

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2022 Issue: 05 Volume: 109

Published: 13.05.2022 <http://T-Science.org>

Issue

Article



Zokir Bozorboyevich Khudayberdiyev
Samarkand State University
Senior Lecture to Department of
Theoretical and Applied Mechanics,
xudoyberdiyevz@mail.ru

Shohruh Xusniddinovich Muhiddinov
Samarkand State University
Masters

Maftuna Akbar qizi Muhammadiyeva
Samarkand State University
Masters

Suhrob Atakulovich Israilov
Samarkand State University
Masters

TRANSVERSE VIBRATIONS OF A TWO-LAYER PLATE

Abstract: The theory of unsteady vibrations of a two-layer elastic plate is developed on the basis of a plane formulation of the problem on the basis of exact solutions of the equations of the linear theory of elasticity in transformations. Equations of transverse vibrations of a two-layer plate are obtained with respect to two auxiliary functions, which are the main parts of the displacements of some intermediate surface of the middle layer. An algorithm is proposed that makes it possible to unambiguously determine the stress-strain state of an arbitrary layer of the plate from the field of the sought-for functions.

Key words: Plates, solutions, equations, oscillations, layer, algorithm.

Language: Russian

Citation: Khudayberdiyev, Z. B., Muhiddinov, Sh. X., Muhammadiyeva, M. A., & Israilov, S. A. (2022). Transverse vibrations of a two-layer plate. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (109), 277-282.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-05-109-25> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.05.109.25>

Scopus ASCC: 2200.

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ ПЛАСТИНЫ

Аннотация: Разработана теория нестационарных колебаний двухслойной упругой пластинки исходя из плоской постановки задачи на основе точных решений уравнений линейной теории упругости в преобразованиях. Получены уравнения поперечных колебаний двухслойной пластинки относительно двух вспомогательных функций, являющихся главными частями перемещений некоторой промежуточной поверхности срединного слоя. Предложен алгоритм, позволяющий по полю искомым функций однозначно определить напряженно-деформированное состояние произвольного слоя пластинки.

Ключевые слова: Пластинки, решений, уравнений, колебания, слой, алгоритм.

Введение

В нашей стране и за рубежом в различных областях техники и строительства широко применяются многослойные, в частности

двухслойные пластинки. При этом во многих случаях динамические расчеты пластин основываются на классические теории опирающихся на гипотезы Кирхгофа. К таким

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 8.771
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

принадлежать немало работ. Дальнейшее развитие и уточнение классической теории осуществлялось С.Г.Лехницким, С.А.Амбарцумяном, Г.И.Петрашеном, И.Г.Филипповым, Х.Алтенбахом, Е.Reysner, Э.И.Григолоком, В.П.Шевченко, М.В.Фоменко, Х.Х.Худойназаровым, М.Мирсаидовым, Р.И.Халмурадовым, А.Б.Ахмедовым и другими авторами, исследования которых, можно разделить на два направления: разработка асимптотических теорий и теорий типа Тимошенко и Рейсснера. За последние несколько десятилетий разработаны теории колебания пластин, основанные на методе точных решений в преобразованиях Г.И.Петрашеня.

Указанным методом разработаны различные варианты однородных и двухслойных пластин в упругой и вязкоупругой постановках профессором И.Г.Филипповым и его учениками. В них при выводе уравнений колебания трехслойных пластин допущены следующие предпосылки: 1) рассматриваются трехслойные пластинки только симметричной структуры; 2) в качестве неизвестных берутся главные части составляющих перемещений точек срединной поверхности заполнителя, количество которых в общем случае равно шести. Если же, при этом, граничные условия сформулировать точно, то число неизвестных возрастет, по признанию самих авторов до двенадцати; 3) граничные условия формулируются относительно главных частей перемещений срединной поверхности, что в принципе не верно; 4) указанные факторы в конечном итоге вынуждают авторов к выполнению существенных упрощений, приводящие к некоторым неточностям, приближая получаемые уравнения колебания

трехслойной пластинки к уравнению колебания однородной пластинки; 5) полученные уравнения колебания трехслойной пластинки, в частном случае не переходят в уравнения колебания двухслойной пластинки (из-за симметричности структуры рассматриваемой трехслойной пластинки, отсутствие одного из внешних слоев влечет за собой отсутствие второго внешнего слоя).

На сегодняшний день разработка теории нестационарных колебаний двухслойной трехслойной упругой пластинки с учетом упругих и свойств материалов в достаточной степени не изучены.

Постановка задачи.

Рассматривается бесконечная в плане двухслойная упругая пластинка. Считается, что рассматриваемая пластинка является трехмерным телом. Пластинка отнесена к декартовой системе прямоугольных координат $Oxyz$. Слои пластинки пронумерованы как на рис.1, т.е. верхний несущий слой назван первым слоем, нижний несущий слой – нулевым слоем.

Учитывая неограниченность размеров пластинки, в дальнейшем считается, что она находится в условиях плоской деформации (рис. 1). При этом ось Ox направлена вдоль поперечного сечения Oxz по его средней линии, а ось Oz – вверх. Слои пластинки пронумерованы как показано на рис.1, т.е. верхний несущий слой назван первым слоем, нижний несущий слой – вторым, и заполнитель – нулевым слоем. Пусть h_1 , $2h_0$ и h_2 толщины первого, нулевого и второго слоев; λ_m, μ_m – коэффициенты Ляме и ρ_m – объёмные плотности слоев.

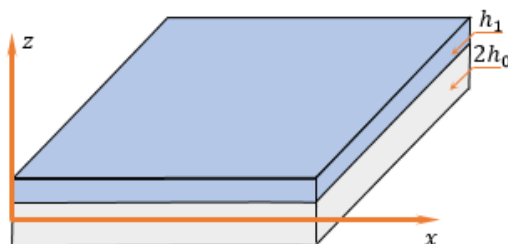


Рис. 1.

Зависимости $\sigma_{ij}^{(m)}$ напряжений от $\varepsilon_{ij}^{(m)}$ деформаций в точках слоев пластинки описываются законом Гука.

$$\sigma_{ii}^{(m)} = \lambda_m \varepsilon_{ii}^{(m)} + 2\mu_m \varepsilon_{ii}^{(m)}; \sigma_{ij}^{(m)} = 2\mu_m \varepsilon_{ij}^{(m)}. \quad (1)$$

Для описания движений точек составляющих слоев пластинки в системе

декартовых координат $Oxyz$ приняты уравнения движения

$$\sigma_{ij}^{(m)} = \rho_m \ddot{U}^{(m)} \quad (2)$$

где $\vec{U}^{(m)}$ – векторы перемещений точек слоев; t – время. Далее введены скалярные $-\varphi_m$ и векторные $-\vec{\psi}_m$ потенциалы по формулам

$$\vec{U}^{(m)} = \text{grad} \varphi_m + \text{rot} \vec{\psi}_m \quad (3)$$

При этом считается, что векторные потенциалы $\vec{\psi}_m$ удовлетворяют условиям соленоидальности векторных полей

$$\text{div } \vec{\psi}_m = 0 \quad (4)$$

Подставив (3) в систему (2) нетрудно получить уравнения движения точек упругих слоев пластинки в виде волновых уравнений для потенциалов продольных φ_m и поперечных $\vec{\psi}_m$ волн

В случае плоской деформации, учитывая, что векторы перемещений точек слоев $\vec{U}^m = \vec{U}^m(U_m, W_m)$ разлагаются только по единичным ортам \vec{i}, \vec{k} уравнения движения приводятся к волновым уравнениям

$$\Delta \varphi_m = \ddot{\varphi}_m / a_m^2; \Delta \psi_m = \ddot{\psi}_m / b_m^2, \quad (5)$$

где a_m, b_m - скорости продольных и поперечных волн в слоях; Δ - двумерный дифференциальный оператор Лапласа. При этом компоненты векторов перемещений, а также тензоров напряжений и деформаций слоев выражаются через введенные функции φ_m и ψ_m .

Предполагается, что при $t < 0$ пластинка находилась в покое, а в момент $t = 0$ к её граничным поверхностям прикладываются динамические воздействия. В силу линейности задачи можно представить поля смещений, в виде наложения симметричной и антисимметричной частей

$$\vec{U}_m = \vec{U}_m^s + \vec{U}_m^a,$$

где \vec{U}_m^s - симметричная (продольная), \vec{U}_m^a - антисимметричная (изгибная) части полей перемещений слоев пластинки. При этом симметричные части должны удовлетворять граничным условиям

$$\text{при } z = (-1)^{i-1} h_i^*, h_i^* = h_0 + h_i \\ \sigma_{xz}^{(i)} = f_x^{(i)}; \sigma_{zz}^{(i)} = f_z^{(i)}; (i = 1, 2). \quad (6)$$

Кроме того, на поверхностях заполнителя имеют места динамические и кинематические контактные условия:

$$\text{при } z = h_0 \\ \sigma_{xz}^{(0)} = \sigma_{xz}^{(1)}, \sigma_{zz}^{(0)} = \sigma_{zz}^{(1)}, U_0 = U_1, W_0 = W_1. \quad (7)$$

Начальные условия нулевые.

Метод решения.

Для решения поставленной задачи необходимо задать выражения для функций $f_x^{(0,1)}(x, t)$ и $f_z^{(0,1)}(x, t)$ из граничных условий. Следуя [5], функции внешних воздействий представим в виде

$$\left. \begin{aligned} f_x^{(0,1)} &= \int_0^\infty \left. \begin{aligned} \cos kx \\ \sin kx \end{aligned} \right\} dk \int_{(l)} \tilde{f}_x^{(0,1)} e^{pt} dp \\ f_z^{(0,1)} &= \int_0^\infty \left. \begin{aligned} \sin kx \\ -\cos kx \end{aligned} \right\} dk \int_{(l)} \tilde{f}_z^{(0,1)} e^{pt} dp \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

где $f_x^{(0,1)}, f_z^{(0,1)}$ - функции, регулярные при $\text{Re } p \geq 0$ имеющие конечное число полюсов, принимающие произвольные значения внутри некоторой области Ω , содержащий промежуток $(-i\omega_0; i\omega_0)$ мнимой оси, убывающие при $p \rightarrow i\infty$ не медленнее, чем $|p|^{-n_0}$, где $n_0 \gg 1$, и такие, что вне Ω их значения пренебрежимо малы. Кроме того функции $\tilde{f}_x^{(0,1)}$ и $\tilde{f}_z^{(0,1)}$ - аналитические, принимающие произвольные значения в промежутки $(0, k_0)$, убывающие при $k \rightarrow \infty$, как k^{-n_0} , и пренебрежимо малы при $k > k_0$; (l) - контур $\text{Re } p = \nu > 0$ на комплексной плоскости (p), оставляющего область Ω правее себя.

В соответствии с принятыми представлениями функций внешнего воздействия решение поставленной задачи также ищем в виде (4). Это позволяет получить из (5) обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка. В случае симметричных воздействий, когда будут иметь место продольные колебания пластины, решением полученных уравнений будет

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\varphi}_m(z, k, p) &= A_m^1 \text{ch}(\alpha_m z) \\ \tilde{\psi}_m(z, k, p) &= B_m^1 \text{sh}(\beta_m z) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

где

$$\alpha_m^2 = k^2 + p^2 / a_m^2; \beta_m^2 = k^2 + p^2 / b_m^2.$$

Перемещения U_m и W_m также представим в виде (8) и подставляя вместе с (9) в выражения перемещений, для преобразованных \tilde{U}_m и \tilde{W}_m будем иметь выражения через гиперболические функции и постоянные интегрирования. Далее с использованием стандартных разложений гиперболических функций в степенные ряды, получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[k \alpha_m^{2n} A_m^{(1)} - \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)} \right] \frac{z^{2n}}{(2n)!} \\ \tilde{W}_m &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\alpha_m^{2n+2} A_m^{(1)} - k \beta_m^{2n+1} B_m^{(1)} \right] \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

В качестве искоемых функций в уравнениях колебания трехслойной пластинки примем главные части преобразованных перемещений \tilde{U}_0 и \tilde{W}_0 такой поверхности нулевого слоя, расстояние от поверхности $z = 0$ которой определяется формулой

$$\xi = \chi \cdot h_0; -1 \leq \chi < 0; 0 \leq \chi < 1$$

где χ - постоянное число, удовлетворяющее неравенству $-1 \leq \chi \leq 1$. Для этого в выражениях (10) примем $z = \xi, m = 0$ и $n = 0$. Тогда введя обозначения $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$ получим

$$\left. \begin{aligned} \tilde{U}_0^{(0)} &= k A_0^{(1)} - \beta_0 B_0^{(1)} \\ \tilde{W}_0^{(0)} &= [\alpha_0^2 A_0^{(1)} - k \beta_0 B_0^{(1)}] \xi \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Решив систему относительно $A_0^{(1)}$ и $\beta_0 B_0^{(1)}$, выразим их через $\tilde{U}_0^{(0)}$ и $\tilde{W}_0^{(0)}$. Из контактных условий (7) находятся выражения для постоянных $A_m^{(1)}$ и $B_m^{(1)}$ при $m = 1, 2$. Затем они подставляются

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 8.771
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

в граничные условия (6). Это позволяет получить уравнения симметричных колебаний трехслойной пластинки в следующем виде

$$\left. \begin{aligned} A_1 \left[\frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)} \right] + B_1 [U_0^{(0)}] &= S_1 [f_x^{(1)}]; \\ A_2 [W_0^{(0)}] + B_2 \left[\frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)} \right] &= S_2 [f_z^{(2)}], \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

где A_k, B_k, S_k – дифференциальные операторы одинаковой структуры, имеющие вид

$$D_k = D_{k1} \frac{\partial^4}{\partial t^4} + D_{k2} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial t^2} + D_{k3} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + D_{k4} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + D_{k5} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + D_{k6}$$

D_{kj} равны A_{kj}, B_{kj} или S_{kj} ;

$$\dots, A_{26} = 1 - q_2, \dots, B_{26} = -\xi(1 + q_2);$$

где $i = 1, 2; z_1 = h_0 + h_1; z_2 = h_0 + h_2;$

$q_m = 1 - \frac{\lambda_m}{\mu_m}; a_m, b_m$ – соответственно скорости продольных и поперечных волн в материале пластинки. При этом перемещения точек пластинки определяются по формулам

$$U_0 = \left[(1 - q_0) \frac{z^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + 1 \right] U_0^{(0)} - \frac{q_0 z^2}{2\xi} \frac{\partial}{\partial x} W_0^{(0)}; \quad (13)$$

$$W_0 = \frac{1}{\xi} \left[\frac{z^3}{6} \left(\left(\frac{1}{b_0^2} + q_0 \right) \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (1 + q_0) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + z \right] W_0^{(0)} + q_0 \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \frac{z^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} U_0^{(0)};$$

Постановка прикладной задачи и её решение.

Рассмотрим задачу о симметричных колебаниях защемленной в продольном направлении пластины, при $x = 0$ и $x = l$, где l – длина пластинки в направлении оси Ox . В качестве уравнений колебания примем систему (8). Граничные условия задачи имеют вид

$$\begin{aligned} U_0^{(0)} &= 0, & \frac{\partial^2 U_0^{(0)}}{\partial x^2} &= 0; \\ \frac{\partial W_0^{(0)}}{\partial x} &= 0, & \frac{\partial^3 W_0^{(0)}}{\partial x^3} &= 0. \end{aligned}$$

Начальные условия считаются нулевыми.

Решение системы уравнений (12), удовлетворяющее условиям закрепления торцов, а

также функции внешних воздействий представим в виде

$$\begin{aligned} U_0^{(0)} &= \sum_{m=1}^{\infty} u(t) \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ W_0^{(0)} &= \sum_{m=1}^{\infty} w(t) \cos \frac{m\pi x}{l}; \\ f_x &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{xm}(t) \sin \frac{m\pi x}{l}; \\ f_z &= \sum_{m=1}^{\infty} f_{zm}(t) \cos \frac{m\pi x}{l}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подстановка (14) в (12) приводит к системе двух дифференциальных уравнений четвертого порядка относительно функций $u(t)$ и $w(t)$. Задача решена численно при следующих значениях физико-механических и геометрических параметров трехслойной пластинки:

$$\begin{aligned} \xi &= 0.9h_0, l = 0.4m, h_0 = 0.04m, h_1 = 0.001m, \\ \rho_0 &= 30 \frac{kg}{m^3}, \rho_1 = 2700 \frac{kg}{m^3}, E_0 = 0.1650 \cdot 10^9 Pa, \\ E_1 &= 69 \cdot 10^9 Pa, \nu_0 = 0.03125, \nu_1 = 0.33, \\ f_{xm}(t) &= t^2, f_{zm}(t) = 3t^2. \end{aligned}$$

По результатам решения системы дифференциальных уравнений (2.3.1) с помощью пакета прикладных программ “Maple-12” вычислены главные части продольного и поперечного перемещения точек срединного слоя в зависимости от времени и координаты. Полученные результаты приведены на рис. 2. а) б); рис. 3. а) б).

Выводы.

На рис.2-3 а, приведены графики зависимостей главных частей перемещений $U_0^{(0)}(x, t)$ и $W_0^{(0)}(x, t)$ от времени при различных значениях координаты x . На рис.2-3 б приведены графики зависимостей главных частей перемещений $U_0^{(0)}(x, t)$ и $W_0^{(0)}(x, t)$ от координаты x при различных значениях времени t .

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 8.771
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

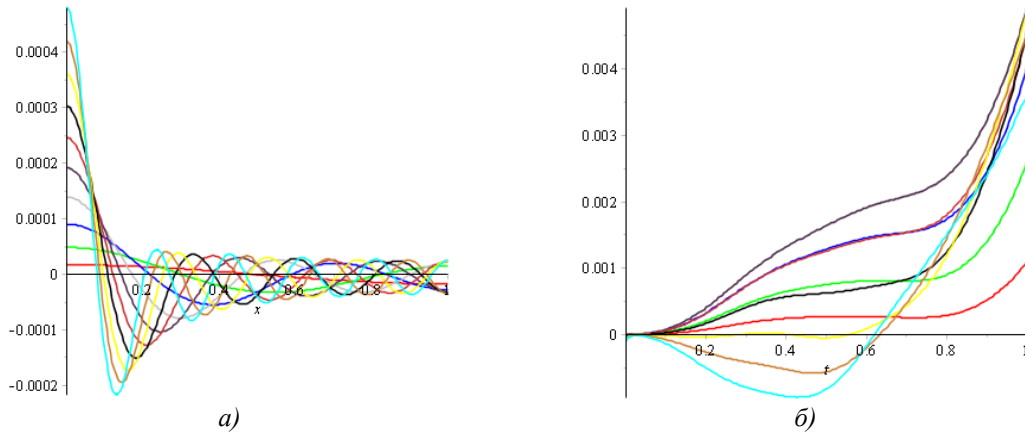


Рис 2. По продольного перемещению U_0 а) от времени и б) от координаты

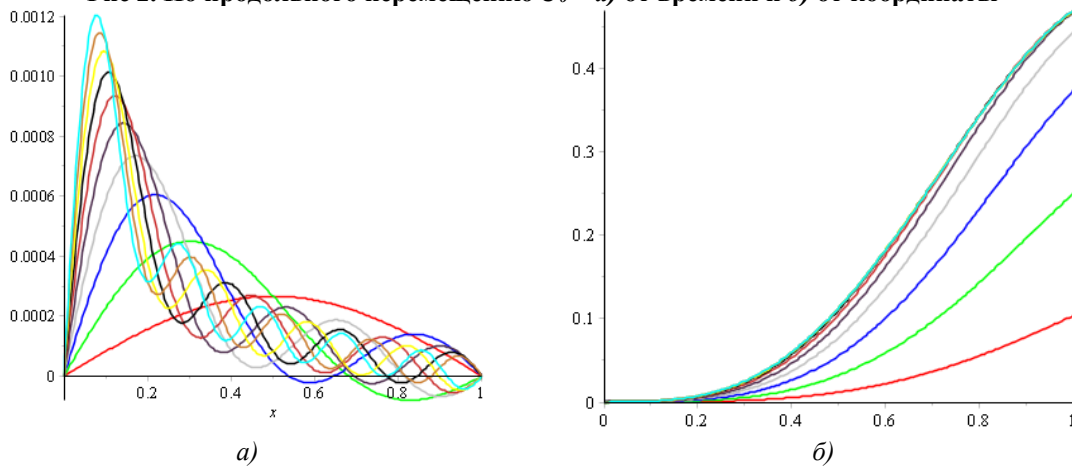


Рис 3. По поперечного перемещению W_0 а) от времени и б) от координаты

Из приведенных графиков на рис. 2. а) и б) следует, что амплитуды главной части продольного перемещения слоя $U_0^{(0)}(x, t)$ в начале процесса имеют небольшие отклонения от нулевой отметки. В моментах времени больших, чем одной пятой части действия нагрузок, т.е. при $t > 0,2$, они начинают резко возрастать для сечений пластинки, расположенных до середины пластинки, т.е. до $x < 0,5$. Это указывает на то, что точки сечений пластинки, находящиеся левее срединного сечения $x = 0,5$ получают положительные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в левой ее половине испытывают растяжения.

С другой стороны в тех же моментах времени точки сечений пластинки, находящиеся правее срединного сечения $x = 0,5$, получают отрицательные перемещения, т.е. продольные волокна пластинки в правой ее половине испытывают сжатие. Данное двойное поведение сечений, находящихся по разным сторонам срединного сечения пластинки, полностью согласуется с физической сущностью решаемой задачи.

При этом, левый и правый края пластинки испытывают продольные перемещения,

абсолютные значения которых не превышает 0,25 (величина безразмерная). При $x = 0,5$ главная часть $U_0^{(0)}(x, t)$ продольного перемещения $U_0(x, t)$ равна нулю. Это вызвано тем, что продольного перемещения $U_0^{(0)}(x, t)$ присутствует функция $\cos \frac{m\pi x}{l}$, которая при $x^* = \frac{x}{l} = 0,5$ равна нулю.

Из рис. 2 б) следует, что изменение главной части продольного перемещения $U_0^{(0)}(x, t)$ носит синусоидальный характер. На левом и правом краях пластинки оно достигает максимальные значения, которая соответствует поставленным условиям задачи.

В поперечном направлении амплитуда главной части поперечного перемещения слоя $W_0^{(0)}(x, t)$ в начальный момент времени очень мала, которая начинает возрастать с течением времени. Деформация слоя в поперечном направлении становится значительной с течением времени.

При этом на торцах слоя $W_0^{(0)}(x, t)$ равна нулю. Максимальные значения $W_0^{(0)}(x, t)$ наблюдаются в сечении $x = 0,5$ в конце времени расчета при $t = 1$. Это показывает, что амплитуды

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 8.771
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

$W_0^{(0)}(x, t)$ в сечениях срединного слоя возрастают с течением времени (рис.3 а,б). Значение $W_0^{(0)}(x, t)$ в точке максимума небольшое и равно 0.0027, что примерно на один порядка меньше, чем соответствующее значение главной части продольного перемещения.

Следовательно, можно сделать вывод о том, что при симметричных колебаниях трехслойной пластинки можно пренебречь поперечными перемещениями точек. С другой стороны ясно, что появление незначительных поперечных перемещений точек пластинки вызвано действием

продольных внешних нагрузок f_x , на лицевой и обратной сторонах пластинки.

В структуре главной части поперечного перемещения $W_0^{(0)}(x, t)$ присутствует функция $\sin \frac{m\pi x}{l}$, которая при $x^* = \frac{x}{l} = 0,5$, т.е. в срединном сечении равна единице, что обеспечивает достижение максимального значения перемещения $W_0^{(0)}(x, t)$ в этом сечении. Данный фактор также соответствует физической сущности поставленной задачи.

References:

1. Grigoluk, Je.I., & Selezov, I.T. (1973). *Neklassicheskie teorii kolebanij sterzhnej, plastin i obolochek*. Itogi nauki i tehniki. Ser. Mehanika deform. tverdyh tel, T. 5. (p.272). Moscow: VINITI.
2. Hudojnazarov, H. H. (2003). *Nestacionarnoe vzaimodejstvie cilindricheskikh obolochek i sterzhnej s deformiruemoj sredoj*. (p.325). T. Izd-vo med.lit. imeni Abu Ali Ibn Sina.
3. Aleksandrov, A.Ja., & Kurshin, L.M. (1968). *Trehslojnye plastinki i obolochki. Prochnost', ustojchivost', kolebanija*. (pp.245-308). Moscow: Mashinostroenie, t.2.
4. Petrashen', G.I. (1966). *Problemy inzhenernoj teorii kolebanij vyrozhdennyh sistem. Iss-ja uprugosti i plastichnosti*. (pp.3-33). L.: Izd-vo LGU, - №5.
5. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1968). *Ob inzhenernyh uravnenijah kolebanij neideal'no-uprugih plastin*. Trudy MIAN. T. 95, (pp.151-183). L.: Nauka.
6. Filippov, I.G. (1986). Utochnenie differencial'nyh uravnenij kolebanija vjazkouprugih plastin i sterzhnej. *Prikl.meh*, 22, №2, pp. 71-78.
7. Mirzakobilov, N.H. (1992). *Kolebanija trehslojnyh plastin chastnogo vida*. Diss. na sois. uch. st. kand. nauk. (p.139). Moskva.
8. Filippov, I.G., & Cheban, V.G. (1988). *Matematicheskaja teorija kolebanij uprugih i vazkoupругih plastin i sterzhnej*. (p.188). Kishinev: «Shtiinca».
9. Hudojnazarov, H.H., & Filippov, I.G. (1990). Utochnenie differencial'nyh uravnenij prodol'no - radial'nyh kolebanij krugovoj cilindricheskoj vjazkoupругoj obolochki. *Prikl. meh*, 26, №2, pp.63 - 71.
10. Khudoynazarov, Kh., Abdirashidov, A., & Burkutboyev, Sh.M. (2016). Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, no.1, pp. 38-51.
11. Khudoynazarov, Kh.Kh., & Burkutboyev, Sh.M. (2017). Mathematical modelling of torsional vibrations of cylindrical shell taking into account of flowing fluid and rotation. *Mathematical Modeling and Computational Methods*, no.4, pp. 31-47.
12. Petrashen', G.I., & Hinen, Je.V. (1971). Ob uslovijah primenimosti inzhenernyh uravnenij neideal'no-uprugih plastin. *Voprosy dinamiki teorii rasprostraneniya sejsmicheskoj volny*, № 11, Moscow: Nauka, pp. 48-56.