

УДК 517.956

DOI: DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-56-68

*Олег Никифорович Шабловский<sup>1</sup>,*

*кандидат физико-математических наук, профессор,  
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого  
(246746, Беларусь, г. Гомель, пр-т Октября, 48),  
e-mail: shablovsky-on@yandex.ru*

*Дмитрий Григорьевич Кроль<sup>2</sup>,*

*кандидат физико-математических наук, доцент,  
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого  
(246746, Беларусь, г. Гомель, пр-т Октября, 48),  
e-mail: kr-dmitry@yandex.ru*

*Иван Александрович Концевой<sup>3</sup>,*

*старший преподаватель,  
Гомельский государственный технический университет им. П. О. Сухого  
(246746, Беларусь, г. Гомель, пр-т Октября, 48),  
e-mail: ivankon@yandex.ru*

### **Эволюция и неустойчивость линии роста дендрита в переохлаждённом расплаве**

Изучен процесс роста кристалла в однокомпонентном переохлаждённом расплаве чистого вещества. Фазовая граница кристаллизации рассматривается как поверхность сильного разрыва, на которой выполнены условия динамической совместности, являющиеся следствием интегральных законов сохранения. Рассмотрен класс движений, для которого скорость фазовой границы есть функция локального угла наклона нормали к линии роста. Представлены результаты аналитического и численного исследования эволюции во времени двумерного контура фазовой границы. Изучена форма линии роста, её кривизна, скорость и тепловой поток в твёрдой фазе. Применительно к проблеме воздействия вибраций на процесс кристаллизации рассмотрено влияние колебаний скорости фазовой границы на интенсификацию теплообмена. Расчёты показали сильную чувствительность теплового потока к изменению амплитуды вибрационного воздействия. Рассмотрен равномерный (по специальной временной координате) рост двумерного осесимметричного контура дендрита; проанализирован случай, когда исходная линия испытывает возмущение, локализованное на конечном удалении от вершины. Установлено, что возмущение кривизны линии роста (выступ либо впадина) индуцирует предвестник боковой ветви дендрита: его геометрическим образом служит точка самопересечения эволюционирующей во времени линии контура. Прикладные аспекты данной работы связаны с методами высокоскоростного затвердевания расплава и с получением новых функциональных материалов.

<sup>1</sup>О. Н. Шабловский – постановка задачи, метод решения, анализ результатов.

<sup>2</sup>Д. Г. Кроль – численное моделирование линии роста кристалла, анализ морфологической неустойчивости.

<sup>3</sup>И. А. Концевой – численное моделирование воздействия вибраций на скорость роста кристалла, анализ результатов.

**Ключевые слова:** эволюция фазовой границы, морфологическая устойчивость, скорость роста, боковая ветвь

**Введение.** Проблема макроскопического роста кристалла из переохлаждённого расплава чистого вещества требует исследования морфологических свойств межфазной границы. Первостепенное значение имеют закономерности пространственно-временной эволюции линии роста и возникновение боковых ветвей дендрита. Современное состояние теоретических и экспериментальных исследований дендритообразования представлено в статьях [8–14]. Данная работа имеет следующие предпосылки.

1. Рост поверхности свободного дендрита характеризуется высокой степенью нестационарности. По мере увеличения переохлаждения однокомпонентного расплава усиливается роль локально-неравновесного теплопереноса, поэтому при формулировке исходной задачи применяется релаксационная модель Максвелла, а математической моделью фазовой границы кристаллизации служит поверхность сильного разрыва, на которой выполнены условия динамической совместности. Рассматривается класс поверхностей роста, скорость перемещения которых зависит только от локальной формы этой поверхности [14].

2. Предвестником неустойчивости макроскопических форм поверхности дендрита служат изгибы и складки, генерирующие возмущение кривизны исходной поверхности [8; 10; 11; 13].

Цель данной статьи – получить аналитическое описание эволюционных свойств двумерной линии роста кристалла, а также изучить условие появления предвестника боковой ветви дендрита.

**Уравнение роста.** Локально-неравновесная модель теплопереноса [4] содержит уравнение энергии и уравнение Максвелла для теплового потока

$$c \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{q} = 0, \quad \vec{q} + \gamma \frac{\partial \vec{q}}{\partial t} = -\lambda \operatorname{grad} T, \quad (1)$$

где  $t$  – время;  $T$  – температура;  $\vec{q}$  – вектор удельного теплового потока;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $c$  – объёмная теплоёмкость;  $\gamma$  – время релаксации теплового потока. Фазовую границу (далее – ФГ) кристаллизации моделируем поверхностью сильного разрыва  $f(x, y, z, t) = 0$ , где  $x, y, z$  – прямоугольные декартовы координаты в трёхмерном пространстве с ортонормированным базисом  $\vec{i}_\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 1, 2, 3$ . Считаем, что вершина дендрита движется прямолинейно вдоль оси  $x$  в отрицательном направлении, справа налево. Ортогональный базис  $\vec{s}, \vec{n}, \vec{b}$  соответствует касательной, главной нормали и бинормали к поверхности роста. Вектор внутренней нормали  $\vec{n} = \operatorname{grad} f / |\operatorname{grad} f|$  направлен в сторону кристаллической фазы. Единичный вектор касательной  $\vec{s}$  указывает положительное направление отсчёта дуговой координаты  $s$  от вершины к периферии дендрита. Вектор бинормали  $\vec{b} = \vec{s} \times \vec{n}$  вместе с  $\vec{s}, \vec{n}$  образует правую систему векторов. Скорость перемещения поверхности роста равна

$$\vec{N} = N \vec{n}, \quad N = -\frac{\partial f / \partial t}{|\operatorname{grad} f|}. \quad (2)$$

Дифференциальные уравнения (1) являются следствием интегральных законов

сохранения (их запись здесь не приводится). Динамические условия совместности на поверхности сильного разрыва выводим стандартным образом из интегральных законов сохранения

$$N\{u\} = \{q_n\} + Q, N\{\vec{q}\} = \{V\}\vec{n}, \quad Q = L \left( N + \gamma_j \frac{dN}{dt} \right), \quad (3)$$

$$u = \int_0^T c(T)dT; \quad (T) = \int_0^T \frac{\lambda(T)}{\gamma(T)} dT,$$

где фигурные скобки – символ скачка функции при переходе через разрыв;  $q_n$  – нормальная составляющая теплового потока;  $L$  – теплота фазового перехода единицы объёма вещества. В касательном и бинормальном направлениях имеем нулевые скачки теплового потока:  $\{q_s\} = 0$ ,  $\{q_b\} = 0$ . Подробный вывод условий (3) и анализ кинематических предвестников боковой ветви дендрита изложен в [7]. Направление  $\vec{n}$  характеризуется локальными углами наклона нормали к координатным осям  $\theta_\epsilon = (\vec{n}, \vec{i}_\epsilon)$ . Учитывая направление роста, заключаем, что доминирующая роль принадлежит угловой координате  $\theta_1 \equiv \theta$ . Известная кинетическая связь

$$|\vec{N}| = M(T_e - T_j), \quad T_e = T_c[1 - (UK/L)] \quad (4)$$

определяет нормальный механизм роста дендрита из расплава. Здесь  $T_e$  – температура равновесия между твёрдой и жидкой фазами;  $T_j$  – температура кристалла за фронтом сильного разрыва;  $T_c$  – равновесная температура кристаллизации;  $T_e - T_j$  – переохлаждение на ФГ;  $U$  – поверхностная энергия границы раздела фаз;  $K$  – средняя кривизна ФГ. Вид функции  $M(T_e - T_j)$  зависит от разнообразных физико-химических процессов [2].

Общая постановка тепловой задачи для однокомпонентной системы заключается в том, чтобы решить в каждой фазе уравнения теплопереноса, для которых заданы следующие граничные условия:

- 1) условия (3) и (4) на неизвестной поверхности дендрита;
- 2) условия теплообмена системы «расплав – твёрдая фаза» с внешней средой.

Ясно, что даже двухмерная нестационарная задача очень сложна.

Рассмотрим более простой (полуобратный) подход к проблеме, позволяющий выяснить многие существенные детали процесса формирования линии роста дендрита. Для этого разделим решение на два этапа:

- 1) кинематическая задача о построении фазовой границы  $f(x, y, t) = 0$  на основе уравнения (2), в котором функция  $N$  задана до построения решения основной задачи;
- 2) динамическая задача о тепловом поле, содержащем сильный разрыв  $f(x, y, t) = 0$ ; этот вопрос составляет предмет отдельного исследования.

В данной работе мы рассматриваем двухмерную задачу:  $(x, y)$  – прямоугольные декартовы координаты, если ФГ плоская двухмерная;  $y$  – радиальная координата, если ФГ обладает осевой симметрией. Будем изучать кинематические свойства линии роста дендрита, предполагая, что  $N = N(t, \theta)$  и априорно задавая физически содержательные зависимости  $N$  от угловой координаты. Известно, что такой подход оказался плодотворным в задачах отыскания форм тел, которые подвергаются аэродинамическому нагреву и уносу массы с обтекаемой поверхности; библиография

этой проблемы приведена авторами [1; 5; 6]. В дальнейшем используем некоторые математические результаты этих работ и дадим им новую физическую интерпретацию, рассматривая свойства линии раздела «расплав – кристалл». Будет показано, что простое исходное предположение о зависимости скорости  $N$  от локального угла наклона  $\theta$  даёт нетривиальные результаты о поведении линии роста. Данный факт объясняется тем важным обстоятельством, что функция  $N(t, \theta)$  содержит неявным образом информацию о кривизне линии роста: для двухмерной ФГ (плоской либо осесимметричной) выполнено равенство  $\partial\theta/\partial s = K_1$ , где  $K_1$  – первая главная кривизна. Справедливость этой формулы устанавливается непосредственными аналитическими вычислениями.

Для размерного и безразмерного уравнения (2) применяем одинаковую форму записи, полагая  $x \rightarrow x', y \rightarrow y', t \rightarrow t', N \rightarrow N', x = x'x_b, y = y'y_b, t = t't_b, N = N'N_b, N_b = x_b/t_b$ , где нижним индексом  $b$  отмечены масштабы координат, времени и скорости. Штрих, который относится к безразмерным переменным, далее не пишем. Все вычисления выполнены в безразмерных переменных. Для твёрдой фазы температуру  $T_j$  и тепловой поток  $q_{nj}$  на линии роста определяем из условий динамической совместности (3). При проведении расчётов изучаем наиболее простой вариант, когда тепловое состояние расплава однородное:  $q_* \equiv 0, T_* \equiv \text{const}, T_* < T_c$ . Теплофизические свойства расплава и кристалла берём постоянными. Это допущение оправдано тем, что оно относится к уже сформировавшемуся сильному разрыву.

**Эволюция двухмерного контура линии роста.** Запишем уравнение ФГ, выделив явно поперечную координату

$$y = F(x, t); N = -F_t/G < 0, \quad \cos \theta = F_x/G > 0;$$

$$G = |\text{grad}f| = [1 + (F_x)^2]^{1/2}, \quad F_t = \partial F/\partial t, \quad F_x = \partial F/\partial x.$$

Допустим, что скорость ФГ в каждый момент времени зависит от  $\cos \theta$

$$N = \tilde{A}_1(t)B_1(F_x) + \tilde{A}_2(t)B_2(F_x); \quad \tilde{A}_1(t) > 0, t \geq 0. \quad (5)$$

Это выражение мы принимаем для большей общности аналитического решения уравнения роста (2). В физическом отношении основной интерес представляют варианты  $B_2(F_x) \equiv 0$  и  $B_2(F_x) \equiv \text{const} \neq 0$ . Дифференциальное уравнение для функции  $F(x, t)$  имеет вид

$$F_t + \tilde{A}_1(t)D_1(F_x) + \tilde{A}_2(t)D_2(F_x) = 0, \quad D_1 = B_1G, \quad D_2 = D_2G. \quad (6)$$

Значит, нужно решить задачу Коши: определить интегральную поверхность уравнения (6), проходящую через заданную кривую:  $t = 0, y = F_0(x) = F(x, 0)$ . Следуя алгоритму [6], запишем полный интеграл уравнения (6)

$$F + D_1(c_1)f_1(t) + D_2(c_1)f_2(t) - c_1x - c_2 = 0, \quad f_1 = \int_0^t \tilde{A}_1(t)dt, \quad f_2 = \int_0^t \tilde{A}_2(t)dt,$$

где  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные. Возьмём начальную кривую в параметрическом виде:  $t = 0, x = h, y = F_0(h)$  где  $h$  – параметр;  $F_0''(h) \neq 0$ . Значит, при  $t = 0$

имеем  $F_0(h) - c_1 h - c_2 = 0$ . Дифференцируем эту формулу по  $h$ :  $F'_0(h) = c_1$ . Тогда находим  $c_2 = F_0(h) - hF'_0(h)$ , что позволяет указать однопараметрическое семейство поверхностей

$$F + D_1[F'_0(h)]f_1(t) + D_2[F'_0(h)]f_2(t) - xF'_0(h) - F_0(h) + hF'_0(h) = 0.$$

Продифференцировав это выражение по параметру  $h$ , получим  $D'_1 f_1 + D'_2 f_2 - x + h = 0$ ,  $D'_1 = dD_1/dF'_0$ ,  $D'_2 = dD_2/dF'_0$ . Итогом вычислений является параметрическое уравнение контура  $\Phi\Gamma$

$$x = h + D'_1[F'_0(h)]f_1(t) + D'_2[F'_0(h)]f_2(t),$$

$$F = F_0(h) + (D'_1 F'_0(h) - D_1)f_1(t) + (D'_2 F'_0(h) - D_2)f_2(t).$$

Рассмотрим сначала случай, когда в формуле (5)  $B_2(F_x) \equiv 0$ . Тогда  $f_1 \geq 0$  удобно применять как аналог времени  $t \geq 0$ : это даёт возможность не конкретизировать функцию  $\tilde{A}_1(t)$ , которая описывает реономные свойства  $\Phi\Gamma$ . Пусть исходной является цилиндрическая поверхность  $y^2 + (1 - x)^2 = 1$

$$F_0(h) = \sqrt{1 - (1 - h)^2}, \quad \beta \equiv F'_0(h) = (1 - h)/F_0(h), \quad h \in (0, 1],$$

$$x = h + f_1 D'_1(\beta), \quad F = F_0(h) + [D'_1(\beta)\beta - D_1]f_1, \quad D'_1 = dD_1(\beta)/d\beta.$$

Значение  $h = 0$  соответствует вершине дендрита,  $h = 1$  – границе её конечной окрестности. На плоскости  $(x, y)$  радиус кривизны контура для данного процесса роста равен

$$R = R_0 |1 + f_1 F''_0(h) d^2 D_1(\beta) / d\beta^2|,$$

$$R_0 = R(t = 0) = \frac{[1 + (F'_0)^2]^{3/2}}{|F''_0(h)|}, \quad F''_0(h) = \frac{-1}{F_0^2} \left[ \frac{(1 - h)^2}{F_0} + F_0 \right].$$

Верхняя часть дуги полуокружности:  $F_0(h) \geq 0$ ,  $F''_0(h) < 0$ ; нижняя часть дуги полуокружности:  $F_0(h) \leq 0$ ,  $F''_0(h) > 0$ . Поведение  $R/R_0$  с течением времени (т. е. при росте  $f_1 \geq 0$ ) зависит от свойств произведения  $F''_0(h) d^2 D_1/d\beta^2$ . Для определённости работаем с верхней частью дуги.

*Вариант 1:* монотонная зависимость  $N$  от угла  $\theta$ . Допустим, что

$$B_1 = (A_1 - A_2) + 2A_2 \cos^2 \theta, \quad B_2(F_x) \equiv 0, \quad A_1 < 0, \quad \theta \in (0, 90^\circ].$$

Здесь мы рассматриваем режим роста, при котором  $|N|$  зависит от  $\cos \theta$  квадратичным образом:  $\frac{\partial |N|}{\partial \theta} \sim A_2 \sin 2\theta$ . Случай  $|N| \sim (\cos \theta)^{2k+1}$ ,  $k \geq 1$  изучен в [7]; при  $k = 1$  решение уравнения уноса массы получено в [5]. Если  $A_1 < A_2 < 0$ , то при росте  $\theta$  модуль  $|N|$  убывает; если  $A_1 < (-A_2) < 0$ , то при росте  $\theta$  модуль  $|N|$  возрастает. Очевидно, что возрастание угла  $\theta$  означает удаление от вершины дендрита. Итак, в данном случае

$$B_1 = \frac{a_1 + b_1(F_x)^2}{G^2}, \quad D_1(\beta) = \frac{a_1 + b_1\beta^2}{(1 + \beta^2)^{1/2}}, \quad a_1 = A_1 - A_2, b_1 = A_1 + A_2. \quad (7)$$

Если  $h = +0$ , то  $\beta \rightarrow \infty$ ,  $D_1(\beta) \rightarrow b_1$ ,  $(\beta D_1' - D_1) \rightarrow 0$ , причём знак величины  $F_0''(h)d^2D_1/d\beta^2$  на вершине дендрита совпадает со знаком суммы  $A_1 + 3A_2$ . Таким образом, существует пороговое соотношение  $A_1 + 3A_2 = 0$  между параметрами  $A_1$  и  $A_2$ , определяющими скорость и форму линии роста. Если  $|N|$  при росте  $\theta$  убывает ( $A_2 < 0$ ) либо растёт не слишком сильно ( $0 < 3A_2 < (-A_1)$ ), то  $R(h = 0, f_1)/R_0(h = 0)$  убывает с течением времени; в этих двух случаях на плоскости  $(x, y)$  ФГ имеет вид клина, затупленного по дуге окружности, причём радиус этой окружности уменьшается с ростом  $t$ . Если по мере удаления от вершины  $|N|$  увеличивается, причём  $(-3A_2) < A_1 < (-A_2) < 0$ , то на вершине дендрита радиус затупления растёт с течением времени.

*Вариант 2:* немонотонная зависимость  $N$  от угла  $\theta$ . Допустим, что  $N = \tilde{A}_1(t)B_1(F_x)$ ,  $\tilde{A}_1(t) > 0$ ,  $t \geq 0$ ;  $B_1(F_x) = B_{01} + B_{11} \sin \theta + B_{21} \sin^3 \theta$ ,  $\sin \theta = 1/G$ ,  $\theta \in (0, 90^\circ]$ . Основным здесь является случай  $B_{01} + B_{11} + B_{21} < 0$ ,  $0 < B_{11} < (-9)B_{21}/4$ ,  $B_{01} < 0$ , когда существует максимум функции  $B_1$  при  $\theta = \theta_*$ :  $0 < \sin^2 \theta_* = (-B_{11}/3B_{21}) < 1$ . Расчёты показали, что остальные возможные виды немонотонности (максимум при  $B_{11} + B_{21} < 0$  и два случая, когда существует минимум) не имеют физического смысла. Таким образом,  $D_1(\beta) = B_{01}(1 + \beta^2)^{1/2} + B_{11} + [B_{21}/(1 + \beta^2)^2]$ , причём ясно, что  $[\beta D_1'(\beta) - D_1(\beta)] \rightarrow (-B_{11})$  при  $\beta \rightarrow \infty$ , т. е. при  $h = +0$ . На вершине дендрита радиус кривизны контура ФГ увеличивается с течением времени. В точке  $\theta = \theta_*$  имеем

$$F_x^{*2} = -(B_{11} + 3B_{21})/B_{11}, \quad \beta_* = 1/\operatorname{tg} \theta_*, \quad (1 - h_*)^2 = \beta_*^2/(1 + \beta_*^2),$$

$$\left. \frac{d^2 D_1(F_x)}{d(F_x)^2} \right|_{F_x=F_x^*} = \frac{B_{01}}{(1 + F_x^{*2})^{3/2}} - \frac{2B_{21}(4B_{11} + 9B_{21})}{B_{11}(1 + F_x^{*2})^3} < 0.$$

Следовательно, в точке максимума образующая контура ФГ спрямляется,  $R \rightarrow \infty$ .

Приведём результаты численного моделирования процесса роста при  $B_1 < 0$ ,  $B_2 \equiv \text{const}$ . Безразмерные (относительные) величины, определяющие тепловое состояние ФГ

$$\bar{q}_j = \frac{q_j}{(q_j)_{t=0, h=x_1}}; \quad \bar{T}_j = \frac{T_j}{(T_j)_{t=0, h=x_1}}; \quad \bar{N}_j = \frac{N_j}{(N_j)_{t=0, h=x_1}} \text{ и т. п.}$$

Исходный контур – парабола  $x = ay^{2b}$ ,  $a > 0$ ,  $2b > 1$ . В соответствии с этим имеем

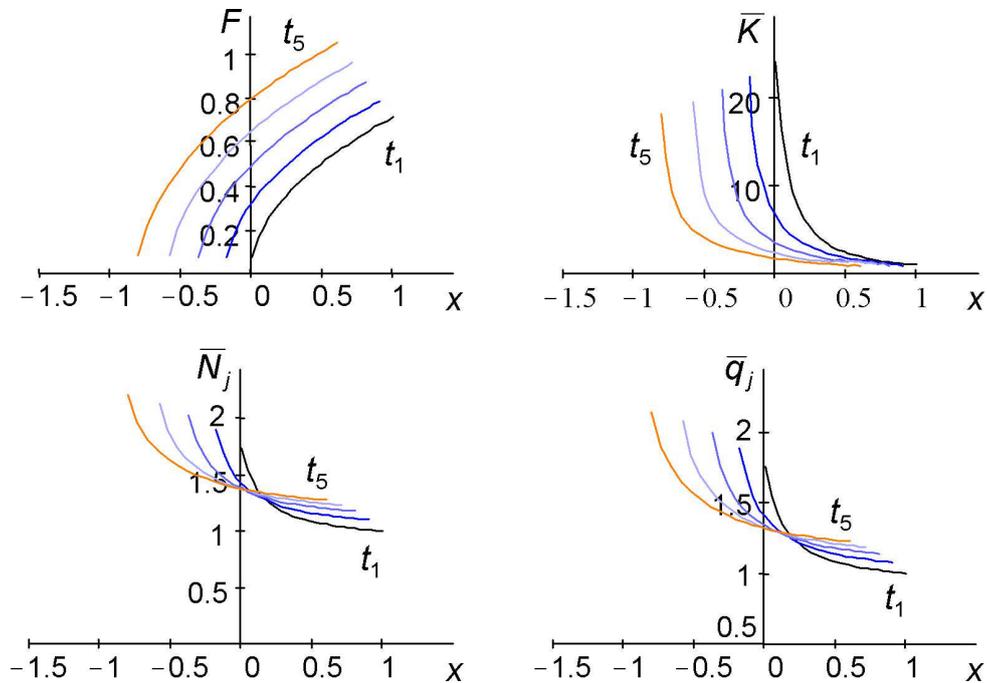
$$F_0(h) = \left(\frac{h}{a}\right)^{1/2b}; \quad K_0(h) = \frac{|d^2 F_0/dh^2|}{[1 + (dF_0/dh)^2]}, \quad h \in (0, x_1].$$

В физическом отношении представляют интерес три случая:

- 1) если  $0 < (1/b) < 1$ , то  $K_0(h = 0) = 0$  (плоская вершина дендрита);
- 2) если  $(1/b) = 1$ , то  $K_0(h = 0) = 2a$  (конечная кривизна вершины дендрита);

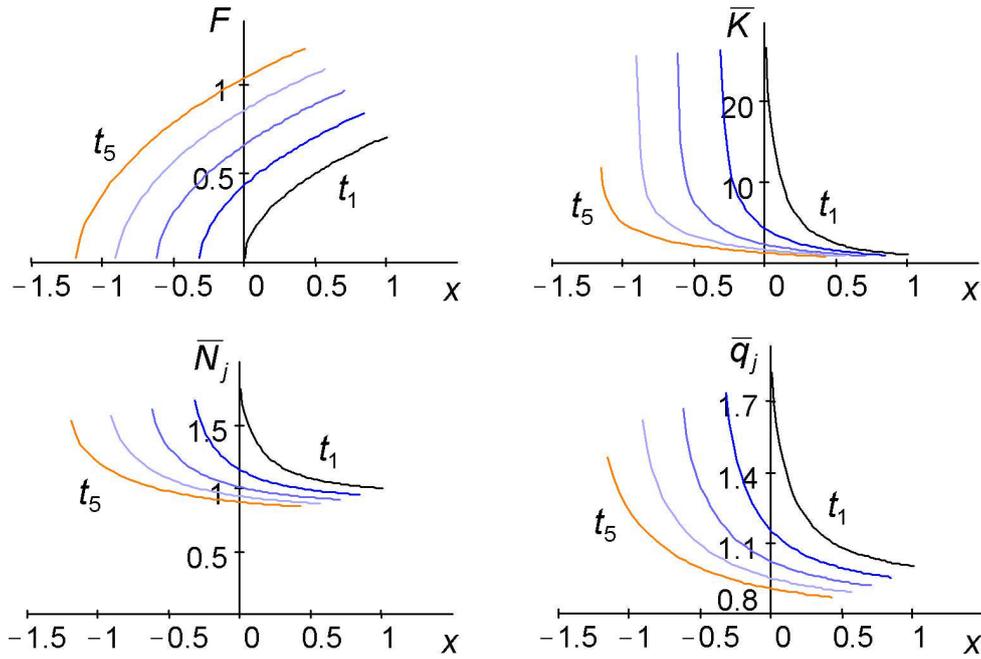
3) если  $1 < (1/b) < 2$ , то  $K_0(h = 0) \rightarrow \infty$  («игла» на вершине дендрита).

Таким образом  $a, b$  – параметры формы исходного контура;  $x_1$  характеризует размер носика дендрита. Расчёт выполняем от  $h = x_1 > 0$  в сторону  $h = +0$ , т. е. идём от периферии к вершине. В качестве примера в (5) была взята функция  $\tilde{A}_1(t) = N_m^0 + A_{11}\exp(-r_1t)$ ,  $N_m^0 > 0$ ,  $r_1 > 0$ . Она определяет скорость вершины. Ускоренное движение:  $A_{11} < 0$ ,  $\tilde{d}\tilde{A}_1/dt > 0$ ; замедленное движение:  $A_{11} > 0$ ,  $\tilde{d}\tilde{A}_1/dt < 0$ . Большое практическое значение имеет вибрационное воздействие на расплав либо на твёрдую фазу [3] и указанную там библиографию. Учитывая это обстоятельство, был рассмотрен модельный пример, когда  $\tilde{A}_2(t) = \tilde{a}_2 \sin p_2t$ ,  $f_2(t) = \tilde{a}_2(1 - \cos p_2t)/p_2$ ;  $|\tilde{A}_2(t)| < \tilde{A}_1(t)$ . Для представленных ниже вариантов расчётов приняты такие значения входных параметров процесса:  $x_1 = 1$ ,  $B_2 = 1$ ;  $a = 2$ ;  $N_m^0 = 1$ ;  $r_1 = 1$ ;  $b_1 = -1$ ;  $b = 1$ . На рис. 1 и 2 показаны форма линии роста и типичные зависимости кривизны, скорости и теплового потока от продольной координаты  $x$  для последовательных моментов времени  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 0,25$ ,  $t_3 = 0,5$ ,  $t_4 = 0,75$ ,  $t_5 = 1$ . Различия между ускоренным и замедленным режимами движения хорошо видны: на стадии ускорения/замедления значения  $\bar{N}_j$  и  $\bar{q}_j$  на периферии дендрита возрастают/убывают с течением времени. Наложение колебаний в значительной степени снижает неоднородность ускорения  $(\partial\bar{N}/\partial t)_j$  вдоль линии роста (эти графики здесь не приводятся). Важным результатом воздействия колебаний является значительное расширение интервала значений  $\bar{q}_j$  (рис. 3). Следовательно, под влиянием вибраций скорости происходит интенсификация теплопереноса в твёрдой фазе.



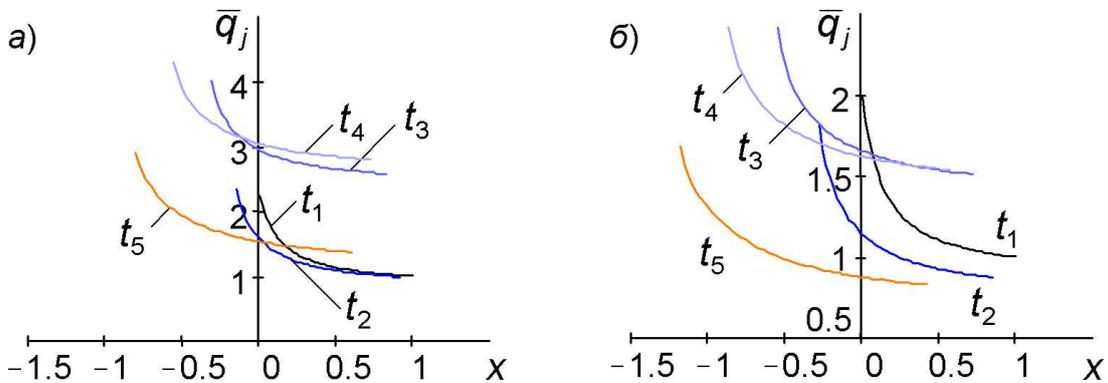
**Рис. 1.** Морфологические и тепловые свойства линии роста дендрита: ускоренное движение ( $A_{11} = -0,3$ ); в начальном состоянии вершина имеет конечную кривизну

**Fig. 1.** Morphological and thermal properties of the dendrite growth line: accelerated movement ( $A_{11} = -0,3$ ); originally the apex has finite curvature



**Рис. 2.** Морфологические и тепловые свойства линии роста дендрита: замедленное движение ( $A_{11} = 0,3$ ); в начальном состоянии вершина имеет конечную кривизну

**Fig. 2.** Morphological and thermal properties of the dendrite growth line: decelerated movement ( $A_{11} = 0,3$ ); originally the apex has finite curvature



**Рис. 3.** Тепловые свойства линии роста дендрита: суперпозиция одного цикла колебаний ( $\tilde{a}_1 = 0,2$ ) с ускоренным (а) и замедленным (б) движениями вершины:

а -  $A_{11} = -0,3$ ; б -  $A_{11} = 0,3$

**Fig. 3.** Thermal properties of the dendrite growth line: superposition of oscillations ( $\tilde{a}_1 = 0,2$ ) with accelerated (a) and decelerated (b) apex movements:

а -  $A_{11} = -0,3$ ; б -  $A_{11} = 0,3$

**Равномерно растущая фазовая граница.** Пусть  $N = \tilde{A}(t)$ ; процесс осесимметричный,  $y$  – радиальная координата; тогда имеем уравнение для ФГ:  $x = F(y, t)$ ,  $N = F_t / (1 + (F_y)^2)^{1/2} = \tilde{A}(t) < 0$ . Вместо  $t$  возьмём в качестве временной координаты  $A$ :  $A(t) = \int_0^t \tilde{A}(t) dt$ ,  $t \geq 0$ . Уравнение для ФГ  $x = F(y, A)$  становится таким:  $(\partial F / \partial A)^2 = 1 + (\partial F / \partial y)^2$ . Сделаем замену переменных, принимая  $A = A(x, y)$  за

неизвестную функцию  $\partial F/\partial A = 1/(\partial A/\partial x)$ ,  $\partial F/\partial y = -(\partial F/\partial A)(\partial A/\partial y)$  и получим уравнение эйконала

$$(\partial A/\partial x)^2 + (\partial A/\partial y)^2 = 1.$$

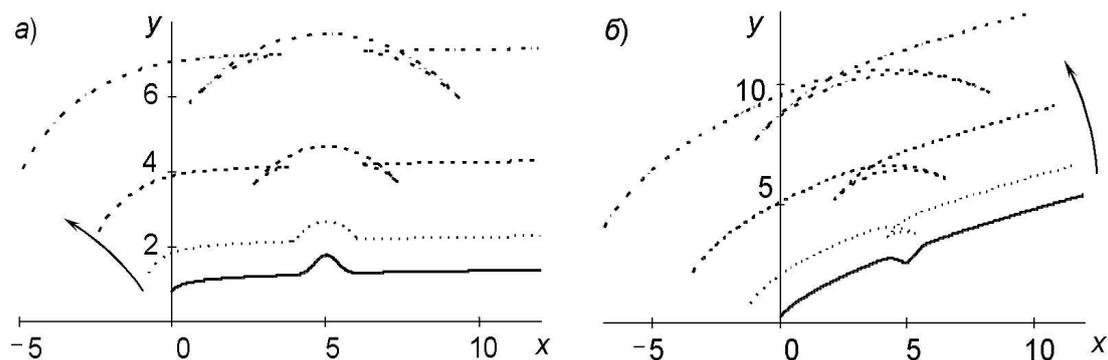
Решение этого уравнения берём в виде [1]

$$x = h \mp \frac{2\alpha r'_0(h)}{\sqrt{1 + (r'_0)^2}}, \quad y = r_0(h) \pm \frac{2\alpha}{\sqrt{1 + (r'_0)^2}},$$

$$A = 2\alpha; \quad \alpha \leq 0; \quad h \geq h^1; \quad \alpha = 0, \quad x = h, \quad y = r_0(h),$$

где  $h$  – параметр,  $h^1$  – его начальное значение;  $\alpha$  – аналог времени; в расчётах был принят нижний знак. В данном классе решений ФГ равномерно (по отношению к аргументу  $A$ ) растёт со всех сторон. Обсудим результаты численных расчётов. Начальный профиль задан в виде  $r_0(h) = R_0(h) + \delta(h)$ , где  $R_0(h)$  – основной контур;  $\delta(h)$  – малое, но конечное возмущение. В физическом отношении интерес представляет случай  $R_0(h) = R_1 h^{1/n_1}$ ,  $R_1 > 0$ ,  $h \geq h^1$ .

Были рассмотрены три варианта: 1) парабола, для которой  $1 < n_1 \leq 2$ ,  $h^1 > 0$ ; 2) конус  $n_1 = 1$ ,  $h^1 = 0$ ; 3) игла,  $n_1 > 2$ ,  $h^1 > 0$ . Выбор постоянных  $R_1$ ,  $n_1$  определяет форму контура. Возмущение  $\delta(h) = \delta_1 \exp[-k_1^2(h - x_1)^2] \cos \omega(h - x_1)$ ,  $x_1 > h^1$ ,  $|\delta_1| < R_0(h = x_1)$ , локализовано на конечном удалении от вершины дендрита в окрестности точки  $x = x_1 > 0$ . Если  $\delta_1 < 0$ , то имеем впадину; если  $\delta_1 > 0$ , то имеем выступ на исходной линии роста. Здесь  $k_1^2 > 1$  – параметр затухания возмущения вдоль линии контура;  $\omega$  – частота колебаний. Цель вычислений: построить на плоскости  $(x, y)$  контур  $x = x(h, \alpha)$ ,  $y = y(h, \alpha)$  для последовательных значений  $\alpha \leq 0$ . Такое параметрическое решение определяет поведение линии роста с течением времени: исходный контур перемещается вверх и влево. Расчёты показали, что для всех трёх вариантов (парабола, конус, игла) исходный контур  $R_0(h)$  в качественном отношении одинаково, независимо от знака  $\delta_1$ , реагирует на возмущение кривизны линии роста. А именно: при  $\delta_1 \neq 0$  появляется предвестник боковой ветви дендрита, зависимость  $x \longleftrightarrow y$  становится неоднозначной. Этот вывод справедлив для аperiodического возмущения ( $\omega = 0$ ), а также для периодического затухающего ( $k_1^2 > 0$ ) и незатухающего ( $k_1^2 = 0$ ) возмущений. На рис. 4 показана эволюция игловидного и параболического контуров (сплошные линии) под влиянием затухающего периодического возмущения  $\alpha_1 = -0,05$ ;  $\alpha_2 = -0,5$ ;  $\alpha_3 = -2$ ;  $\alpha_4 = -4$ ;  $R_1 = 1$ ;  $k_1 = 2$ ;  $\omega = 1$ ;  $x_1 = 5$ . Данный результат в качественном отношении соответствует экспериментальным наблюдениям процесса формирования боковой ветви дендрита при росте льда в переохлаждённой воде [8].



**Рис. 4.** Равномерный по  $A$  рост линии дендрита и появление предвестника боковой ветви: а – на возмущённой игле,  $n_1 = 10, \delta_1 = 0,5$  (выступ); б – на возмущённом конусе,  $n_1 = 1,5, \delta_1 = -0,5$  (впадина). Стрелка указывает направление эволюции во времени

**Fig. 4.** Uniform growth of the dendrite line and the appearance of the harbinger of the side branch: a – on the disturbed needle,  $n_1 = 10, \delta_1 = 0,5$  (protrusion); b – on the disturbed cone,  $n_1 = 1,5, \delta_1 = -0,5$  (depression). Arrow indicates the direction of evolution in time

**Закключение.** Получено аналитическое решение уравнения роста (6) для монотонной и немонотонной зависимостей скорости  $N$  от локального угла  $\theta$  наклона нормали к линии двумерного контура. Обнаружено, что вибрация скорости фазовой границы кристаллизации приводит к интенсификации теплопереноса в твёрдой фазе. Установлено, что возмущение кривизны линии роста (выступ либо впадина) генерирует предвестник боковой ветви дендрита.

#### Список литературы

1. Апштейн Э. З., Пилюгин Н. Н. Стационарная форма тел при их разрушении под действием тепловых потоков, зависящих от локального угла наклона поверхности // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа. 1981. № 6. С. 137–143.
2. Багдасаров Х. С. Высокотемпературная кристаллизация из расплава. М.: Физматлит, 2004. 160 с.
3. Жаринов Е. В., Суханова Е. А., Белов С. Д., Голышев В. Д., Баликчи Э., Аветисов И. Х. Комбинированный метод аксиальных низкочастотных вибраций и аксиального теплового потока для выращивания кристаллов из расплава // Доклады Академии наук. 2015. Т. 461, № 2. С. 164–167.
4. Жоу Д., Касас-Баскес Х., Лебон Дж. Расширенная необратимая термодинамика. М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2006. 528 с.
5. Коняев В. Г. Аналитическое исследование изменения формы аблирующих тел при их движении в атмосфере со сверхзвуковыми скоростями // Ученые записки ЦАГИ. 1974. Т. 5, № 6. С. 125–128.
6. Мурзинов И. Н. О форме тел, разрушающихся под действием интенсивного нагревания при движении в атмосфере // Известия АН СССР. Механика. 1965. № 4. С. 36–40.
7. Шабловский О. Н. Морфологические свойства линии роста двумерного дендрита в переохлаждённом расплаве // Прикладная физика. 2012. № 4. С. 40–46.
8. Шибков А. А., Леонов А. А., Казаков А. А., Столбенников С. С. Связь нестационарного роста вершины дендрита с образованием боковых ветвей // Материаловедение. 2005. № 7. С. 2–9.
9. Brener E. A., Mel'nikov V. I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // Advances in Physics. 1991. Vol. 40, № 1. Pp. 53–97.

10. Chernov A. A., Rashkovich L. N., Vekilov P. G. Steps in solution growth: dynamics of kinks, bunching and turbulence // *Journal of Crystal Growth*. 2005. Vol. 275. Pp. 1–18.
11. Glicksman M. E. Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation // *Journal of Crystal Growth*. 2016. Vol. 450. Pp. 119–139.
12. Gurtin M. E., Jabbour M. E. Interface evolution in three dimensions with curvature-dependent energy and surface diffusion: interface-controlled evolution, phase transitions, epitaxial growth of elastic films // *Arch. Rational Mech. Anal.* 2002. Vol. 163. Pp. 171–208.
13. Mullis A. M. Deterministic side-branching during thermal dendritic growth // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2015. Vol. 84. 012071. Pp. 1–9.
14. Veenendaal E., Nijdam A. J., Suchtelen J. Simulation of crystal shape evolution in two dimensions // *Journal of Crystal Growth*. 2002. Vol. 235. Pp. 603–618.

*Статья поступила в редакцию 10.05.2018; принята к публикации 15.06.2018*

### Библиографическое описание статьи

Шабловский О. Н., Кроль Д. Г., Концевой И. А. Эволюция и неустойчивость линии роста дендрита в переохлажденном расплаве // *Учёные записки Забайкальского государственного университета. Сер. Физика, математика, техника, технология*. 2018. Т. 13, № 4. С. 56–68. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-56-68.

**Oleg N. Shablovsky<sup>1</sup>,**

*Doctor of Physics and Mathematics, Professor,  
Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel  
(48 Oktyabrya pr., Gomel, 246746, Belarus),  
e-mail: shablovsky-on@yandex.ru*

**Dmitry G. Kroll<sup>2</sup>,**

*Candidate of Physics and Mathematics, Associate Professor,  
Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel  
(48 Oktyabrya pr., Gomel, 246746, Belarus),  
e-mail: kr-dmitry@yandex.ru*

**Ivan A. Kontsevoy<sup>3</sup>,**

*Senior Lecturer,  
Pavel Sukhoi State Technical University of Gomel  
(48 Oktyabrya pr., Gomel, 246746, Belarus),  
e-mail: ivankon@yandex.ru*

### Evolution and Instability of the Dendrite Growth Line in a Supercooled Melt

The growth of a dendrite in a unicomponent overcooled melt is studied. The phase boundary is considered as a strong rupture surface complying the conditions of dynamical compatibility subjected to the integral conservation laws. We studied the class of movements with the phase

---

<sup>1</sup>O. N. Shablovsky – formulation of problem, method of solution, analysis of results.

<sup>2</sup>D. G. Kroll – numerical simulation of the growth lines of the crystal, the analysis of the morphological instability.

<sup>3</sup>I. A. Kontsevoy – numerical simulation of influence of vibration on the rate of crystal growth, analysis of results.

boundary velocity depending on the angle between the normal and the growth line. The time evolution of the two-dimensional contour of the phase boundary was studied both analytically and numerically. The shape of the growth line, its curvature, velocity and heat flux in the solid phase were studied as well. With respect to the problem of the vibration effect on the crystallization process, the influence of phase boundary velocity fluctuations on the heat transfer intensification is considered. The calculations showed strong sensitivity of the heat flux to changes in the vibration amplitude. The uniform (with account to the special time coordinate) growth of a two-dimensional axially symmetric contour of dendrite is considered. The case when the original line suffers a perturbation localized at a final distance from the vertex is analyzed. It is established that the perturbation of the growth line curvature (a protrusion or a dent) induces a harbinger of a side branches of an axon. Its geometrical image is the point of intersection of the time-evolving the contour line. The applied aspects of the report refer to the methods of high-speed solidification of melts and obtaining new functional materials.

**Keywords:** interface evolution, morphological stability, crystal growth velocity, side branch

### *References*

1. Apshtejn E. Z., Pilyugin N. N. Stacionarnaya forma tel pri ih razrushenii pod dejstviem teplovyh potokov, zavisyashchih ot lokal'nogo ugla naklona poverhnosti // *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika zhidkosti i gaza*. 1981. № 6. S. 137–143.
2. Bagdasarov H. S. *Vysokotemperaturnaya kristallizaciya iz rasplava*. M.: Fizmatlit, 2004. 160 s.
3. Zharinov E. V., Suhanova E. A., Belov S. D., Golyshev V. D., Balikchi E.H., Avetisov I. H. Kombinirovannyj metod aksial'nyh nizkochastotnyh vibracij i aksial'nogo teplovogo potoka dlya vyrashchivaniya kristallov iz rasplava// *Doklady Akademii nauk*. 2015. T. 461, № 2. S. 164–167.
4. Zhou D., Kasas-Baskes H., Lebon Dzh. *Rasshirennaya neobratimaya termodinamika*. M.; Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika», 2006. 528 s.
5. Konyaev V. G. Analiticheskoe issledovanie izmeneniya formy ablruyushchih tel pri ih dvizhenii v atmosfere so sverhzvukovymi skorostyami // *Uchenye zapiski CAGI*. 1974. T. 5, № 6. S. 125–128.
6. Murzinov I. N. O forme tel, razrushayushchihsya pod dejstviem intensivnogo nagrevaniya pri dvizhenii v atmosfere // *Izvestiya AN SSSR. Mekhanika*. 1965. № 4. S. 36–40.
7. Shablovskij O. N. Morfologicheskie svojstva linii rosta dvumernogo dendrita v pereohlazhdyonnom rasplave // *Prikladnaya fizika*. 2012. № 4. S. 40–46.
8. Shibkov A. A., Leonov A. A., Kazakov A. A., Stolbennikov S. S. Svyaz' nestacionarnogo rosta vershiny dendrita s obrazovaniem bokovyh vetvej // *Materialovedenie*. 2005. № 7. S. 2–9.
9. Brener E. A., Mel'nikov V. I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // *Advances in Physics*. 1991. Vol. 40, № 1. Pp. 53–97.
10. Chernov A. A., Rashkovich L. N., Vekilov P. G. Steps in solution growth: dynamics of kinks, bunching and turbulence // *Journal of Crystal Growth*. 2005. Vol. 275. Pp. 1–18.
11. Glicksman M. E. Capillary-mediated interface perturbations: Deterministic pattern formation // *Journal of Crystal Growth*. 2016. Vol. 450. Pp. 119–139.
12. Gurtin M. E., Jabbour M. E. Interface evolution in three dimensions with curvature-dependent energy and surface diffusion: interface-controlled evolution, phase transitions, epitaxial growth of elastic films // *Arch. Rational Mech. Anal*. 2002. Vol. 163. Pp. 171–208.
13. Mullis A. M. Deterministic side-branching during thermal dendritic growth // *IOP Conf. Series: Materials Science and Engineering*. 2015. Vol. 84. 012071. Pp. 1–9.

14. Veenendaal E., Nijdam A. J., Suchtelen J. Simulation of crystal shape evolution in two dimensions // Journal of Crystal Growth. 2002. Vol. 235. Pp. 603–618.

*Received: May 10, 2018; accepted for publication June 15, 2018*

**Reference to article**

*Shablovsky O. N., Kroll D. G., Kontsevoy I. A.* Evolution and Instability of the Dendrite Growth Line in a Supercooled Melt // Scholarly Notes of Transbaikal State University. Series Physics, Mathematics, Engineering, Technology. 2018. Vol. 13, No. 4. Pp. 56–68. DOI: 10.21209/2308-8761-2018-13-4-56-68.