

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
ISI (Dubai, UAE) = 1.582
GIF (Australia) = 0.564
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
ПИИИ (Russia) = 0.126
ESJI (KZ) = 9.035
SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
PIF (India) = 1.940
IBI (India) = 4.260
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2021 Issue: 08 Volume: 100

Published: 27.08.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Andrey Igorevich Popov

Samara State Technical University
junior researcher

Sofya Alekseevna Zinina

Samara State Technical University
engineer

Dmitriy Mihailovich Bragin

Samara State Technical University
engineer

Anton Vladimirovich Eremin

Samara State Technical University
Head of the Department of Industrial Heat Power Engineering

LOCAL NON-EQUILIBRIUM MODEL OF HEAT CONDUCTIVITY IN A ROD

Abstract: The article presents a study of a locally nonequilibrium model of thermal conductivity in a rod under boundary conditions of the third kind. The formulation of a boundary value problem in dimensional and dimensionless form is described, the solution of which is carried out by the finite difference method using an explicit approximation scheme. The results of the study are shown in the figures, which show the graphs of temperature changes in various sections of the bar over time.

Key words: thermal conductivity, locally nonequilibrium model, relaxation coefficient, boundary conditions of the third kind, finite difference method, dimensionless parameters.

Language: Russian

Citation: Popov, A. I., Zinina, S. A., Bragin, D. M., & Eremin, A. V. (2021). Local non-equilibrium model of heat conductivity in a rod. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 08 (100), 301-304.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-100-52> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.08.100.52>

Scopus ASCC: 2610.

ЛОКАЛЬНО-НЕРАВНОВЕСНАЯ МОДЕЛЬ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В СТЕРЖНЕ

Аннотация: В статье представлено исследование локально-неравновесной модели теплопроводности в стержне при граничных условиях третьего рода. Описана постановка краевой задачи в размерном и безразмерном виде, решение которой осуществляется методом конечных разностей с использованием явной схемы аппроксимации. Результаты исследования приведены на рисунках, на которых изображены графики изменения температуры в различных сечениях стержня во времени.

Ключевые слова: теплопроводность, локально-неравновесная модель, коэффициент релаксации, граничные условия третьего рода, метод конечных разностей, безразмерные параметры.

Введение

Изучением процессов теплопереноса занимается большое количество ученых. Существует множество различных моделей

теплопроводности [2-3]. В основе классической теории переноса лежит принцип локального термодинамического равновесия, согласно которому в любом малом элементе исследуемой

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

области наблюдается локальное термодинамическое равновесие, несмотря на наличие градиентов термодинамических параметров в системе в целом. Дифференциальные уравнения, выведенные на основе этих законов, не учитывают пространственно-временную нелокальность. Это значит, что такие уравнения не учитывают временную задержку реакции системы на внешнее возмущение (тепловое, механическое и тд.), что

противоречит всем экспериментальным исследованиям быстропротекающих процессов. Именно поэтому в настоящее время разрабатывается большое количество локально-неравновесных теорий.

В настоящей статье проводится исследование локально-неравновесной модели теплопроводности в стержне при граничных условиях третьего рода, схема которой представлена на рис. 1.

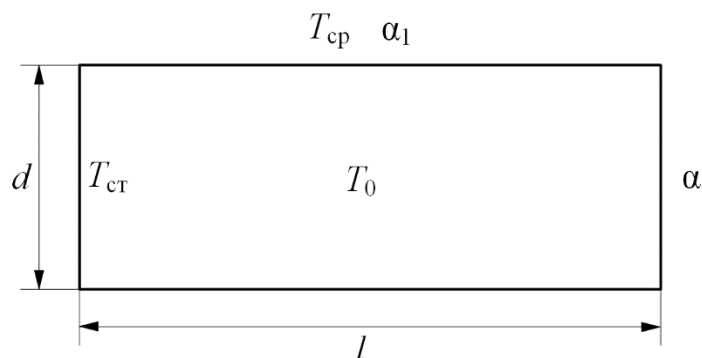


Рисунок 1 - Схема задачи

Для решения задач тепломассопереноса применяются различные аналитические или численные методы [1, 4-10]. Например, в статье [7] задача теплопроводности в шаре в безразмерных величинах решена при помощи приближенно-аналитического метода, основанного на совместно применении метода Фурье и метода Бубнова-Галеркина.

В данной же статье для решения задачи предлагается использовать численный метод – метод конечных разностей, реализуемый при помощи применения специальных программных средств, таких как Mathcad и MatLab.

Запишем постановку краевой задачи

$$\tau_1 \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + (1 + \tau_1 b) \frac{\partial T}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + ar_1 \frac{\partial^3 T}{\partial x^2 \partial t} - b(T_{cp} - T); \quad (1)$$

$$T(x, 0) = T_0; \quad (2)$$

$$\frac{\partial T(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad (3)$$

$$T(0, t) = T_{cp}; \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} - \alpha(T_{cp} - T) = 0. \quad (5)$$

где T – температура; t – время; x – координата; a – коэффициент температуропроводности; λ – коэффициент теплопроводности; α – коэффициент теплоотдачи с торца стержня; l – длина стержня; t – время; T_{cp} – температура

окружающей среды; T_0 – начальная температура; T_{cp} – температура стенки; r_1, τ_1 – коэффициенты релаксации, $b = (\alpha_1 p) / (cpS)$ – константа; α_1 – коэффициент теплоотдачи с боковой поверхности стержня; p – периметр; c – теплоемкость; ρ – плотность; S – площадь поперечного сечения. Коэффициенты r_1, τ_1 , помноженные на соответствующие производные второго и третьего порядка, представляют собой релаксационные слагаемые, учёт которых в уравнении теплопроводности позволяет получить ту самую задержку, возникающую при воздействии на систему внешнего возмущения (теплового, механического и др.).

При помощи введения следующих параметров приведем задачу к безразмерному виду

$$\Theta = \frac{T - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}}, \quad Fo = \frac{at}{l^2}, \quad \xi = \frac{x}{l}, \quad Fo_1 = \frac{a\tau_1}{l^2},$$

$$R_1 = \frac{ar_1}{l^2}, \quad Bi = \frac{al}{\lambda}, \quad D = \frac{T_{cp} - T_{cp}}{T_0 - T_{cp}}, \quad B = \frac{bl^2}{a}$$

где $\Theta, Fo, R_1, Fo_1, B, Bi, D$ – соответствующие безразмерные параметры.

С учётом введенных параметров задача (1) – (5) примет вид

$$Fo_1 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial Fo^2} + (1 + Fo_1 B) \frac{\partial \Theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} +,$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$+ R_1 \frac{\partial^3 \Theta}{\partial \xi^2 \partial Fo} - B\Theta$$

$$(0 < \xi < 0; Fo > 0); \quad (6)$$

$$\Theta(\xi, 0) = 1; \quad (7)$$

$$\frac{\partial \Theta(\xi, 0)}{\partial Fo} = 0; \quad (8)$$

$$\Theta(0, Fo) = D; \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta(1, Fo)}{\partial \xi} + Bi \Theta(1, Fo) = 0. \quad (10)$$

Для решения задачи (5) – (10) используем метод конечных разностей с применением явной схемы аппроксимации, где $\Delta \xi = 10^{-4}$ шаг по координате, а $\Delta Fo = 10^{-5}$ шаг по времени. В рассмотрение так же вводится следующая пространственно-временная сетка с шагами $\Delta \xi$ и ΔFo

$$\xi_k = k \cdot \Delta \xi, \quad Fo_i = i \cdot \Delta Fo, \quad k = \overline{0, K}, \quad i = \overline{0, I}.$$

В соответствии с МКР конечно-разностная аппроксимация задачи (6) – (10) примет вид

$$Fo_1 \frac{\Theta_k^{i-1} - 2\Theta_k^i + \Theta_k^{i+1}}{\Delta Fo^2} + (1 + Fo_1 B) \frac{\Theta_k^{i+1} - \Theta_k^i}{\Delta Fo} = \frac{\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i}{\Delta \xi^2} +$$

$$+ R_1 \frac{\Theta_{k-1}^{i+1} - 2\Theta_k^{i+1} + \Theta_{k+1}^{i+1} - (\Theta_{k-1}^i - 2\Theta_k^i + \Theta_{k+1}^i)}{\Delta \xi^2 \Delta Fo} - B\Theta_k^i; \quad (11)$$

$$\Theta_k^0 = 0; \quad (12)$$

$$\Theta_k^0 = \Theta_k^1; \quad (13)$$

$$\Theta_0^i = D \quad (14)$$

$$\frac{\Theta_K^i - \Theta_{K-1}^i}{\Delta \xi^2} + Bi \Theta_K^i = 0. \quad (15)$$

Результаты проведенного исследования представлены на рис. 2 – 3.

На рис. 2 представлен график изменения температуры по толщине пластины в разные моменты времени с учётом и без учёта релаксационных слагаемых в уравнении теплопроводности. На графике видно, что при малых временах $Fo_1 < 0,01$ за счёт учета релаксационных слагаемых на границе стержня возникает задержка принятия граничного условия (9).

График изменения температуры в отдельных сечениях стержня изображен на рис. 3. Исходя из его анализа видно, что скорость изменения температуры на границе стержня не имеет бесконечных значений при учёте релаксационных слагаемых. Так же отмечается общее снижение интенсивности процесса теплообмена.

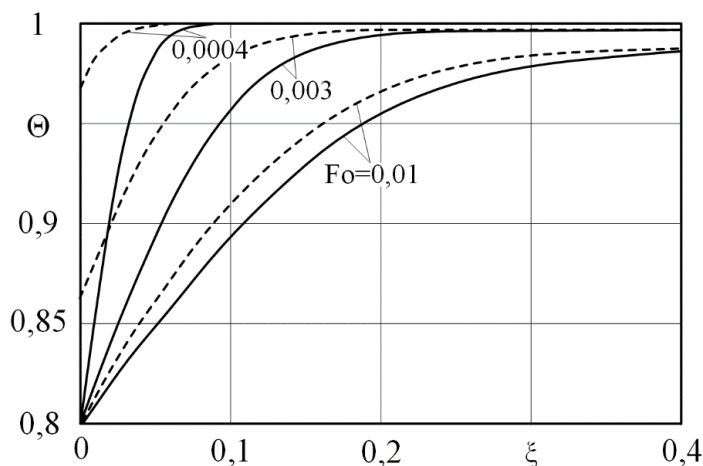


Рисунок 2 - Распределение температуры по длине стержня:

— $Fo_1 = R_1 = 0$; ---- $Fo_1 = R_1 = 0,01$, $B = 1,56$, $D = 0,8$.

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 1.582	ПИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 9.035	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 7.184	OAJI (USA) = 0.350

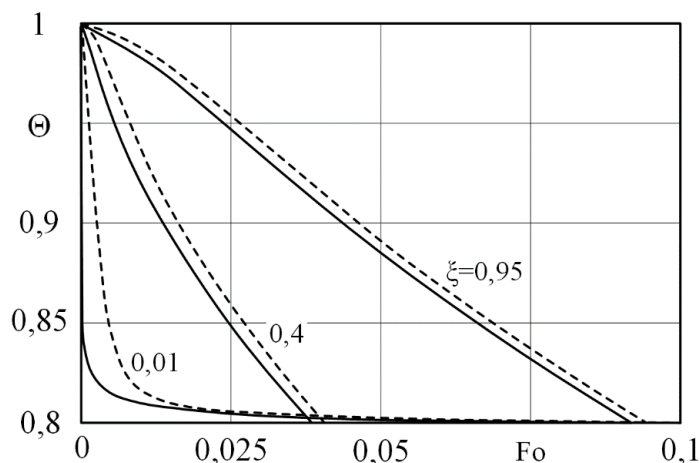


Рисунок 3 - График изменения температуры в сечениях с течением времени:

— $Fo_1 = R_1 = 0$; ---- $Fo_1 = R_1 = 0,01$, $B = 1,56$, $D = 0,8$.

Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 21-79-00047, <https://rscf.ru/project/21-79-00047/>

References:

1. Kudinov, V.A., Eremin, A.V., & Stefanyuk, E.V. (2015). Analiticheskie resheniya zadach teploprovodnosti s peremennymi vo vremeni koefitsientami teplootdachi. *Inzhenerno – fizicheskij zhurnal*, Minsk, №3(88), pp.663 – 673.
2. Lykov, A. V. (1967). *Teoriya teploprovodnosti*. (p.600). Moscow: Vysshaya shkola.
3. Tihonov, A.N., & Samarskij, A.A. (1999). *Uravneniya matematicheskoy fiziki*. (p.798). Moscow: MGU.
4. Eremin, A.V., Kudinov, V.A., & Stefanyuk, E.V. (2018). Heat exchange in a cylindrical channel at stabilized fluid laminar flow. *Fluid Dynamics*, №82(1), pp.29–39.
5. Eremin, A.V., Gubareva, K.V., & Popov, A.I. (2020). *About One Method of Mathematical Modeling of Heat Transfer in a Channel under Boundary Conditions of the Third Kind*, 2020 International Multi-Conference on Industrial Engineering and Modern Technologies.
6. Gubareva, K., Popov, A., Krasnova, N., Trubitsyn, K., & Tkachev, V. (n.d.). *On a Method for Solving Non-Stationary Heat Conduction Problems with Constant over*.
7. Popov, A.I., Iglin, P.V., Gubareva, K.V., Iglina, T.V., & Doronin, A.S. (2020). *Study of temperature fields in a ball bearings bodies under boundary conditions of the third kind*. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. №791.
8. Popov, A.I., Iglin, P.V., Gubareva, K.V., Iglina, T.V., & Doronin, A.S. (2020). *Study of temperature fields in a ball bearings bodies under boundary conditions of the third kind*, 2020 IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, 791 (1).
9. Gubareva, K.V., Popov, A.I., Krasnova, N.P., Trubitsyn, K.V., & Tkachev, V.K. (2019). *On a method for solving non-stationary heat conduction problems with constant over time internal heat sources*, 2019 Proceedings - 2019 21st International Conference; Complex Systems: Control and Modeling Problems, pp. 411-415.
10. Mitchell, S.L., & Myers, T.G. (2010). Application of Standard and Refined Heat Balance Integral Methods to One-Dimensional Stefan Problems. *Siam Review*, vol. 52, no. 1, pp. 57-86.