

## Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971  
ISI (Dubai, UAE) = 0.829  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
PIHII (Russia) = 0.126  
ESJI (KZ) = 8.716  
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

### International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 12 Volume: 80

Published: 30.12.2019 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



#### Danila Yu. Blagovisny

Russian Economic University named after G.V. Plekhanov  
2<sup>nd</sup> year student of Magistracy  
of the Faculty «Institute of digital economics and information technologies»  
[visnyi.official@gmail.com](mailto:visnyi.official@gmail.com)

#### Vladislav S. Goryachev

Russian Economic University named after G.V. Plekhanov  
2<sup>nd</sup> year student of Magistracy of the Faculty of Management,  
Specialist of the coordination department  
for project activities realizing of Capital Group LLC  
[goryachev96.94@mail.ru](mailto:goryachev96.94@mail.ru)

#### Anna V. Semenova

Russian Economic University named after G.V. Plekhanov  
2<sup>nd</sup> year student of Magistracy  
of the Faculty «Institute of digital economics and information technologies»  
[yellow.favor38@gmail.com](mailto:yellow.favor38@gmail.com)

#### Dmitry A. Kuterin

Russian Economic University named after G.V. Plekhanov  
the Faculty «Institute of digital economics and information technologies»  
[dkuterin@mail.ru](mailto:dkuterin@mail.ru)

## ESTIMATING PROJECT TIMELINES USING A MODIFICATION OF THE PERT METHOD

**Abstract:** Systems of project management, evaluation and review technique allow us to evaluate the risk of failure to complete the entire project on time. In the construction industry, the contractor and general contractor agree on the timing of individual work. They sign an act on a completed work checking report. If the deadlines for a certain stage of work are violated, the contractor pays a fine. Thus, the real risk assessment task is different from the academic task. Indeed, it is necessary to evaluate the risks of default on time for all controlled stages of construction. In this article we describe an approach to estimating project timelines by means of a modification of the Program Evaluation and Review Technique.

**Key words:** Evaluation of projects, Program evaluation and review technique (PERT), Critical path method (CPM), Network-based approach to the project management.

**Language:** Russian

**Citation:** Blagovisny, D. Y., Goryachev, V. S., Semenova, A. V., & Kuterin, D. A. (2019). Estimating project timelines using a modification of the PERT method. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 12 (80), 331-335.

**Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-12-80-65> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.12.80.65>

**Scopus ASCC:** 2606.

### ОЦЕНКА СРОКОВ ПРОЕКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МОДИФИКАЦИИ МЕТОДА PERT

**Аннотация:** Методы управления сетевого планирования и управления позволяют оценить риск невыполнения всего проекта в срок. В строительной отрасли подрядчиком и генеральный подрядчик

## Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

заказчик согласовывает сроки выполнения отдельных работ. Они подписывают акт сверки сроков работ. Если сроки выполнения определенного этапа работ нарушены, то подрядчик выплачивает штраф. Таким образом, реальная задача оценки рисков отличается от академической задачи. В реальной задаче нужно оценить риски невыполнения в срок для всех контролируемых этапов строительства. В этой статье описывается подход к оценке сроков проекта, использующий модификацию метода PERT.

**Ключевые слова:** оценка проектов, метод оценки и пересмотра проектов (PERT), метод критического пути, сетевой подход в управлении проектами, алгоритмический подход в обучении.

### Введение

В любом договоре о выполнении строительных работ имеются участники, выполняющие роли заказчика и исполнителя. Контролирующая организация (заказчик) и непосредственно осуществляющая строительство организация (исполнитель) подписывают акт сверки сроков работ. Условимся называть осуществляющую контроль сторону договора генеральным подрядчиком. Организацию, непосредственно осуществляющую строительство, будем называть подрядчиком.

В учебниках для бакалавриата [1-5] подход для определения рисков невыполнения проекта в основан на методе оценки и пересмотра проектов (PERT), методе критического пути (CPM) и их обобщениях: методах GERT и PERT-COST (см. [1-4], [7]). Эти методы позволяют оценить риск для проекта в целом. Однако на самом деле

генеральный подрядчик контролирует сроки выполнения не только всего проекта в целом, но и различных его стадий. Поэтому важную роль приобретает контроль выполнения стадий проекта и, в частности, контроль временных границ стадий проекта. Мониторинг таких проектов рисков включает в себя проверку соответствия плановым срокам фактических сроков реализации отдельных мероприятий проекта. А управление рисками включает в себя минимизацию ожидаемой суммы штрафных выплат. Для этих целей авторы предлагают изложенную ниже модификацию технологии PERT.

### Пример модификации технологии PERT-сети.

Для того, чтобы понять сложность алгоритма вычисления риска невыполнения в срок проекта и его стадий рассмотрим небольшой комплекс работ, изображенный на рис. 1.

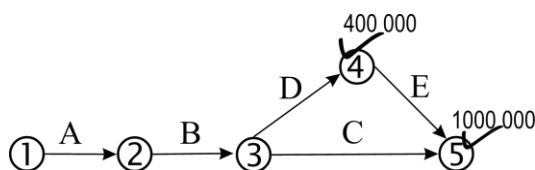


Рисунок 1 - Комплекс работ

Нестандартным для метода PERT является следующее условие: если событие 4 не свершилось позднее чем через 44 дня со старта проекта дня, выплачивается штраф в размере 400 000 д.е. Этот штраф назовем первым. Если время выполнения всего проекта заняло более 62-

х дней, то по договору подрядчик выплачивает штраф в размере 1000 000 денежных единиц.

Длительности всех работ будем считать случайными нормально распределенными величинами. Параметры работ заданы в таблице 1 по технологии PERT. Время измеряется в днях.

Таблица 1. Положительности работ (в днях)

работа	A	B	C	D	E
a	12	16	27	7	15
m	14	18	28	8	19
b	16	20	29	9	23
$\bar{t}$	14	18	28	8	19
$\sigma^2$	4/9	4/9	1/9	1/9	16/9

Здесь a – оптимистическая экспертная оценка длительности работы; b – пессимистическая экспертная оценка длительности работы; m – наиболее вероятное время выполнения работы,  $\bar{t}$  – ожидаемое время выполнения работы;  $\sigma^2$  –

дисперсия времени выполнения работы. Параметры  $\bar{t}$  и  $\sigma^2$  вычислены по значениям параметров a, m, c по формулам технологии PERT:

$$\bar{t} = \frac{a+4m+b}{6}; \quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{36}. \quad (1)$$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.126	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 8.716	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

Сопоставим первому и второму штрафам случайные величины  $Y$  и  $X$ :

$$X = \begin{cases} 1000\ 000, & \text{if } \max(\xi, \eta) > 65, \\ 0, & \text{if } \max(\xi, \eta) \leq 63, \end{cases}$$

$$Y = \begin{cases} 400\ 000, & \text{if } \zeta > 44, \\ 0, & \text{if } \zeta \leq 44. \end{cases}$$

Для необходимых нам путей сетевого графа введем следующие обозначения:

Таблица 2. Пути на сетевом графе

путь	состав пути	длительность	$\bar{t}$	$\sigma^2$
$T_0$	(A, B),	$\tau$	32	8/9
$T_1$	(A, B, C)	$\xi$	60	1
$T_2$	(A, B, D),	$\zeta$	42	1
$T_3$	(A, B, D, E)	$\eta$	59	25/9
$T_4$	(D, E)	$\alpha$	27	17/9
$T_5$	(C)	$\beta$	28	1/9

Пути  $T_0, T_2, T_4$  и  $T_5$  являются неполными,  $T_1$  – критический путь (по ожидаемому времени). Пусть  $T_3$  является полным некритическим. Отметим, что длительности путей являются нормально распределенными величинами.

Вычислим математическое ожидание суммы двух штрафов.

Для вычисления математического ожидания величины первого штрафа воспользуемся функцией Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} du \quad (2)$$

Напомним, что для случайной величины  $Z$  распределенной по нормальному закону  $Z \sim N(m, \sigma^2)$  справедливо равенство:

$$P(Z \leq t) = \Phi\left(\frac{t-m}{\sigma}\right). \quad (3)$$

Используя (3) последовательно находим:

$$P(\zeta \leq 44) = \Phi\left(\frac{44-42}{1}\right) = \Phi(2) = 0.97725,$$

$$P(\zeta > 44) = 1 - \Phi(2) = 0.02275,$$

$$E[Y] = 400\ 000 \cdot P(\zeta > 44) = 9100 \text{ д.е.}$$

Как известно [6, § 13], плотность распределения совместного распределения невырожденного гауссова вектора (состоящего из нескольких нормальных случайных величин) с

корреляционной матрицей  $K$  имеет вид:

$$f(\vec{x}) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{m})^T \cdot K^{-1} \cdot (\vec{x}-\vec{m}))}{\sqrt{(2\pi)^n \det K}} \quad (4)$$

Найдем плотность совместного распределения случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ : Находим ковариацию матрицу ковариаций, обратную к ней матрицу и ее детерминант:

$$\text{cov}(\xi, \eta) = \text{cov}(\tau + \alpha, \tau + \beta) = D(\tau) = \frac{8}{9},$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & \frac{8}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{25}{9} \end{pmatrix},$$

$$|K| = \frac{161}{81},$$

$$K^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{225}{161} & -\frac{72}{161} \\ -\frac{72}{161} & \frac{81}{161} \end{pmatrix}.$$

В соответствие с формулой (4) задаем функцию  $q(x, y) = -\frac{1}{2}(x - 60, y - 59) \cdot K^{-1} \cdot$

$$\begin{pmatrix} x - 60 \\ y - 59 \end{pmatrix} = -\frac{81(x-60)^2 - 144(x-60)(y-59) + 225(y-59)^2}{322}.$$

По формуле (4) получаем плотность совместного распределения величин  $\xi$  и  $\eta$ :

$$f(x, y) = \frac{9 \exp(q(x, y))}{2\pi\sqrt{161}} \quad (5)$$

График функции (5) изображен на рис. 2.

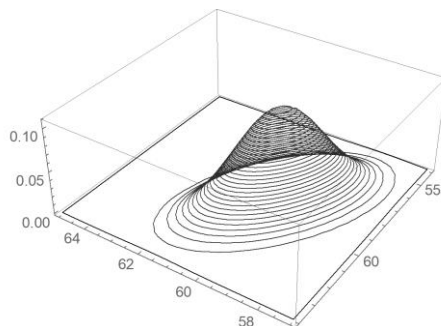


Рисунок 2 - График плотности распределения

По определению функции распределения:  
 $P(\xi \leq 62 \& \eta \leq 62) = F(62; 62)$  и

$$F(62; 62) = \int_{-\infty}^{62} \int_{-\infty}^{62} f(x, y) dx dy \approx 0.947412.$$

## Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971  
 ISI (Dubai, UAE) = 0.829  
 GIF (Australia) = 0.564  
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
 ПИИЦ (Russia) = 0.126  
 ESJI (KZ) = 8.716  
 SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630  
 PIF (India) = 1.940  
 IBI (India) = 4.260  
 OAJI (USA) = 0.350

Так как  $\max(\xi, \eta) > 62 \Leftrightarrow \xi > 62 \vee \eta > 62$ ,  
 то

$$P(\max(\xi, \eta) > 62) = 1 - 0.947412 = 0.052588.$$

Таким образом, математическое ожидание второго штрафа равно

$$E[X] = 1000000 \cdot P(\max(\xi, \eta) > 62) = 52588 \text{ д.е.}$$

Так как математическое ожидание суммы нескольких случайных величин равно сумме их математических ожиданий, то

$$E[X + Y] = E[X] + E[Y] = 52588 + 9100 = 61688.$$

Определим теперь вероятность того, что длительность пути  $T_1$  окажется больше критического времени 62 дня и вероятность, что таковой окажется длительность пути  $T_2$ . По формуле (2) и (3) получаем:

$$P(\eta \leq 62) = \Phi\left(\frac{62-59}{\sqrt{25/9}}\right) = \Phi\left(\frac{9}{5}\right) = 0.964070, \quad (6)$$

$$P(\eta > 62) = 1 - 0.964070 = 0.035930, \quad (7)$$

$$P(\xi \leq 62) = \Phi\left(\frac{62-60}{1}\right) = 0.977250, \quad (8)$$

$$P(\xi > 62) = 1 - 0.977250 = 0.02275. \quad (9)$$

Из этого видно, что путь  $T_1$  является критическим при условии, что все работы будут выполнены в точности за ожидаемое время.

Более того, так как риск, связанный с задержкой не критической цепочки работ  $T_2$  выше, чем риск связанный с критическим путем, то проводить оптимизацию комплекса работ по методу Г.П. Фомина представляется нецелесообразным. Для того, чтобы убедиться в этом, построим сетевой граф комплекса работ в масштабе времени (рис. 3). На этом рисунке указаны ранние сроки свершения событий, рассчитанные по ожидаемым (средним) продолжительностям работ. Символом 4 обозначен ранний срок окончания работы E, пунктирной линией – свободный резерв времени (free float) для работы E.

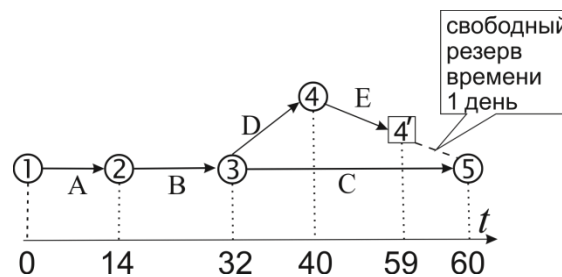


Рисунок 3 – сетевой граф в масштабе времени

По технологии, развитой Г.П. Фоминым, в ситуации, показанной на рисунке 3 для ускорения выполнения проекта без увеличения затрат следует ресурсы с не критической работы E перебросить на критическую работу C. При этом вероятность  $P(\eta > 62)$  возрастет, а с ней возрастет и риск невыполнения проекта в срок.

### Общий вид задачи об управлении рисками сроков реализации этапов комплекса работ.

Пример, приведенный выше, является частым случаем общей задачи, сформулированной ниже.

Пусть задан сетевой граф комплекса работ, для которых даны экспертные оценки их продолжительности: оптимистическая, пессимистическая и наиболее вероятная. Продолжительности работ считаются нормальными случайными величинами. Кроме того, задана ковариационная матрица продолжительностей всех работ. В отдельных узлах сетевого графа, включая завершающее событие, заданы штрафные выплаты за отклонение от календарных сроков выполнения работ. Эти выплаты имеют вид одноразовых штрафов или пени за невыполнение определенной

стадии работ в срок. Кроме того, задана структурно-временная таблица комплекса работ, в которой указаны их трудоемкости и возможности по ускорению или замедлению работ при изменении затрачиваемых на них ресурсов (например, финансирования). Далее задается мера риска [7, глава 1]. Это может быть либо математическое ожидание суммы штрафных выплат либо квантиль стоимости под риском (Value at Risk). Требуется минимизировать выбранную меру риска путем перераспределения ресурсов между работами.

### Выводы.

Сформулированной выше задача требует для своего решения определенной модификация технологии PERT-cost.

Процесс решения задачи состоит в поэтапном перераспределении ресурсов с целью выравнивания вероятностей срыва календарного срока в каждом узле со штрафными санкциями.

Количество обрабатываемых путей можно уменьшить, используя правило трех сигм. Узлы обрабатываются в порядке возрастания номеров. На втором этапе вершины перебираются в порядке

## Impact Factor:

ISRA (India) = 4.971  
ISI (Dubai, UAE) = 0.829  
GIF (Australia) = 0.564  
JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912  
РИИЦ (Russia) = 0.126  
ESJI (KZ) = 8.716  
SJIF (Morocco) = 5.667

ICV (Poland) = 6.630  
PIF (India) = 1.940  
IBI (India) = 4.260  
OAJI (USA) = 0.350

убывания ожидаемого штрафа. Либо дополнительные ресурсы расходуются из заданного в условии задачи фонда, либо повторно производится переброс ресурсов с целью уменьшения выбранной меры риска.

### Заключение.

При определении срока выполнения комплекса работ удобно считать, что длительности работ распределены по нормальному закону. Это связано со следующими соображениями. С одной стороны, математическое ожидание и дисперсия нормально распределенной случайной величины являются независимыми параметрами. С другой стороны, нормальное распределение бесконечно делимо [6, § 8]. Если независимые случайные величины  $X_1$  и  $X_2$  распределены по нормальному закону со средними значениями  $\mu_1, \mu_2$  и дисперсиями  $\sigma_1^2, \sigma_2^2$  соответственно, то  $X_1 + X_2$  имеет нормальное распределение со средним значением  $\mu_1 + \mu_2$  и дисперсией  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . Отсюда вытекает, что сумма произвольного числа независимых нормальных случайных величин является нормальной величиной с суммарным средним и суммарной дисперсией.

В методе PERT принято бета-распределение продолжительности работ с модой в точке  $m$  и концами в точках  $a$  и  $b$  [1, гл. 6]. Но для этого распределения возникают трудности с эффективным вычислением совместного распределения нескольких сумм таких величин.

Похожим свойством обладает, например, распределение хи-квадрат [6, с. 227]. Если

величины  $X_1 \sim \chi^2(k_1)$  и  $X_2 \sim \chi^2(k_2)$  независимы, то  $X_1 + X_2 \sim \chi^2(k_1 + k_2)$ . Но математическое ожидание и дисперсия для распределения хи-квадрат взаимосвязаны: дисперсия всегда в два раза больше среднего значения (если  $Y \sim \chi^2(k)$ , то  $E[Y] = k$ ,  $D[Y] = 2k$ ). Представляется интересным вопрос о возможности использования длительностей работ с распределением в виде свертки нормального распределения и «хи»-квадрат или нормального распределения и распределения Пуассона. В общей сложности, представляется полезной разработка программного обеспечения по управлению рисками комплекса работ основанного на серьезной математической статистике. Авторы планируют первоначально написать учебного программного обеспечения. Так как процесс решения включает вычисление значений многомерных статистических функции и нелинейную оптимизацию, то необходимо использовать языки программирования, имеющие соответствующую библиотеку математических функций. Программный код может быть написан либо на языке R, либо на языке Mathematica Wolfram Research, либо на другом языке программирования, но с использованием свободно распространяемого пакета математических функций Maple. В заключении, авторы статьи, хотели бы выразить благодарность доценту РЭУ им. Г.В. Плеханова, куратору нашей группы Мушруб В. А. за научное руководство и помощь в написании статьи.

### References:

1. Gorbocov, G.Y. (2009). *Upravlenie proektom*. Moscow: EAOL.
2. Gruzca, B. (2013). *Zarządzanie projektami - studia przypadków*. Warszawa: Oficyna a Wolters Kluwer business 1, p.154.
3. Trocki, M., Gruzca, B., & Ogonek, K. (2003). *Projects management*. Warsaw: PWE.
4. Trocki, M., & Gruzca, B. (2007). *Zarządzanie projektem europejskim*. Warsaw: PWE.
5. Fomin, G.P. (n.d.). *Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli v kommercheskoy deyatelnosti*. (p.464). Moscow: Finansyi i statistika.
6. Shiryaev, A. N. (2016). *Probability-1/Graduate Texts in Mathematics (Volume 95)*. Springer New York. – Hardcover ISBN 978-0-387-72205-4; eBook ISBN 978-0-387-72206-1
7. Dolmatov, A.S. (2007). *Matematicheskiye metody risk-menedzhmenta*. (p.319). Moscow: Ekzamen. ISBN 978-5-377-00016-7.
8. Mushrub, V.A., Sobolev, V.N., & Fomin, G.P. (2018). On reducing the duration of the project without increasing costs. *Innovation and Investment, No 8*, pp. 265-270.
9. Brown, J. W. (1985). Evaluation of projects using critical path analysis and earned value in combination. *Project Management Journal, 16(3)*, 59–63.
10. Mochalina, E.P., & Sobolev, V.N. (2009). Sravnitelnyiy analiz resheniya zadachi setevogo planirovaniya s pomoschyu metodov setevogo grafa i strelochnoj diagrammy. *Vestnik Rossiyskogo gosudarstvennogo torgovo-ekonomicheskogo universiteta (RGTEU), No 4 (31)*, pp. 60-67.