Physico-mathematical Sciences

Физико-математические науки

UDC 535.36

Amplitude of Light Scattering by a Truncated Pyramid and Cone in the Rayleigh-Gans-Debye Approximation

Konstantin A. Shapovalov

Krasnoyarsk State Medical University named after Prof. V. F. Voyno-Yasenetsky, Russia
660022, Krasnoyarsk, Partizana Zheleznyaka Street, 1
PhD (Physico-Mathematical), Assistant Professor
E-mail: sh_const@mail.ru

Abstract. The article considers general approach to structured particle and particle system form factor calculation in the Rayleigh-Gans-Debye (RGD) approximation. Using this approach, amplitude of light scattering by a truncated pyramid and cone formulas in RGD approximation are obtained. Light scattering indicator by a truncated pyramid and cone in the RGD approximation are calculated.

Keywords: optically "soft'" particles; form factor; light scattering indicator.

Введение. В настоящее время теория и практика методов светорассеяния в силу исключительной важности для таких приложений, как оптика атмосферы и океана, распространение радиоволн и радиосвязь, физическая химия растворов и коллоидов, материаловедение, биофизика и лазерная биомедицина [1-6] разработаны довольно глубоко. При решении задачи рассеяния света аэрозольные частицы атмосферы и др. моделируются частицами различной формы. Так, для сферических частиц известно полученное методом разделения переменных аналитическое решение или теория Ми [1, 2]. Однако форму, близкую к сферической, имеют лишь жидкие аэрозоли. Пылевые и сажевые частицы, ледяные кристаллы облаков имеют сильно несферическую форму. Например, ледяные кристаллы перистых облаков имеют цилиндрическую форму и моделируются гексагональными призмами [3, 5].

Если частицы дисперсной среды оптически "мягкие" ($|m-1|<<1$, где m – относительный показатель преломления светорассеивающей частицы), то можно использовать приближенные методы Рэлея-Ганса-Дебая (РГД) и Аномальной Дифракции (АД) [1, 2]. Формулы для вычисления характеристик светорассения: амплитуды, индикатрисы светорассеяния и др. для пирамиды и конуса в РГД приближении получены ранее автором [7, 8]. Отметим, что амплитуда светорассеяния является ключевой характеристикой из которой далее могут получены и дифференциальные, и интегральные характеристики светорассеяния, сечения светорассеяния и др. [1, 2, 4, 9]

Учитывая важность таких уравнений в приближении РГД для различных приложений, целью настоящей работы явилось получение аналитических выражений для амплитуды светорассеяния усеченной пирамиды и конуса в приближении РГД.

Материалы и методы. Изложим общий подход для расчета амплитуды и форм-фактора структурированных частиц. Предположим, что на частицу падает плоская электромагнитная волна. Используем интегральное представление амплитуды светорассеяния в РГД приближении (или первое Борновское приближение) в скалярном виде [6, 7, 9, 10]:

$$f(\theta,\beta)=\frac{k^2|\mathbf{P}|}{4\pi}\int_V (m^2-1)\exp(i\,\mathbf{k}_s\cdot\mathbf{r})dV, \qquad (1)$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{s}$ - единичные векторы вдоль направлений падающего и рассеянного света соответственно, $\mathbf{r}$ радиус-вектор точки внутри частицы, $\mathbf{k_s} = k(\mathbf{i}-\mathbf{s})$, $k = 2\pi/\lambda$ - волное число и λ - длина волны света, $|\mathbf{k_s}| = 2k\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, θ - угол между векторами $\mathbf{i}$ и $\mathbf{s}$, β угол между осью z и вектором $\mathbf{k}_s$, $|\mathbf{P}| = |[-\mathbf{s}\times(\mathbf{s}\times\mathbf{e_i})]|$, $\mathbf{e_i}$ - единичный вектор вдоль направления поляризации падающего света, (далее для кратости в скалярном виде $|\mathbf{P}| = 1$ хотя в [9], если $\mathbf{s} \neq \mathbf{i}$ то $|\mathbf{P}_\perp|^2 = 1-\sin^2\theta_s\cos^2\phi_s$, $|\mathbf{P}_\parallel|^2 = 1-(\cos\theta_i\sin\theta_s\sin\phi_s - \sin\theta_i\cos\theta_s)^2$).

Заметим, что амплитуда может быть выражена и по-другому через углы в сферических координатах, указывающих направление падающего θ_i, ϕ_i и рассеянного света θ_s, ϕ_s соотвественно:

$k_1 = k(\sin\theta_i\cos\phi_i - \sin\theta_s\cos\phi_s)$, $k_2 = k(\sin\theta_i\sin\phi_i - \sin\theta_s\sin\phi_s)$,

$k_3 = k(\cos\theta_i - \cos\theta_s)$, $k_4 = \sqrt{k_1^2+k_2^2}$, $k_s = \sqrt{k_1^2+k_2^2+k_3^2}$, $k_3 = k_s\cos\beta$, $k_4 = k_s\sin\beta$.

Форм-фактор в приближении РГД [1, 2, 4] для однородной частицы с объемом *V* может быть записан как

$$\Phi(\theta,\beta) = \frac{4\pi\ f(\theta,\beta)}{k^2(m^2-1)V} = \frac{1}{V}\int_V \exp(i\,\mathbf{k_s}\cdot\mathbf{r})dV. \qquad (2)$$

Для структурированных частиц, состоящих из *q* слоев или раздельных неперекрывающихся областей [1, 2], мы имеем

$$f(\theta,\beta) = \frac{k^2}{4\pi}\left[(m_q^2-1)V_q\Phi_q(\theta,\beta) + \sum_{j=1}^{q-1}(m_j^2 - m_{j+1}^2)V_j\Phi_j(\theta,\beta)\right], \qquad (3)$$

где *j* - номер слоя (или области), m_j - показатель преломления *j*-го слоя, V_j его объем, $\Phi_j(\theta,\beta)$ - форм фактор *j*-го слоя.

Если частица с форм-фактором $\Phi_0(\theta,\beta)$ параллельным переносом передвигается из центра координат в позицию, указанную вектором $\mathbf{r_M}$, то мы можем получить форм-фактор умножением на $\exp(i\,\mathbf{k_s}\cdot\mathbf{r_M})$ [7]:

$$\Phi_M(\theta,\beta) = \frac{1}{V}\int_V \exp(i\,\mathbf{k_s}\cdot(\mathbf{r}+\mathbf{r_M}))dV = \exp(i\,\mathbf{k_s}\cdot\mathbf{r_M})\Phi_0(\theta,\beta). \qquad (4)$$

Если частица вращается, например, вокруг оси OZ на угол Эйлера γ и поскольку Якобиан перехода для такого преобразования в (2) равен 1, значит мы можем получить форм-фактор трансформацией только выражений k_1, k_2 в новую позицию $k_1(\gamma)$, $k_2(\gamma)$ [7]:

$$\begin{pmatrix} k_1(\gamma) \\ k_2(\gamma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Уравнения (3)-(5) дают нам простой способ конструирования аналитического форм-фактора в РГД приближении для структурированной частицы и системы частиц, если форм-фактор каждой частицы известен [7].

Результаты и обсуждение.

Пирамида

Используя (3)-(5), были ранее [7] получены аналитические уравнения для амплитуды светорассения в приближении РГД для клина и вращением клина для пирамиды с произвольным многоугольным основанием (см. рис. 1 (а)).

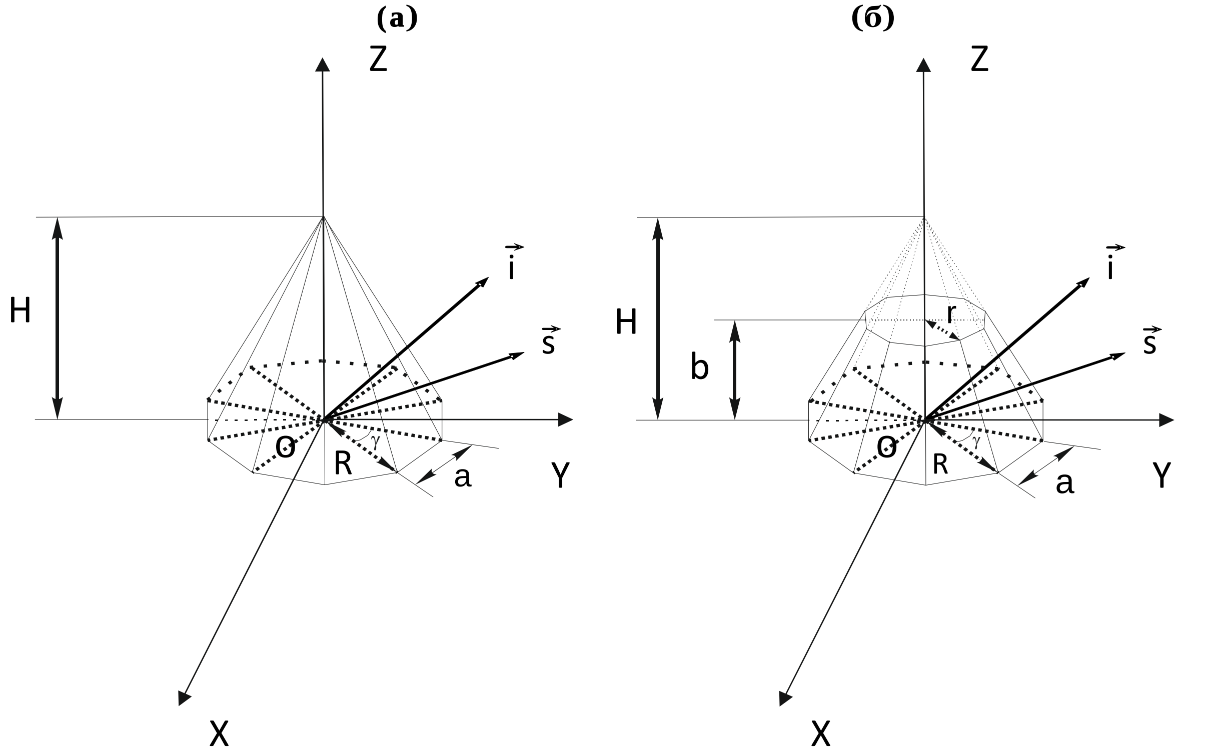

Рис. 1. Геометрия светорассения пирамиды с многоугольным основанием (а) [7] и усеченной пирамиды (б)

Так, амплитуда светорассеяния в частном случае пирамиды высоты H с прямоугольным основанием (n=4, $\gamma=\pi/2$) со стороной a получится вида (см. [7])

$$f_{PD} = \frac{k^2\left(m^2-1\right)3V_{PD}}{8\pi}\frac{\exp\left(ik_3H\right)}{k_1k_2R^2}\left[f_1+if_2\right], \qquad (6)$$

где $f_1 = j_0(C_1)+j_0(C_2)-j_0(C_3)-j_0(C_4)$, $f_2 = h_0(C_1)+h_0(C_2)-h_0(C_3)-h_0(C_4)$,

$C_1 = k_3H+R^*(k_2-k_1), C_2 = k_3H-R^*(k_2-k_1), C_3 = k_3H+R^*(k_2+k_1), C_4 = k_3H-R^*(k_2+k_1)$,

R радиус описанной окружности основания, $\frac{a}{2} = R^* = R/\sqrt{2}$, $V_{PD} = \frac{2}{3}HR^2$, $j_0(x) = \frac{\sin x}{x}$,

$h_0(x) = \frac{1-\cos x}{x}$ сферические функции Бесселя и Струве нулевого порядка.

Используя (3) и (4), получим амплитуду для усеченной пирамиды высоты b (см. рис. 1 (б)). Достаточно вычесть из выражения (6) амплитуду подобной малой пирамиды высоты H-b и с основанием, имеющим описанный радиус r, помещенную параллельным переносом вверх по оси OZ на расстояние b (см. рис. 1 б). Умножая на $\exp\left(i\,k_3b\right)$ амплитуду малой пирамиды по (4) и суммируя по (3), получим амплитуду светорассеяния усеченной пирамиды в приближении РГД:

$$f_{TPD} = \frac{k^2\left(m^2-1\right)3}{8\pi}\frac{\exp\left(ik_3H\right)}{k_1k_2}\left(\frac{V_{PD}}{R^2}\left[f_1(R,H)+if_2(R,H)\right]-\frac{V_{SPD}}{r^2}\left[f_1(r,H-b)+if_2(r,H-b)\right]\right), \qquad (7)$$

где $V_{SPD} = \dfrac{2}{3}(H-b)r^2$, $r = \dfrac{R}{H}(H-b)$.

Очевидно, что объем усеченной пирамиды равен $V_{TPD} = V_{PD} - V_{SPD}$.

Конус

Амплитуда светорассеяния для конуса (рис. 2 (а)) в случае $k_4 = 0$, (в общем виде возможно только разложение в ряд) [7, 8]:

$$f_C = \frac{k^2(m^2-1)3V_C}{2\pi k_3 H}\left[h_0(k_3H) - j_1(k_3H) + i\left(1 - h_1(k_3H) - j_0(k_3H)\right)\right], \qquad (8)$$

где $j_0(x)$, $h_0(x)$, $j_1(x) = \dfrac{\sin x - x\cos x}{x^2}$, $h_1(x) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1-\cos x - x\sin x}{x^2}$ сферические функции Бесселя и Струве нулевого и первого порядка, $V_C = \pi R^2 H/3$.

(а) **(б)**

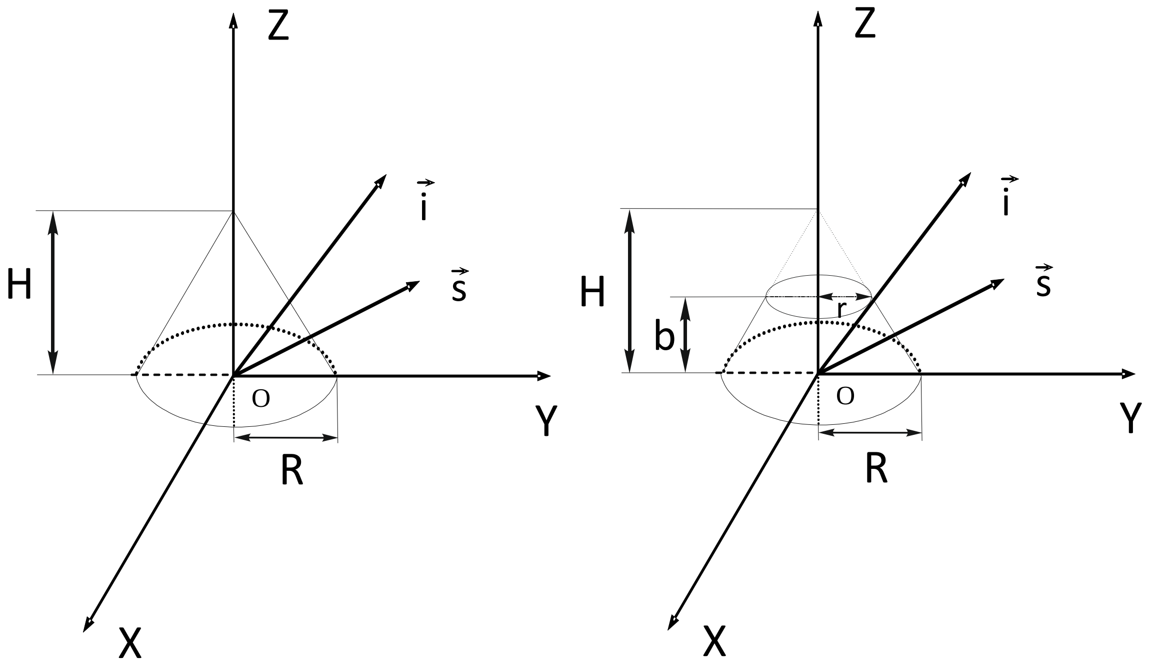

Рис. 2. Геометрия светорассения конусом (а) и усеченным конусом (б)

Далее для частного случая $k_3H = k_4R$ [7, 8] амплитуда светорассеяния конуса в приближении РГД:

$$f_C = \frac{k^2(m^2-1)V_C}{2\pi}\frac{\exp(ik_3H)}{k_3H}[f_3 + if_4], \qquad (9)$$

где $f_3 = \cos(k_3H)J_1(k_3H) + \sin(k_3H)J_2(k_3H)$, $f_4 = \cos(k_3H)J_2(k_3H) - \sin(k_3H)J_1(k_3H)$.

Заметим, что в отличии от [7, 8], исправлена неточность в знаменателе формулы (9): добавлен пропущенный множитель k_3H.

Аналогично амплитуде для усеченной пирамиды, используя (3) и (4), из (9) получим амплитуду светорассеяния для усеченного конуса высоты b (см. рис. 2 (б)):

$$f_{TC} = \frac{k^2\left(m^2-1\right)}{2\pi}\,\frac{\exp\left(ik_3H\right)}{k_3}\left(\frac{V_C}{H}[\,f_3\left(H\right)+if_4\left(H\right)]-\frac{V_{SC}}{H-b}[\,f_3\left(H-b\right)+if_4\left(H-b\right)]\right), \qquad (10)$$

где $V_{SC} = \pi r^2\left(H-b\right)/3$.

Амплитуда светорассеяния для сферической частицы в приближении РГД [1, 2]:

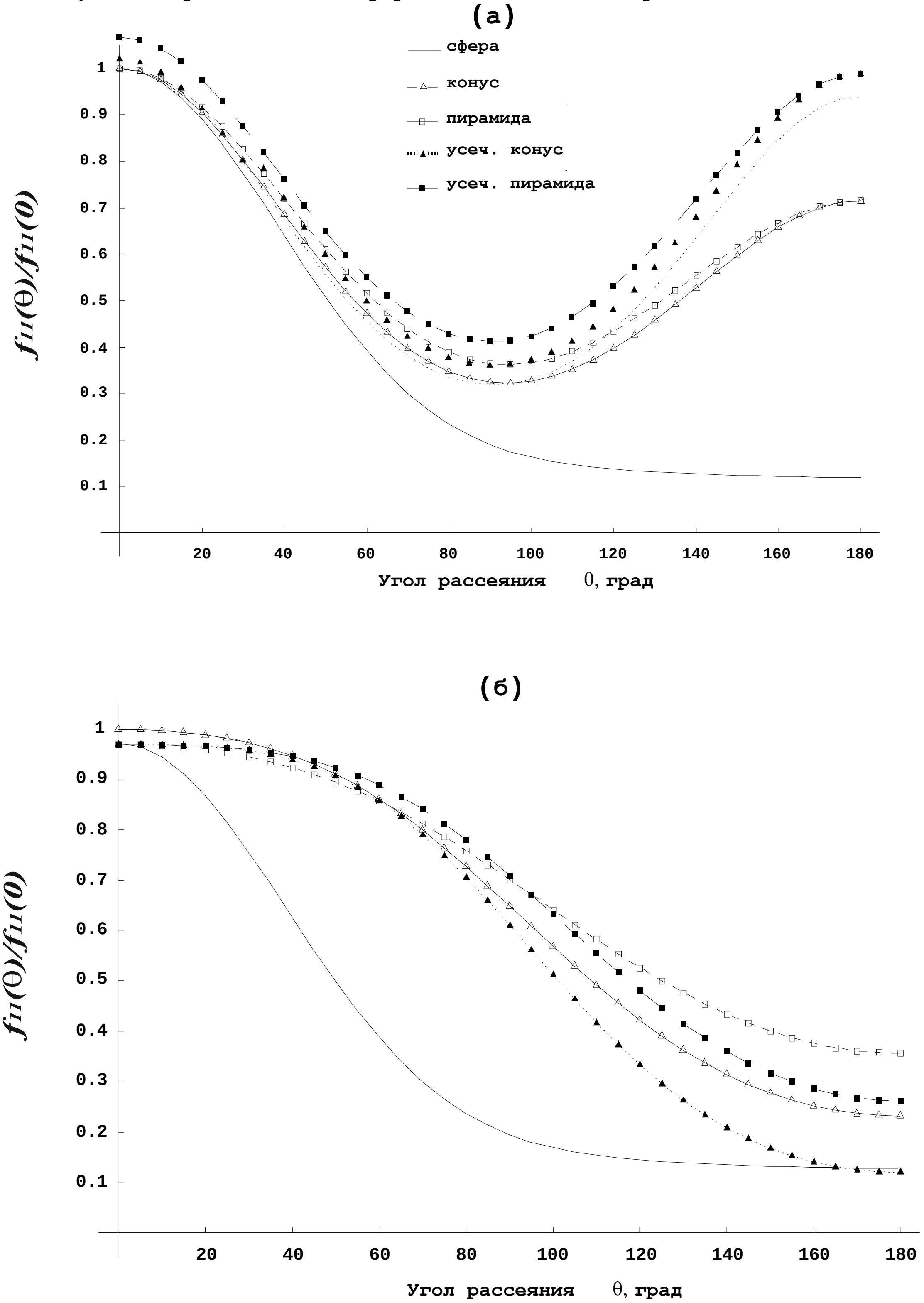

Рис. 3. Зависимость индикатрисы светорассеяния $f_{11}(\theta)/f_{11}(0)$ от угла рассеяния θ для сферы, конуса, пирамиды, усеченного конуса и пирамиды при kR=1,5, kH=1,5, $kb=0,5$, n=4 и для света падающего вдоль оси OZ $\theta_i=0$ (а) и перпендикулярно $\theta_i=\pi/2$ (б)

$$f_{SPH} = \frac{k^2\left(m^2-1\right)V_{SPH}}{4\pi}\frac{3j_1\left(k_s R\right)}{k_s R}, \tag{11}$$

где $V_{SPH} = 4\pi R^3/3$.

Индикатриса светорассеяния [или элемент матрицы рассеяния f_{11}] для естественного света (неполяризованного или произольно поляризованного света) рассчитывается по формуле [1, 6]:

$$f_{11}(\theta) = \left(\frac{1+\cos^2\theta}{2}\right) k^2 \left| f(\theta) \right|^2, \tag{12}$$

где $\left| f(\theta) \right|^2$ квадрат модуля амплитуды светорассения и $\beta=0$.

Причем, индикатриса светорассеяния нормализована на направление вперед.

В качестве примера приведем на рис. 3. индикатрису светорассеяния, расчитанную по (12) и формулам амплитуды светорассеяния сферы (11), конуса (9) и усеченного конуса (10), пирамиды (6), усеченной пирамиды (7) для частиц с относительным показателем преломления $m = 1{,}1 + i\ 0{,}01$.

Заключение. Таким образом, мы кратко обсудили общее интегральное представление форм-фактора в приближении РГД для сложных структурированных частиц.

Указаны свойства амплитуды светорассения РГД для параллельного переноса и поворота частицы. Используя данные свойства, получены формулы для амплитуды светорассеяния усеченной пирамидой и конусом в приближении РГД.

Приведены также формулы, полученные ранее для амплитуды светорассеяния в приближении РГД обычным конусом и пирамидой. Эти выражения и общий подход может быть полезен для аналитической оценки обобщенных параметров полидисперсной системы частиц, для сравнения с другими решениями и методами и для дальнейшего анализа области применения РГД приближения.

Примечания:

1. Борен К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами / К. Борен, Д. Хафмен. М.: Мир, 1986. 664 с.
2. Ван де Хюлст Г. Рассеяние света малыми частицами. М.: ИЛ, 1961. 536 с.
3. Light scattering by nonspherical particles: theory, measurements, and applications / Ed. by M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, L.D. Travis. San Diego: Academic Press, 2000. 690 p.
4. Kerker M. The scattering of light and other electromagnetic radiation. New York, London: Academic Press, 1969. 666 p.
5. Kokhanovsky A.A. Cloud Optics. Dordrecht: Springer, 2006. 276 p.
6. Методы светорассеяния в анализе дисперсных биологических сред / В.Н. Лопатин, А.В. Приезжев, А.Д. Апонасенко и др. М.: Физматлит, 2004. 384 с.
7. Shapovalov K.A. Light Scattering by a Prism and Pyramid in the Rayleigh-Gans-Debye Approximation // Optics. 2013. Vol. 2. No. 2. P. 32-37. - doi:10.11648/j.optics.20130202.11.
8. Шаповалов К.А. Рассеяние света осесимметричными частицами в приближении Рэлея-Ганса-Дебая // Журнал Сибирского Федерального Университета. Серия "Математика и Физика". 2012. Т. 5. № 4. С. 586–592. [Электронный ресурс] – Режим доступа. - URL: http://elib.sfu-kras.ru/bitstream/2311/3112/1/shapevalev.pdf (дата обращения: 18.04.13).
9. Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. Пер. с англ. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
10. Шаповалов К.А. Рассеяние света частицами цилиндрической формы в приближении Рэлея-Ганса-Дебая. 1. Строго ориентированные частицы // Оптика атмосферы и океана. 2004. Т. 17. № 4. С. 350-353.

УДК 535.36

Амплитуда светорассеяния усеченной пирамиды и конуса в приближении Рэлея-Ганса-Дебая

Константин Алексеевич Шаповалов

Красноярский государственный медицинский университет им. проф. В.Ф. Войно-Ясенецкого, Россия
660022, г. Красноярск, ул. Партизана Железняка, 1
кандидат физико-математических наук, доцент
E-mail: sh_const@mail.ru

Аннотация. Рассматривается общий подход для расчета форм-фактора структурированной частицы и системы частиц в приближении Рэлея-Ганса-Дебая (РГД). Используя данный подход, получены формулы для амплитуды светорассеяния усеченной пирамидой и конусом в приближении РГД. Рассчитывается индикатриса светорассеяния усеченной пирамиды и конуса в приближении РГД.

Ключевые слова: оптически “мягкие” частицы; форм-фактор; индикатриса светорассеяния.