

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2022 Issue: 03 Volume: 107

Published: 10.03.2022 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Jamshid Norbutayevich Abdurazzakov
 Samarkand State University
 Senior Lecture to Department of
 Theoretical and Applied Mechanics,
abdurazzoqovjamshid2688@gmail.com

DEVELOPMENT OF A MATHEMATICAL MODEL AND NUMERICAL CALCULATION OF TORSIONAL VIBRATIONS OF A ROUND ROD TAKING INTO ACCOUNT PHYSICAL NONLINEARITY

Abstract: In this work, on the basis of the equations of torsional vibrations of a circular rod derived by the author, taking into account physical nonlinearity, the problem of torsional vibrations of a rod is numerically solved. A comparative analysis of the results obtained for nonlinear and linear cases is carried out. To solve the problem, a numerical finite difference method is applied. The approximation of the oscillation equation and boundary conditions leads to a system of algebraic equations, the solution of which is not mathematically difficult. On the basis of the obtained numerical data of the problem, graphs of the dependences of the torsional displacement and stresses on time were constructed. The main conclusions made on the basis of the constructed graphs of displacement and stresses are presented.

Key words: mathematical model, rod, torsional vibrations, displacement, stresses, physical nonlinearity.

Language: Russian

Citation: Abdurazzakov, J. N. (2022). Development of a mathematical model and numerical calculation of torsional vibrations of a round rod taking into account physical nonlinearity. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 03 (107), 319-323.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-107-19> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2022.03.107.19>

Scopus ASCC: 2200.

РАЗРАБОТКА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ И ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛОГО СТЕРЖНЯ С УЧЕТОМ ФИЗИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Аннотация: В работе на основе выведенных автором уравнений крутильных колебаний круглого стержня с учетом физической нелинейности численно решена задача о крутильных колебаниях стержня. Выполнен сопоставительный анализ результатов, полученных для нелинейных и линейных случаев. Для решения задачи применен численный метод конечных разностей. Аппроксимация уравнения колебаний и граничных условий приводит к системе алгебраических уравнений, решение которой не является сложной в математическом отношении. На основе полученных численных данных задачи построены графики зависимостей крутильного перемещения и напряжений от времени. Приведены основные выводы, сделанные на основе построенных графиков перемещения и напряжений.

Ключевые слова: математическая модель, стержень, крутильные колебания, перемещение, напряжения, физическая нелинейность.

Введение

В работе [1] рассмотрены задачи физически-нелинейной теории упругости, при которых закон Гука заменяется нелинейным законом упругости, но сохраняются геометрические соотношения классической теории упругости. Предложены

математические модели стержней, учитывающие геометрическую и физическую нелинейности и деформацию (изменение формы поперечного сечения) при кручении в результатах исследований [2,3], на базе которых изучается распространение и взаимодействие интенсивных

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 3.939
 ESJ (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

упругих волн. Построение основных соотношений стержневой теории заключается в приведении трехмерной задачи к одномерной. Исследователи при этом стараются вывести уточненные дифференциальные уравнения колебаний, учитывающие те или иные факторы физического, механического или геометрического характера [4,5,6]. Исследователи при этом стараются вывести уточненные дифференциальные уравнения колебаний, учитывающие те или иные факторы физического, механического или геометрического характера [7,8].

Основные соотношения.

В цилиндрической системе координат (r, θ, z) рассмотрим однородный и изотропный круглый вязкоупругий стержень радиуса r_0



Рис. 1

Задачи о крутильных колебаниях круглого стержня являются осесимметричными задачами относительно оси вращения и поэтому, компоненты тензора напряжений и вектора перемещений не зависят от угловой координаты θ . Следовательно, при крутильных колебаниях отличными от нуля будут только напряжения $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$, $\sigma_{z\theta}(r, z, t)$ и крутильное перемещение $U_\theta(r, z, t)$. Исходя из этого уравнения движения круглого стержня при его крутильных колебаниях можно записать как [6]:

$$\frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_{z\theta}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = \rho \frac{\partial^2 U_\theta}{\partial t^2}, \quad (2)$$

где ρ – плотность материала стержня.

Предполагается, что крутильные колебания вызываются напряжением $f_{r\theta}(z, t)$ на его поверхности, т.е. граничное условие задачи при $r = r_0$ имеет вид:

$$\sigma_{r\theta}(r_0, z, t) = f_{r\theta}(z, t). \quad (3)$$

Подставляя выражения (1) в уравнения движения (2), получим дифференциальное уравнение в частных производных относительно перемещений. Здесь, учитывая граничные условия (3) из уравнения (2) с учетом соотношений (1) после выполнения некоторых математических выкладок получим уравнения крутильных колебаний круглого стержня с учетом физической нелинейности

(рис.1). Считается, что связь между напряжениями и деформациями задана физически нелинейными соотношениями [1]:

$$\sigma_{r\theta} = G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{z\theta} = G\gamma(\psi_0^2)\varepsilon_{z\theta}. \quad (1)$$

где $\varepsilon_{r\theta} = \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r}$, $\varepsilon_{z\theta} = \frac{\partial U_\theta}{\partial z}$ – компоненты

тензора деформации; G – модуль сдвига;

$\gamma(\psi_0^2) = 1 + \gamma_2\psi_0^2$ – нелинейный функционал;

$\psi_0^2 = \frac{2}{3}(\varepsilon_{r\theta}^2 + \varepsilon_{z\theta}^2)$ – интенсивность деформации

сдвига; $\gamma_2 < 0$ – коэффициент,

характеризующий физическую нелинейность стержня [1,5,13].

$$\frac{1}{b^2} \frac{\partial^2 U_{\theta,0}(z,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U_{\theta,0}(z,t)}{\partial z^2} + \frac{2r_0^2}{3} \gamma_2 \left(\frac{\partial U_{\theta,0}(z,t)}{\partial z} \right)^2 \times \frac{\partial^2 U_{\theta,0}(z,t)}{\partial z^2} = \frac{4}{r_0^2 G} f_{r\theta}(z,t) \quad (4)$$

Здесь $b = \sqrt{G/\rho}$ – скорость распространения поперечных волн в материале стержня; $U_{\theta,0} = U_\theta/r_0$, в этом случае функция $U_{\theta,0}$ является главной ной частью смещения точек оси стержня.

Заметим, что уравнение (4) при $f_{r\theta}(z, t) \neq 0$ и $\gamma_2 = 0$ переходит в уравнение работы [6], при $f_{r\theta}(z, t) = 0$ и $\gamma_2 = 0$ переходит в классическое уравнение крутильных колебаний круглого стержня. Наконец при $f_{r\theta}(z, t) = 0$, $\gamma_2 \neq 0$ и отсутствии последнего члена уравнения совпадает с уравнением работы [1].

Постановка задачи.

Рассмотрим круглый стержень длиной l , подвергнутый воздействию внешней нагрузки на одном конце. Будем считать, что второй его конец закреплен. Тогда перемещения точек стержня будут удовлетворять следующим граничным и начальным условиями:

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 3.939
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$U_{\theta}(r, z, t)|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial U_{\theta}(r, z, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0,$$

$$0 \leq z \leq l, \quad 0 \leq r \leq r_0, \quad (5)$$

$$U_{\theta}(r, z, t)|_{z=0} = g(t), \quad U_{\theta}(r, z, t)|_{z=l} = 0,$$

$$0 \leq t \leq T, \quad r = r_0. \quad (6)$$

Исследуем нелинейный волновой процесс в стержне, поверхность которого свободен от внешних нагрузок. Поэтому в качестве основного разрешающего уравнения примем уравнение (4) и полагая в нем $f_{r\theta}(z, t) = 0$ в правой части вводя безразмерные переменные по формулам

$$t = \frac{l}{b} t^*, \quad z = z^* l. \quad U_{\theta,0} = U^* \quad (7)$$

Учитывая подстановки (7) в приведенном выше уравнении (4), приведем уравнение к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial z^2} + \frac{2r_0^2}{3l^2} \gamma_2 \left(\frac{\partial U(z, t)}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial^2 U(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (8)$$

Граничным и начальным условиями:

$$U(0, t) = \frac{g(t)}{r_0} \quad \text{при} \quad z = 0;$$

$$U(l, t) = 0 \quad \text{при} \quad z = l; \quad (9)$$

$$U(z, 0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0;$$

$$\frac{\partial U(z, 0)}{\partial t} = 0 \quad \text{при} \quad t = 0, \quad (10)$$

$$\text{где} \quad g(t) = \begin{cases} A \sin\left(\frac{\pi t}{t_1}\right), & \text{при} \quad t \leq t_1; \\ 0, & \text{при} \quad t > t_1, \end{cases}$$

t_1 – время действия нагрузки.

Численное решение и обсуждения.

Для решения задачи применим численный метод конечных разностей в явном виде в области изменения независимых переменных z и t ($0 \leq z \leq l$, $0 \leq t \leq T$) построим прямоугольную сетку с постоянными шагами $h = l/N$ и $\tau = T/M$ (T – время пробега волны по длине стержня), координаты узлов которой определяются формулами

$$z = ih, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad t = j\tau, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Заменив производные функции перемещения в уравнении (8) конечно-разностными их выражениями

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \approx \frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2};$$

$$\frac{\partial U}{\partial z} \approx \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h};$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \approx \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2}.$$

получим следующее алгебраическое уравнение

$$\left(\frac{U_i^{j+1} - 2U_i^j + U_i^{j-1}}{\tau^2} - \frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} \right) + \frac{2r_0^2}{3l^2} \gamma_2 \left(\frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{h} \right)^2 \left(\frac{U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j}{h^2} \right) = 0.$$

Решив данное уравнение относительно U_i^{j+1} будем иметь

$$U_i^{j+1} = 2U_i^j - U_i^{j-1} + \frac{\tau^2}{h^2} \left[1 + \frac{r_0^2 \gamma_2}{6l^2 h^2} (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)^2 \right] \times \left(U_{i+1}^j - 2U_i^j + U_{i-1}^j \right) \quad (11)$$

$$i = 1, 2, \dots, N+1; \quad j = 1, 2, \dots, M+1.$$

Аналогично преобразовав граничные - (9) и начальные - (10) условий получим

$$\text{при} \quad z = 0, \quad U_0^j = A \sin\left(\pi \frac{j\tau}{t_1}\right);$$

$$\text{при} \quad z = l, \quad U_{N+1}^j = 0. \quad (12)$$

$$\text{при} \quad t = 0, U_i^0 = 0, \quad \frac{U_i^1 - U_i^0}{h} = 0, \quad (13)$$

Таким образом, исходная задача приводится к решению системы (11)-(13). Для решения задачи составлена программа на языке *Maple-17*. Для расчетов приняты следующие значения безразмерных параметров: $r_0 = 0.02$; $l = 1$; $T = 1$; $A = 0.0004$. Время действия нагрузки считается равным $t_1 = 1$. Полученные численные результаты представлены на рис. 2-3 в виде графиков зависимостей перемещения от времени t в сечениях стержня z при различных значениях параметра нелинейности γ_2 . *Материал стержня:* (сплав алюминию Д16Т) [1,5]: – $G = 0.277 \cdot 10^5 \text{ MPa}$; $\rho = 2780 \text{ kg/m}^3$; $\gamma_2 = -0.3878 \cdot 10^6$.

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
РИИЦ (Russia) = 3.939
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

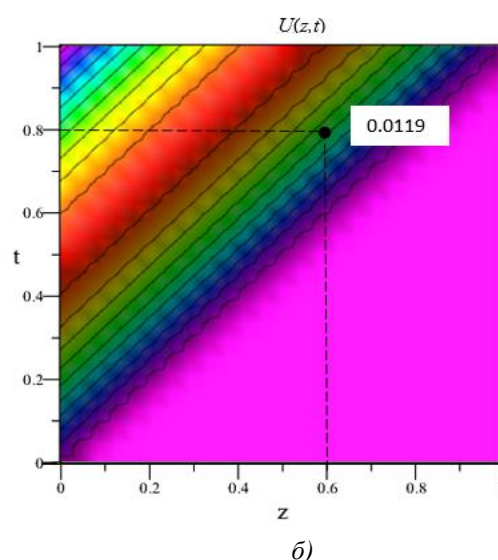
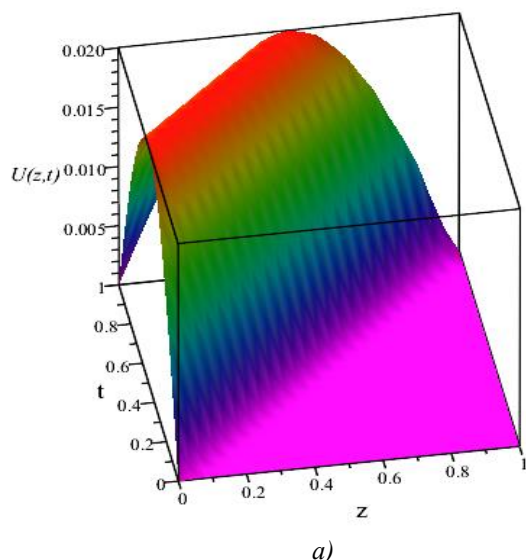


Рис 2. $\gamma_2 = 0$ - линейный.

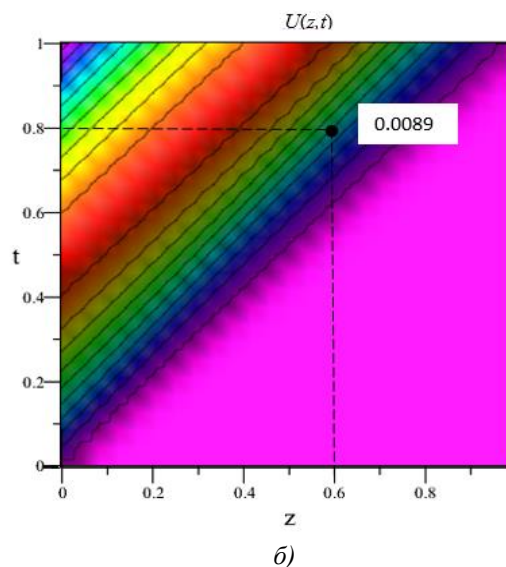
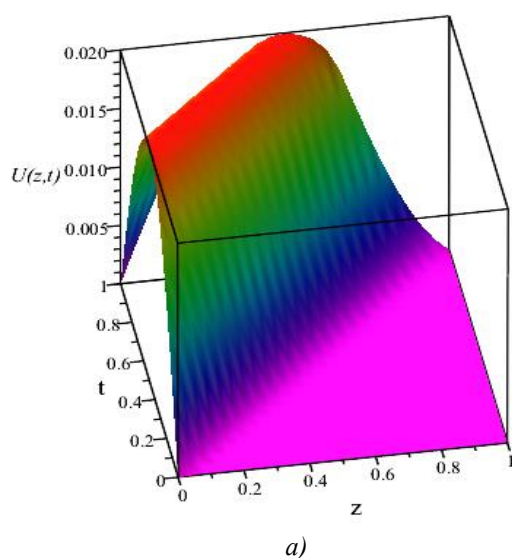


Рис 3. $\gamma_2 = -0,3878 \cdot 10^6$ - нелинейный

Выводы.

При этом значение $\gamma_2 = 0$ соответствует случаю линейной задачи. Из представленных на (рис.1. а) и б)) зависимостей следует, что влияние параметра нелинейности $\gamma_2 \neq 0$ усиливается с удалением от торца $z=0$: в сечении стержня $z=0,855$; $t=1$ при $\gamma_2 = -0,3878 \cdot 10^6$ и разница между максимальными значениями перемещения $U(z,t)$ в линейном и нелинейном случаях составляет приблизительно 34,4%, в сечениях $z=0,4$; $z=0,6$ и $z=0,9$ этот показатель равен,

соответственно 5,7%; 25,2% и 21,8%. При всех значениях малого параметра нелинейности максимальные значения перемещения $U(z,t)$ в нелинейном случае всегда меньше, чем в линейном случае. Отсюда следует вывод, что линейная модель дает повышенные максимальные значения перемещения чем нелинейная модель. Можно также наблюдать скачкообразное изменение значения перемещения по нелинейной модели и в конце времени затухания периода возмущений перемещения во всех сечениях стержня.

Impact Factor:	ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
	ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИИ (Russia) = 3.939	PIF (India) = 1.940
	GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
	JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

References:

1. Kauderer, G. (1961). *Nelinejnaja mehanika*. (p.780). Moscow: Inost. leter.
2. Erofeev, V., & Orehova, O. (2012). *Nelinejnye krutil'nye i izgibno-krutil'nye volny v sterzhnjah*. (p.136). LAP. LAMBERT Academic Publishing.
3. Erofeev, V.I., & Lamps, B.B. (2014). Nelinejnaja matematicheskaja model' uprugogo sterzhnja, sovershaushhego krutil'nye kolebanija, uchityvaushhaja deplanaciju poperechnogo sechenija. *Vestnik nauchno-tehnicheskogo razvitija*, №4 (80), pp.12-15.
4. Halmuradov, R.I. (2017). Uravnenija kolebanija vjzakuprugoj plastinki. *Nauchnyj vestnik Samarkandskogo gosudarstvennogo universiteta*, №3, 86-90.
5. Curpal', I.A. (1976). *Raschet jelementov konstrukcij iz nelinejno-uprugih materialov*. (p.176). Kiev: Tehnika.
6. Hudonazarov, H., Abdirashidov, A., & Burkutboev, Sh. (2016). Modelirovanie krutil'nyh kolebanij vjzakuprugogo kruglogo sterzhnja, vrashhaushhegosja s postojannoju uglovoj skorost'ju. *Matematicheskoe modelirovanie i chislennye metody*, № 1, (9), pp. 38-51.
7. Khudoynazarov, Kh.Kh., Khalmuradov, R.I., & Yalgashev, B.F. (2021). Longitudinal-radial vibrations of a elastic cylindrical shell filled with a viscous compressible liquid Tomsk state university. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 69: 139-154. doi 10.17223/19988621/69/11.
8. Khalmuradov, R.I., & Yalgashev, B.F. (2020). *Frequency analysis of longitudinal-radial vibrations of a cylindrical shell*. IOP Conf. Series: Earth and Environmental Science (2020) 614 012087 doi: 10.1088/1755-1315/614/1/012087.
9. Khalmuradov, R.I., Khudoynazarov, Kh., & Omonov, Sh.B. (2021). *Model for calculation of anchor parameters fixings for vertical exploration works*. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science (CEES 2021) DOI: [1403/1757-1315/616/1/012098](https://doi.org/10.1088/1757-1315/616/1/012098)