эволюционирует как банковский счёт. Атом A_k^n, соответствует событию, что на момент времени n акция ещё не скуплена и цена ее продолжает эволюционировать на рынке. Так как скупленные акции в дальнейшем на рынок не попадают, дроблению в каждый момент времени подвергаются лишь атомы A_k^n.Данная схема (на которой тоже естественно рассматривать модель (B , S) -рынка с одним агрессивным скупщиком акций) сложнее, чем модель рынка относительно специальной хааровской фильтрации, однако она является более гибкой и адекватной. К тому же она является предтечей следующей модели, исследование которой требует дополнительного математического аппарата.

Пусть **σ** -алгебра **F**k порождена разбиением **Ω** на атомы A_1, A_2, • • •, A_2k, Bk, где событие A_2k$_{-1}$ означает, что в момент времени к акция скуплена первым скупщиком, A_2k — что в этот момент времени акция скуплена вторым скупщиком, а событие Bk заключается в том, что акция оказалась нескупленной. Эта модель уже не столь благоприятна для обсчета. Дело в том, что рассматриваемый в ее рамках (B , S)-рынок *всегда* неполон (это следует из того, что при переходе от момента к **— 1** к моменту к атом B_{k-1} дробится на *три* атома: A_2k_{-1}, A_2k и Bk. Возникает вопрос: можно ли, имея какие-то дополнительные сведения о данном рынке, преобразовать его в полный? Это можно сделать для достаточно большого класса безарбитражных финансовых рынков.

Пусть для простоты рассматриваемый рынок дисконтирован, а **(F** k^адаптированная случайная последовательность (Z k**)** отражает эволюцию цены скупаемой акции. Через Z k (A i) (соотв., через Z k (B k)) будем обозначать значение случайной величины Z k на атоме A_i, i = 1, 2,. . . , 2n (соотв., значение Z k на атоме B k). Предположим, что данный (B , S)-рынок безарбитражен и для любого к < N числа Z k (A 2k_i), Z k (A 2k**)** и Z k (B k**)** различны, причем ни одно из них не совпадает с $Z\,k_{-1}$ ($B\,k_{-1}$).

Рассматриваемый рынок удовлетворяет свойству *универсальной хааровской единственности* (что означает, что все мартингальные меры этого рынка удовлетворяют СХЕ). Поясним, что проистекает из этого свойства. Пусть, например, нам известно, что первый скупщик всегда опережает второго. Введем следующие σ-алгебры событий: $\mathbf{H_0} = F_0$; $\mathbf{H_1}$ порождается событиями A_1 и $A_2 + B_1$; $\mathbf{H_2} = \mathbf{F_1}$, H_3 порождается событиями A_1, A_2, A_3, $A_4 + B_2$; $\mathbf{H_4} = F_2$; и т.д. до $\mathbf{H_{2N}} = \mathbf{F_N}$. Мы получили специальную хааровскую фильтрацию *H* $=(H_n)_{n=0}^{2N}$, интерполирующую исходную фильтрацию *F* $=(F_k)_{k=0}^{N}$ $=_0$. Рассмотрим *H*-адаптированную случайную последовательность (Y_n) , удовлетворяющую условиям: при 0 ≤ к ≤ N Y_{2k} = Z k (т.е. последовательность (Y k**)** интерполирует (Z_n)) и (B , S)-рынок на стохастическом базисе **(Ω,**$(H_n)_{n=0}^{2N}$, **F** , P) , состоящий из единичного банковского счета и акций $(Y_n)_{n=0}^{2N}$**,** безарбитражен. Легко показать, что тогда этот интерполирующий рынок полон. Ясно, что случайные величины Y_n при нечетных n можно задать многими способами. Поэтому здесь очень важен эффективный прогноз. Если такой прогноз имеется, то это дает возможность выбрать мартингальную меру P * ∈ **P**(Z , *F)*, регулирующую поведение этого рынка, и получить: Y_n = E* [Zn | $\mathbf{H_n}$]. Если нужно исполнить некоторое платежное обязательство F_n, то, применяя хорошо известные формулы расчета для полного и безарбитражного рынка, получаем совершенный хедж ($(\beta_n, \gamma_n)_{n=0}^{2N}$, так что x $=\beta_0 + \gamma_0 Z_0$ — справедливая цена этого платежного обязательства. Отметим, что здесь в процессе хеджирования задействованы не только основные моменты времени к = 0,1,. . . , N , но и промежуточные времена n = 1,3, 5,. . .

Следующим по сложности идет дерево на рис. 3. Рассмотрим стохастический базис, порождаемый этим деревом, и безарбитражный дисконтированный рынок на нем.

Таким образом, если регулирующей мерой данного рынка является мера P * ∈**P**(Z , *F)*, не удовлетворяющая СУХЕ, то, применяя формулу интерполяции Y_n = E* [Zn | $\mathbf{H_n}$], мы можем не получить полный рынок. Таким образом, мы опять оказываемся в условиях неопределенности. Выход такой: нужно с требуемой степенью точности приблизить регулирующую меру P * мартингальной мерой $\tilde{P}$, удовлетворяющей СУХЕ, и осуществить процесс интерполяции, используя эту новую меру. Отметим, что на рис. 3 наличествуют три стабилизирующие события: A_1, A_2, A_3.

к=0 _ к=4 ______ к=2

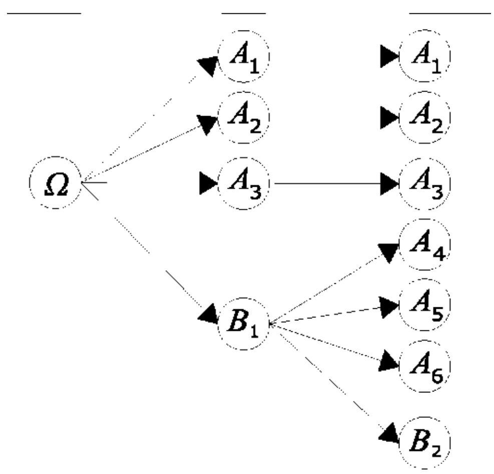

Рис. 3.

Это соответствует случаю агрессивной скупки с тремя агрессивными скупщиками акций. Дальнейшее обобщение данной модели на любое конечное число агрессивных скупщиков не требует новых идей: все делается так же, как в случае трех скупщиков.

Примечания:

1. Пилосян Э.А. Обобщенная одношаговая модель (B, S) – рынка с бесконечным числом скупщиков акций. // В сб.: «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий», СГУТиКД, Тезисы докладов, Сочи, 2008, С. 60-62.
2. Пилосян Э.А., Павлов И.В. Сведение процедуры хеджирования в одношаговой модели (B, S) – рынка со счетным числом состояний к хеджированию на интерполирующем рынке с бесконечным горизонтом. // Обозрение прикл. и промышл. матем., 2009, Т.16, вып.4, С. 690-691.

УДК 519.21

Моделирование (B, S)-рынков, подверженных агрессивной скупке акций

Элина Анатольевна Пилосян

Сочинский государственный университет, Россия
354000, Краснодарский край, г.Сочи, ул. Советская, 26 а
Кандидат технических наук, доцент
E-mail: azalto@mail.ru

Аннотация. Статья посвящена моделированию (B, S)-рынков с конечным числом агрессивных скупщиков акций, проводится теоретическое исследование таких моделей рынков, разработан алгоритм для вычисления хеджирующих портфелей различных финансовых обязательств.

Ключевые слова: хааровская единственность; безарбитражный рынок; акция; агрессивные скупщики.