ISSN: 2219-8229
E-ISSN: 2224-0136
Founder: Academic Publishing House *Researcher*
DOI: 10.13187/issn.2219-8229
Has been issued since 2010.

European Researcher. International Multidisciplinary Journal

Physics-mathematics Sciences

Физико-математические науки

UDC 517.9

On the Existence and Uniqueness of R_ν-Generalized Solution for Dirichlet Problem with Singularity on the Boundary*

Elena I. Rukavishnikova

Computing Center of Far-Eastern Branch of Russian Academy of Sciences, Russian Federation
Senior researcher, PhD (physical and mathematical), Assistant Professor
680000, Khabarovsk, Kim Yu Chen Street, 65
E-mail: vark0102@mail.ru

Abstract. In the present paper, in a convex two-dimensional domain, we consider the Dirichlet problem for a second-order differential equation with degeneration on the entire of the boundary. For this problem, we study the existence and uniqueness of an $R_\nu -$generalized solution i.e., the fact that it belongs to the space $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. We also prove the uniqueness theorem for the $R_\nu -$generalized solution in the space $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ for all values of the parameter ν in a certain scale.

Keywords: R_ν-generalized solution; singularity on the boundary; Sobolev weighted space.

Введение. Математические модели некоторых естественных процессов, например, в физике плазмы и газового разряда, электродинамике, ядерной физике, нелинейной оптике и других областях физики, приводят к краевым задачам, в которых сингулярность решения вызвана вырождением исходных данных (коэффициентов дифференциального уравнения, его правой части и граничных условий). Особенностью таких задач является то, что для них не всегда можно определить обобщенное (слабое) решение или оно не обладает необходимой регулярностью. В связи с этим в работе [1] было предложено определить решение краевой задачи как $R_\nu -$обобщенное. Такое определение позволяет исследовать его существование и единственность, коэрцитивные и дифференциальные свойства в весовых пространствах С.Л.Соболева и выделить два класса краевых задач: с согласованным и несогласованным вырождением исходных данных (обзор результатов в [2]), создать эффективные численные методы для его нахождения ([3]-[15]).

* Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 11-01-98502-р_восток_а).

В настоящей работе рассматривается задача Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с согласованным вырождением исходных данных на всей криволинейной границе двумерной области Ω. Для этой задачи формулируются теоремы о существовании и единственности $R_\nu-$обобщенного решения, его единственности в пространствах $\overset{\circ}{H}{}^{1}_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ при всех значениях параметра ν из определенной шкалы.

Материалы и методы. Введём в рассмотрение некоторые обозначения и определения.

Пусть R^2 – двумерное евклидово пространство с $x=(x_1,x_2)$, $dx=dx_1dx_2$, $\Omega\subset R^2$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}$ – замыкание области, т.е. $\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$.

Пусть $\rho(x)$ - весовая функция, совпадающая в некоторой приграничной полосе $\Omega'\subset\Omega$ с расстоянием любой точки $x=(x_1,x_2)$ до границы $\partial\Omega$ и равная δ для $x\in\overline{\Omega}\backslash\Omega'$.

Введём весовое пространство С.Л. Соболева $H^{k}_{2,\alpha}(\Omega)$ с нормой

$$\|u\|_{H^k_{2,\alpha}(\Omega)}=\left(\sum_{|\lambda|\le k}\int_{\Omega}\rho(x)^{2(\alpha+|\lambda|-k)}\left|D^{\lambda}u\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

где $D^{\lambda}=\dfrac{\partial^{|\lambda|}}{\partial x_1^{\lambda_1}\partial x_2^{\lambda_2}}$, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$, $\lambda_1\ge 0$, $\lambda_2\ge 0$ – целые числа и $|\lambda|=\lambda_1+\lambda_2$, α – некоторое действительное число, $k-$целое неотрицательное число. При $k=0$ пространства $H^{0}_{2,\alpha}(\Omega)$ и $L_{2,\alpha}(\Omega)$ совпадают.

Пусть $\overset{\circ}{H}{}^{k}_{2,\alpha}(\Omega)=\{u\,|\,u\in H^{k}_{2,\alpha}(\Omega),\,u=0,\,x\in\partial\Omega\}$. Норма в $\overset{\circ}{H}{}^{k}_{2,\alpha}(\Omega)$ имеет тот же вид, что и в $H^{k}_{2,\alpha}(\Omega)$. Через $\overset{\circ}{H}{}^{k}_{\infty,-\alpha}(\Omega,C_1)$ обозначим множество функций, норма в котором удовлетворяет неравенству

$$\|u\|_{H^k_{\infty,-\alpha}(\Omega,C_1)}=\max_{|\lambda|\le k}\,vrai\max_{\forall x\in\Omega}\left|\rho^{-\alpha+|\lambda|}D^{\lambda}u\right|\le C_1$$

с положительной постоянной C_1, не зависящей от u.

Сформулируем постановку задачи.

В области Ω рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-\sum_{k,l=1}^{2}a_{kl}(x)\frac{\partial^2u}{\partial x_k\partial x_l}+\sum_{k=1}^{2}a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+a(x)u(x)=f(x),\quad x\in\Omega, \tag{2}$$

с граничным условием

$$u(x)=0,\quad x\in\partial\Omega. \tag{3}$$

Предположим, что правая часть уравнения (2)

$$f\in L_{2,\mu}(\Omega),\quad \mu\ge 0. \tag{4}$$

Определение 1. Краевую задачу (2),(3) будем называть задачей Дирихле с согласованным вырождением на всей границе области, если имеет место (4), коэффициенты $a_{kl}(x)=a_{lk}(x)$ $(k,l=1,2)$ и для некоторого действительного числа β выполнены условия:

$$a_{kl}\in H^1_{\infty,-\beta}(\Omega,C_2),\quad a_k\in L_{\infty-(\beta-1)}(\Omega,C_3)\quad (k,l=1,2),$$

$$a\in L_{\infty,-(\beta-2)}(\Omega,C_4), \qquad (5)$$

$$\sum_{k,l=1}^{2}a_{kl}(x)\xi_k\xi_l\ge C_5\rho^{\beta}(x)\sum_{k=1}^{2}\xi_k^2, \qquad (6)$$

$$a(x)\ge C_6\rho^{\beta-2}(x)\ \text{почти всюду на}\ \Omega, \qquad (7)$$

где C_i $(i=2,\ldots,6)$ – положительные постоянные, не зависящие от *x*, ξ_1,ξ_2 - любые действительные параметры.
Обозначим через

$$a(u,v)=\sum_{k,l=1}^{2}\int_{\Omega}\left(a_{kl}(x)\rho^{2\nu}\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial v}{\partial x_l}+a_{kl}(x)\frac{\partial\rho^{2\nu}}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_l}v+\frac{\partial a_{kl}}{\partial x_k}\rho^{2\nu}\frac{\partial u}{\partial x_l}v\right)dx+$$

$$+\sum_{k=1}^{2}\int_{\Omega}a_k(x)\rho^{2\nu}\frac{\partial u}{\partial x_k}v\,dx+\int_{\Omega}a(x)\rho^{2\nu}uvdx,$$

$$(f,v)=\int_{\Omega}\rho^{2\nu}fvdx$$

соответственно билинейную и линейную форму.

Определение 2. Функция u_ν из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ называется $R_\nu-$обобщенным решением задачи Дирихле с согласованным вырождением на всей границе области, если для всех $v(x)$ из $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ справедливо тождество

$$a(u_\nu,v)=(f,v)$$

при любом, но фиксированном ν, удовлетворяющем неравенству

$$\nu\ge\mu+\frac{\beta}{2}-1. \qquad (8)$$

Результаты. Установим теорему о существовании и единственности $R_\nu-$обобщенного решения.

Теорема 1. Пусть выполняются условия (1), (4)-(8), а также неравенство

$$2(C_2(2|\nu|+1)+C_3/2)^2<C_5C_6.$$

Тогда существует единственное $R_\nu-$обобщенное решение задачи (2), (3) из пространства $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|u_\nu\|_{\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)}\le C_7\|f\|_{L_{2,\mu}(\Omega)},$$

где C_7 - положительная постоянная, не зависящая от функций u_ν и f.

Теорема 2. Если выполнены условия теоремы 1, то для всех ν из полуинтервала $[\nu_1,\nu_2)$ $R_\nu-$обобщенное решение задачи (2), (3) единственно. Здесь обозначено

$$\nu_1 = \max\{\mu + \frac{\beta}{2} - 1, 1 - \frac{(C_5C_6)^{1/2} - C_3/2}{C_2} + \varepsilon\},$$

$$\nu_2 = \frac{(C_5C_6)^{1/2} - C_3/2}{C_2} - 1,$$

где ε - фиксированное и достаточно малое положительное число.

Примечания:

1. Рукавишников В.А. О весовых оценках скорости сходимости разностных схем // ДАН СССР. 1986. Т. 288, № 5. С. 1058.
2. Rukavishnikov V.A. The methods of numerical analysis for boundary value problems with strong singularity // Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2009. Vol. 24, № 6. P. 565-590.
3. Рукавишников В.А. Задача Дирихле с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады Академии наук. 1994. Т. 337, № 4. С. 447–449.
4. Рукавишников В.А. О задаче Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка с несогласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения. 1996. Т. 32, № 3. С. 402–408.
5. Беспалов А.Ю., Рукавишников В.А. Экспоненциальная скорость сходимости метода конечных элементов для задачи Дирихле с сингулярностью решения // Доклады Академии наук. 2000. Т. 374, № 6. С. 727–731.
6. Рукавишников В.А. О единственности $R_\nu -$обобщенного решения для краевых задач с несогласованным вырождением исходных данных // Доклады Академии наук. 2001. Т. 376, № 4. С. 451–453.
7. Bespalov A.Yu., Rukavishnikov V.A. The use singular functions in the h-p version of the finite element method for the Dirichlet problem with degeneration of the input data // Сибирский журнал вычислительной математики. 2001. Т. 4, № 4. С. 201-228.
8. Кашуба Е.В., Рукавишников В.А. О p-версии метода конечных элементов для краевой задачи с сингулярностью // Сибирский журнал вычислительной математики. 2005. Т. 8, № 1. С. 31-42.
9. Рукавишников В.А., Кузнецова Е.В. Коэрцитивная оценка для краевой задачи с несогласованным вырождением исходных данных // Дифференциальные уравнения. 2007. Т. 43, №4. 533–543.
10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // J. Comput. and Appl. Math. 2010. V. 234, № 9. P. 2870–2882.
11. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // Journal of Computational Physics. 2012. V. 231. P. 2438-2448.
12. Рукавишников В.А., Мосолапов А.О. Весовой векторный метод конечных элементов для одной задачи электромагнетизма с сильной сингулярностью // Доклады Академии наук. 2013. Т. 449, № 2. С. 144-148.
13. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. V.34, № 12. P. 1328-1347.
14. Рукавишников В.А., Николаев С.Г. Весовой метод конечных элементов для задачи теории упругости с сингулярностью // Доклады Академии наук. 2013. Т. 453, № 4. С.378-382.
15. Rukavishnikov V.A. On differential properties R-generalized solution of the Dirichlet problem with coordinated degeneration of the input data // ISRN Mathematical Analysis. 2011. Vol. 2011. Article ID 243724, 18 pages, 2011. – doi:10.5402/2011/243724/.

References:

1. Rukavishnikov V.A. O vesovykh otsenkakh skorosti skhodimosti raznostnykh skhem // DAN SSSR. 1986. T. 288, № 5. S. 1058.
2. Rukavishnikov V.A. The methods of numerical analysis for boundary value problems with strong singularity // Russ. J. of Numer. Anal. and Math. Model. 2009. Vol. 24, № 6. P. 565-590.
3. Rukavishnikov V.A. Zadacha Dirikhle s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Doklady Akademii nauk. 1994. T. 337, № 4. S. 447–449.
4. Rukavishnikov V.A. O zadache Dirikhle dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Differentsial'nye uravneniya. 1996. T. 32, № 3. S. 402–408.

5. Bespalov A.Yu., Rukavishnikov V.A. Eksponentsial'naya skorost' skhodimosti metoda konechnykh elementov dlya zadachi Dirikhle s singulyarnost'yu resheniya // Doklady Akademii nauk. 2000. T. 374, № 6. S. 727–731.
6. Rukavishnikov V.A. O edinstvennosti obobshchennogo resheniya dlya kraevykh zadach s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Doklady Akademii nauk. 2001. T. 376, № 4. S. 451–453.
7. Bespalov A.Yu., Rukavishnikov V.A. The use singular functions in the h-p version of the finite element method for the Dirichlet problem with degeneration of the input data // Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki. 2001. T. 4, № 4. S. 201-228.
8. Kashuba E.V., Rukavishnikov V.A. O p-versii metoda konechnykh elementov dlya kraevoi zadachi s singulyarnost'yu // Sibirskii zhurnal vychislitel'noi matematiki. 2005. T. 8, № 1. S. 31-42.
9. Rukavishnikov V.A., Kuznetsova E.V. Koertsitivnaya otsenka dlya kraevoi zadachi s nesoglasovannym vyrozhdeniem iskhodnykh dannykh // Differentsial'nye uravneniya. 2007. T. 43, №4. 533–543.
10. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. The finite element method for a boundary value problem with strong singularity // J. Comput. and Appl. Math. 2010. V. 234, № 9. P. 2870–2882.
11. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. New numerical method for solving time-harmonic Maxwell equations with strong singularity // Journal of Computational Physics. 2012. V. 231. P. 2438-2448.
12. Rukavishnikov V.A., Mosolapov A.O. Vesovoi vektornyi metod konechnykh elementov dlya odnoi zadachi elektromagnetizma s sil'noi singulyarnost'yu // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 449, № 2. S. 144-148.
13. Rukavishnikov V.A., Rukavishnikova H.I. On the Error Estimation of the Finite Element Method for the Boundary Value Problems with Singularity in the Lebesgue Weighted Space // Numerical Functional Analysis and Optimization. 2013. V.34, № 12. P. 1328-1347.
14. Rukavishnikov V.A., Nikolaev S.G. Vesovoi metod konechnykh elementov dlya zadachi teorii uprugosti s singulyarnost'yu // Doklady Akademii nauk. 2013. T. 453, № 4. S.378-382.
15. Rukavishnikov V.A. On differential properties R-generalized solution of the Dirichlet problem with coordinated degeneration of the input data // ISRN Mathematical Analysis. 2011. Vol. 2011. Article ID 243724, 18 pages, 2011. – doi:10.5402/2011/243724/.

УДК 517.9

О существовании и единственности $R_\nu -$обобщенного решения задачи Дирихле с сингулярностью на границе

Елена Ивановна Рукавишникова

Вычислительный центр Дальневосточного отделения Российской академии наук, Россия
старший научный сотрудник, кандидат физико-математических наук, доцент
680000, Хабаровск, ул. Ким Ю Чена, 65
E-mail: vark0102@mail.ru

Аннотация. Для эллиптического дифференциального уравнения второго порядка в выпуклой двумерной области Ω рассматривается задача Дирихле с сингулярностью по всей границе области. Установлена теорема о существовании и единственности $R_\nu -$обобщённого решения краевой задачи в пространстве С.Л. Соболева $\overset{\circ}{H}{}^1_{2,\nu+\beta/2}(\Omega)$. Кроме того, доказана единственность $R_\nu -$обобщённого решения для всех значениях параметра ν из определённой шкалы.

Ключевые слова: $R_\nu -$обобщенное решение, сингулярность на границе, весовое пространство Соболева.