UDC 519.21

Robustness of the Sign Estimators in the 2D-Autoregression

Vladimir B. Goryainov

Bauman Moscow State University, Russia
2-nd Baumanskaya str., Moscow 105005
PhD (Mathematics)
E-mail: vb-goryainov@mail.ru

Abstract. Process of two-dimensional autoregression of order (1,1) is considered. An explicit expression for the influence functional of the sign estimation of the coefficients of the equation of autoregressive field is obtained. It is shown that the sign estimation is robust.

Keywords: sign estimate; robust estimate; influence functional; gross error sensitivity coefficient.

Введение. Рассмотрим модель пространственной авторегрессии — стационарное поле X_{ij} на прямоугольной целочисленной плоской решётке, описываемое рекуррентным соотношением

$$X_{ij} = a_{10}X_{i-1,j} + a_{01}X_{i,j-1} + a_{11}X_{i-1,j-1} + \varepsilon_{ij}, \qquad i, j = 0,\pm1,\pm2,\ldots. \tag{1}$$

Модель пространственной авторегрессии широко используется в цифровой обработке изображений для устранения дефектов при редактировании изображений. С математической точки зрения проблема заключается в разработке таких методов оценивания вектора коэффициентов $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ по наблюдениям X_{ij}, точность которых, в отличие от метода наименьших квадратов, слабо зависит от предположений о вероятностном распределении поля ε_{ij}.

Одним из таких методов является знаковый метод [1]. В работе [2] предложена оценка параметра a, основанная на знаках остатков

$$\varepsilon_{ij}(a) = X_{ij} - a_{10}X_{i-1,j} - a_{01}X_{i,j-1} - a_{11}X_{i-1,j-1}.$$

Там же при помощи компьютерного моделирования показано ее преимущество над оценкой наименьших квадратов при измерении поля X_{ij} с аномально большими ошибками, имитирующими сбой измерительной аппаратуры.

В данной работе получено аналитическое выражение для функционала влияния знаковой оценки, который является теоретической характеристикой устойчивости (робастности) оценки к ошибкам наблюдений поля X_{ij}. Функционал влияния показывает, насколько сильно изменится оценка при добавлении к выборке достаточно большого объема еще одного наблюдения. Если это изменение в принципе не может быть сколь угодно большим, то оценка называется робастной. Анализ функционала влияния показал преимущество знаковой оценки над оценкой наименьших квадратов при измерении X_{ij} с аномально большими ошибками.

Функционал влияния впервые появился в работе [3] для описания робастных свойств оценок параметров авторегрессионных временных рядов. Функционал влияния является обобщением на временные ряды таких понятий, как кривая чувствительности и функция влияния, которые описывают робастные свойства оценок параметров в одно- и двувыборочных моделях сдвига и масштаба [4,5].

Постановка задачи. Рассмотрим поле (1), где ε_{ij} — независимые одинаково распределённые случайные величины с нулевым математическим ожиданием $\mathrm{E}\varepsilon_{ij} = 0$ и неизвестной функцией распределения F, $a = (a_{10}, a_{01}, a_{11})$ — неизвестный вектор параметров. Достаточные условия стационарности поля (1) приведены в [6,7].

Пусть $X_{ij}, i = 0,\dots,m,\ j = 0,\dots,n$ — наблюдаемая реализация поля (1). Обозначим

$$sign(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x < 0, \\ 1, & \text{если } x \ge 0. \end{cases}$$

Перейдем от наблюдений X_{ij} к знакам остатков

$$S_{ij}(a) = sign(\varepsilon_{ij}(a)), \quad i = 1,\dots,m,\ j = 1,\dots,n.$$

Пусть $a^0 = (a_{10}^0, a_{01}^0, a_{11}^0)$ — некоторый известный вектор. В [2] на основе знаков остатков $S_{ij}(a)$ построены локально наиболее мощные критерии проверки гипотезы

$$H^0 : a = a^0$$

против односторонних альтернатив H_{pq}^+ и H_{pq}^-, $(p,q) \in \mathsf{I} = \{(1,0),(0,1),(1,1)\}$, вида

$$H_{pq}^+ \quad : \quad a_{pq} > a_{pq}^0, a_{kl} = a_{kl}^0\ \forall\ (k,l) \ne (p,q),$$

$$H_{pq}^- \quad : \quad a_{pq} < a_{pq}^0, a_{kl} = a_{kl}^0\ \forall\ (k,l) \ne (p,q),$$

которые выглядят следующим образом.

Определим множество $\{\delta_{ij}(a)\}$ рекуррентным соотношением

$$\delta_{ij}(a) = a_{10}\delta_{i-1,j}(a) + a_{01}\delta_{i,j-1}(a) + a_{11}\delta_{i-1,j-1}(a), \quad i, j = 1,2,\dots$$

с граничными условиями

$$\delta_{00}(a) = 1, \quad \delta_{k0}(a) = (a_{10})^k, \quad k > 0, \quad \delta_{0l}(a) = (a_{01})^l, \quad l > 0,$$
$$\delta_{ij}(a) = 0, \quad i < 0 \text{ или } j < 0.$$

Обозначим

$$Z_{ij}(a) = \sum_{k=i+1}^{m} \sum_{l=j+1}^{n} S_{kl}(a) S_{k-i,l-j}(a), \qquad i = 0,1,\dots,m, \quad j = 0,1,\dots,n,$$

$$W_{pq}(a) = \sum_{i=0}^{m-1-p} \sum_{j=0}^{n-1-q} \delta_{ij}(a) Z_{i+p,j+q}(a), \qquad (p,q) \in \mathsf{I},$$

$$W(a) = (W_{10}(a), W_{01}(a) W_{11}(a)).$$

Теорема 1. Пусть

$$1 - a_{10}^0 z_1 - a_{01}^0 z_2 - a_{11}^0 z_1 z_2 \ne 0, \quad |z_1| \le 1, |z_2| \le 1, \tag{2}$$

а функция распределения $F(x)$ и плотность распределения вероятности $f(x)$ случайных величин ε_{ij} удовлетворяют условиям

$$F(0) = \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$f(0) > 0, \tag{4}$$

$$\mathrm{E}(\varepsilon_{11}) = 0, \tag{5}$$

$$\mathrm{E}[|\, f(\theta u X_{11}) - f(0) \,\|\, X_{11} \,|] \to 0 \text{ при } u \to 0 \text{ для } \theta \in (0,1). \tag{6}$$

Тогда локально наиболее мощный знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H_{pq}^+, если

$$W_{pq}(a^0) > C_{pq}^+, \quad (p,q) \in \mathsf{I},$$

и принимает в противном случае. Постоянная C_{pq}^+ определяется уровнем значимости α критерия.

Теорема 2. В условиях теоремы 1 локально наиболее мощный знаковый критерий отклоняет H^0 в пользу H^-_{pq}, если

$$W_{pq}(a^0) < C^-_{pq}, \quad (p,q) \in \mathrm{I},$$

и принимает в противном случае. Постоянная C^-_{pq} определяется уровнем значимости α критерия.

Доказательство теорем 1 и 2 приведено в [2].

Теоремы 1 и 2 показывают, что небольшие значения $|W_{pq}(a^0)|$ свидетельствуют в пользу H^0, а большие — в пользу H^+_{pq} или H^-_{pq}. Это позволяет определить знаковую оценку параметра a как решение системы уравнений

$$W_{pq}(a) = 0, \quad (p,q) \in \mathrm{I}.$$

Точное решение этого уравнения ввиду разрывности функций $W_{pq}(a)$, вообще говоря, не существует, поэтому знаковой оценкой a естественно считать точку минимума функции $|W(a)|$.

Предположим теперь, что вместо авторегрессионного поля X_{ij} наблюдается поле Y_{ij} вида

$$Y_{ij} = X_{ij} + \nu_{ij}\zeta_{ij}, \tag{7}$$

где ζ_{ij} — независимые одинаково распределённые случайные величины, а ν_{ij} — независимые бернуллиевские случайные величины, принимающие значения 1 и 0 с вероятностями δ и $1-\delta$ соответственно, $0 \le \delta \le 1$. Предположим, что поля ε_{ij}, ν_{ij} и ζ_{ij} не зависят друг от друга. Модель (7) описывает загрязнение поля X_{ij} небольшой долей δ (обычно на практике $0 < \delta < 0{,}2$) ошибочных наблюдений ζ_{ij}, имитирующих сбой с вероятностью δ измерительной аппаратуры.

В этом случае знаковая оценка определяется как решение системы

$$W_{pq}(\delta, a) = 0, \quad (p,q) \in \mathrm{I},$$

где

$$W_{pq}(\delta, a) = \sum_{i=0}^{m-1-p}\sum_{j=0}^{n-1-q}\delta_{ij}(a)Z_{i+p,\,j+q}(\delta, a),$$

$$Z_{ij}(\delta, a) = \sum_{k=i+1}^{m}\sum_{l=j+1}^{n}S_{ij}(\delta, a)S_{i-p,\,j-q}(\delta, a),$$

$$S_{ij}(\delta, a) = sign(Y_{ij} - a_{10}Y_{i-1,\,j} - a_{01}Y_{i,\,j-1} - a_{11}Y_{i-1,\,j-1}).$$

При $\delta > 0$ знаковая оценка $\hat{a}_{mn}$ параметра a^0 не обязана быть состоятельной, т.е. предел

$$\lim_{m,n\to\infty} \hat{a}_{mn} = a(\delta),$$

если он существует, не обязан совпадать с a^0. Перестает быть состоятельной и оценка наименьших квадратов (см. [8]). Тем не менее, если разность $a(\delta) - a^0$ для знаковой оценки меньше, чем для оценки наименьших квадратов, то разумно пользоваться именно знаковой оценкой. Возникает задача исследования поведения $a(\delta) - a^0$ в зависимости от распределения поля ζ_{ij}.

Результаты. Для оценивания величины $a(\delta) - a^0$ определим функционал влияния $\mathrm{IF}(a(\delta), F_\zeta)$ оценки $\hat{a}_{mn}$ по формуле

$$\mathrm{IF}(a(\delta),F_\zeta)=\left.\frac{d}{d\delta}a(\delta)\right|_{\delta=0}.$$

$IF(a(\delta),F_\zeta)$ характеризует величину главного линейного члена в разложении асимптотического смещения

$$a(\delta)-a^0=\mathrm{IF}(a(\delta),F_\zeta)\delta+o(\delta),\quad \delta\to 0$$

и зависит от $a(\delta)$ и от распределения случайных величин ζ_{ij}.

Лучше других противостоять засорениям вида (7) наблюдений X_{ij} будут оценки с ограниченным $IF(a(\delta),F_\zeta)$. Обозначим через F множество возможных функций распределения случайных величин ζ_{ij}. Назовем величину

$$GES(\mathsf{F},a(\delta))=\sup_{F_\zeta\in\mathsf{F}}|IF(a(\delta),F_\zeta)|$$

коэффициентом чувствительности оценки $\hat{a}_{mn}$ к большой ошибке. Оценку $\hat{a}_{mn}$ будем называть робастной на семействе распределений F, если $GES(\mathsf{F},a(\delta))<\infty$.

Теорема 3 дает явное выражение для функционала влияния знаковой оценки. Обозначим через $l=(l_{10},l_{01},l_{11})$ вектор с координатами

$$\begin{aligned}l_{pq}&=(\delta_{1-p,-q}(a^0)\mathrm{E}[(1-2F(-\zeta_{11}))(1-2F(a^0_{10}\zeta_{11}))+(1-2F(a^0_{01}\zeta_{10}))(1-2F(a^0_{11}\zeta_{10}))]+\\&+\delta_{-p,1-q}(a^0)\mathrm{E}[(1-2F(-\zeta_{11}))(1-2F(a^0_{01}\zeta_{11}))+(1-2F(a^0_{10}\zeta_{01}))(1-2F(a^0_{11}\zeta_{01}))]+\\&+\delta_{1-p,1-q}(a^0)\mathrm{E}[(1-2F(-\zeta_{11}))(1-2F(a^0_{11}\zeta_{11}))]).\end{aligned}\tag{8}$$

Определим матрицу

$$\mathsf{K}=\begin{pmatrix}\mathsf{K}(1,0,1,0) & \mathsf{K}(1,0,0,1) & \mathsf{K}(1,0,1,1)\\ \mathsf{K}(1,0,0,1) & \mathsf{K}(0,1,0,1) & \mathsf{K}(0,1,1,1)\\ \mathsf{K}(1,0,1,1) & \mathsf{K}(0,1,1,1) & \mathsf{K}(1,1,1,1)\end{pmatrix}$$

с элементами

$$\mathsf{K}(p,q,\alpha,\beta)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\delta_{ij}(a^0)\delta_{i+|p-\alpha|,j+|q-\beta|}(a^0).$$

Теорема 3. Пусть функция распределения $F(x)$ и плотность распределения вероятности $f(x)$ случайных величин ε_{ij} удовлетворяют условиям (2)–(6) и

$$\mathrm{E}[\varepsilon_{11}^2]<\infty.$$

Тогда функционал влияния знаковой оценки равен

$$\mathrm{IF}(a(\delta),F_\zeta)=\left(4f(0)\mathrm{E}[\varepsilon_{11}^-]\mathsf{K}\right)^{-1}l.\tag{9}$$

Вид формул (8), (9) показывает, что функционал влияния знаковой оценки будет ограничен, поскольку координаты $|l_{pq}|$ вектора l в (8) ограничены величиной $\max_{(p,q)\in\mathrm{I}}|a_{pq}|$. Поэтому коэффициент чувствительности к большой ошибке будет конечным, а знаковая оценка робастной.

Для сравнения, функционал влияния оценки наименьших квадратов имеет вид (см. [8])

$$IF_{LS}(a(\delta),F_\zeta)=\mathrm{E}[\zeta_{00}^2]B^{-1}(a^{(0)}_{01},a^{(0)}_{10},a^{(0)}_{00})^T,\tag{10}$$

где B — ковариационная матрица вектора (X_{01},X_{10},X_{00}). Из формулы (10) следует, что с ростом $\mathrm{E}[\zeta_{00}^2]$ будет расти и $IF_{LS}(a(\delta),F_\zeta)$. Поэтому максимум $IF_{LS}(a(\delta),F_\zeta)$ будет бесконечным на (достаточно узком) множестве всех вероятностных распределений случайной величины ζ_{00} с конечной дисперсией. Следовательно, коэффициент чувствительности к большой ошибке оценки наименьших квадратов в этом случае будет бесконечным, а оценка наименьших квадратов, в отличие от знаковой оценки, не будет робастной.

Выводы. В работе получено явное выражение для функционала влияния знаковой оценки коэффициентов уравнения авторегрессионного поля. Показано, что знаковая оценка является робастной, в то время как оценка наименьших квадратов не является робастной в достаточно типичной ситуации, когда ошибочные наблюдения авторегрессионного поля могут иметь сколь угодно большую дисперсию. Знаковая оценка может быть рекомендована в качестве альтернативы оценке наименьших квадратов при наблюдении авторегрессионного поля с аномально большими ошибками.

Примечания:

1. Болдин М.В., Симонова Г.И., Тюрин Ю.Н. Знаковый статистический анализ линейных моделей. М.: Наука. Физматлит, 1997. 288 с.
2. Горяинов В.Б., Горяинова Е.Р. Непараметрическая идентификация пространственной модели авторегрессии в условиях априорной стохастической неопределенности //Автоматика и телемеханика. 2010. № 2. С. 31-41.
3. Martin R.D., Yohai V.J. (1986) Influence functionals for time series. With discussion. Ann. Statist. 1986. V. 14. No. 3. P. 781-818.
4. Хьюбер П.Дж. Робастность в статистике. М.: Мир, 1984. 304 с.
5. Робастность в статистике. Подход на основе функций влияния / Хампель Ф., Рончетти Э., Рауссеу П., Штаэль В. М.: Мир, 1989. 512 с.
6. Tjostheim D. Statistical Spatial Series Modelling //Advances in Applied Probability. 1978. V. 10. No. 1. P. 130-154.
7. Basu S., Reinsel G. C. Properties of the Spatial Unilateral First-Order ARMA Model //Advances in Applied Probability. 1993. V. 25. № 3. P. 631--648.
8. Горяинов В.Б. Функционалы влияния робастных оценок параметров авторегрессионных полей. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. "Естественные науки". 2012, N4, с.3-12.

УДК 519.21

Робастность знаковой оценки в модели 2D-Авторегрессии

Владимир Борисович Горяинов

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Россия
105005, г. Москва, 2-я Бауманская ул., 5.
Кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: vb-goryainov@mail.ru

Аннотация. Рассмотрен процесс двумерной авторегрессии порядка (1,1). В работе получено явное выражение для функционала влияния знаковой оценки коэффициентов уравнения авторегрессионного поля. Показано, что знаковая оценка является робастной.

Ключевые слова: знаковая оценка; робастная оценка; функционал влияния; коэффициент чувствительности к большой ошибке.