

# SOLUCIONES DEL MEDIO CONTINUO APLICABLES A PERFILES DE CARGA GENERALIZABLES, A PARTIR DE LA ECUACIÓN DIFERENCIAL DE MURASHEV, SIGALOV, Y BAYKOV. PARTE I

P. Hummelgens\*  
M. Paparoni\*\*

\*UNIMET / Escuela de Matemática / USB

\*\*UNIMET / Escuela Ingeniería Civil UCAB / CIDI / UCV

## INTRODUCCIÓN

En el campo de la Ingeniería Estructural, y, específicamente en el diseño de estructuras aporticadas capaces de resistir adecuadamente fuerzas horizontales de sismo o de viento, los métodos llamados del continuo, es decir, basados en funciones continuas derivables, y no en métodos matriciales discretos, permiten de manera rápida y efectiva estudiar una considerable cantidad de casos reales sólo cambiando algunos parámetros.

Originalmente dichos métodos fueron desarrollados para utilizar computadores o calculadoras programables con muy pequeñas capacidades de memoria, pero su aplicación ha demostrado que no sólo sirven para eso, sino que han permitido realizar estudios sistémicos sobre la conducta de Pórticos, aún a partir de resultados matriciales, a través del empleo de sus parámetros definitorios.

El Trabajo que presentamos es uno de una serie ya planificada, en la cual se ofrecerán soluciones generalizables a casos de carga complejos y a configuraciones de pórticos cambiantes en altura.

También esperamos que sirva como confirmación, puramente matemática, de la validez de trabajos anteriores cuya consistencia había sido evaluada por contraste con soluciones discretas.

## MOTIVACIÓN DE ESTE TRABAJO

La Ecuación diferencial de Murashev, Sigalov, Baykov [1] fue resuelta originalmente por sus autores para condiciones de carga restringidas, es decir, una distribución rectangular.

Posteriormente, Paparoni [11] generalizó dichas ecuaciones a las distribuciones de carga más utilizadas en la práctica estructural, es decir, cargas concentradas (King- Kong) Cargas triangulares (Portequiv), Momentos nodales concentrados (Momentin) y Momentos Globales (Momentón).

La razón de haber realizado esos trabajos consiste en que esta ecuación diferencial, en preferencia a otras conocidos en la literatura, toma en cuenta los parámetros más importantes que influyen en la conducta de una estructura aporticada, es decir. el parámetro  $\lambda$  (factor de acoplamiento) y el parámetro  $\mu$  (factor de columnización) equivalente al parámetro  $(\sqrt{2}-1) / \sqrt{2}$  utilizado en este trabajo,

En una larga serie de trabajos dirigidos por Paparoni entre ellos [2] a [12] Las soluciones desarrolladas por éste fueron sometidas a verificaciones numéricas contrastándolas con soluciones matriciales de pórticos de muy diversos tipos.

Esas verificaciones demostraron que, como instrumentas de predimensionamiento o de verificación rápida de estructuras existentes, las ecuaciones desarrolladas por Paparoni, eran suficientemente buenas para su aplicación práctica.

Dichas ecuaciones separaban, analíticamente, las contribuciones de la solución Homogénea (Influencia de los Empotramientos de la base), la solución de Cortante (Celdas de Cortante) y la solución Flexional (Haz Columnas más Voladizo Plantar), lo cual permitió su empleo en el estudio de la clasificación de pórticos y su extensión a casos discretos (como aproximación a cálculos reales de estructuras discretizadas, en donde el parámetro N, número de pisos, apareció como tercer parámetro adimensional definitorio de las soluciones extendidas).

A lo largo de ese proceso de verificación surgieron tanto dudas como deseos de extender las soluciones de la ecuación diferencial de MSB a otros casos de carga generalizados, así como al tratar de resolver una inestabilidad que se presentaba en las soluciones de Paparoni para  $\lambda$  menores de 2

Este trabajo es un intento de retomar el hilo matemático en este campo, pues creemos que las soluciones que saldrán de éste y de próximos trabajos, permitirán tanto generalizar al mayor número de casos posibles las soluciones que se encuentren, como eliminar las inestabilidades numéricas que se han encontrado al aplicar las ecuaciones de Paparoni, en especial para cargas triangulares.

Otro objetivo, no menos importante que éste, es el poder describir cualquier caso de carga proveniente de análisis dinámicos con ecuaciones de este tipo.

El trabajo de Casadei ..... recientemente, presentado, muestra resultados aparentemente inesperados, es decir, que ciertos perfiles de carga aplicados a la metodología que hoy conocemos como Push-Over, es decir un método práctico de verificar las potenciales ductilidades de pórticos con diversas configuraciones, revelan ductilidades marcadamente diferentes entre si al cambiar los perfiles de carga haciendo dudar de la pertinencia de algunos conceptos establecidos, ya desde hace medio siglo, en la Ingeniería Sísmica.

## 2. ANÁLISIS MATEMÁTICO

Nuestro punto de partida es la ecuación diferencial de Murashev-Sigalov-Baykov (ecuación diferencial de un pórtico)

$$Ky^{(4)} - C \left[ y^{(2)} + \frac{M(x) + Ky^{(2)}}{K_0} \right] = q(x); 0 \leq x \leq H \quad (1),$$

donde  $K$  (suma de las rigideces seccionales de las columnas del pórtico),  $C$  (rigidez a cortante del pórtico) y  $K_0$  (rigidez flexional del pórtico) son constantes,  $M(x)$  es el momento exterior producido por las cargas y  $q(x)$  es la función de carga según la altura  $x$ . En este trabajo nos restringimos a cargas de la forma

$$q(x) = \hat{q} \left( \frac{x}{H} \right)^n; n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2),$$

donde  $\hat{q}$  es una constante.

Las condiciones de borde para la ecuación diferencial son

$$y(0) = 0, y^{(1)}(0) = 0, y^{(2)}(H) = 0, Ky^{(3)}(0) = -\frac{\hat{q}H}{n+1} \quad (3),$$

donde

$$\frac{\hat{q}H}{n+1} = Q(0), \text{ siendo } Q(x) = \int_x^H q(t) dt \quad (4)$$

el cortante, y de donde el momento  $M(x)$  se obtiene por

$$M(x) = -\int_x^H Q(s) ds = \int_0^x Q(s) ds + M(0) \quad (5)$$

Introduciendo los parámetros positivos  $v, s, \lambda, \gamma$  la nueva variable  $\xi$  definidos por

$$s^2 = \frac{K}{Cv^2}, v^2 = 1 + \frac{K}{K_0}, \lambda = \frac{H}{s}, \xi = \frac{x}{H} \quad (6),$$

(1), (2) y (3) se transforman en

$$u^{(4)}(\xi) - \lambda^2 u^{(2)}(\xi) = g(\xi); 0 \leq \xi \leq 1 \quad (7)$$

$$\text{con } g(\xi) = \lambda^4 s^4 \hat{q} \xi^n + \lambda^4 s^2 \frac{v^2 - 1}{v^2} \tilde{M}(\xi) \quad (8)$$

$$u(0) = u^{(1)}(0) = 0, u^{(2)}(1) = 0, u^{(3)}(0) = -\frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{n+1} \quad (9)$$

donde introducimos la notación  $\tilde{f}(\xi) = f(H\xi)$  para funciones  $f(x)$  y donde

$$u(\xi) = K\tilde{y}(\xi) = Ky(H\xi) \quad (10)$$

De (2), (4) y (5) encontramos

$$\tilde{M}(\xi) = \frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{(n+1)(n+2)} \left[ -\xi^{n+2} + (n+2)\xi - (n+1) \right] \quad (11)$$

Para encontrar la solución del problema planteado por (7), (8), (9) y (11), escribimos en lugar de (9)

$$u(0) = u^{(1)}(0) = 0, u^{(2)}(0) = \theta, u^{(3)}(0) = -\frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{n+1} \quad (12)$$

donde  $\theta$  es una constante que falta por determinar. Introducimos la solución fundamental

$$E(\xi) = \frac{1}{\lambda^3} h(\xi) [\sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi] \quad (13)$$

del operador  $L = \frac{d^4}{d\xi^4} - \lambda \frac{d^2}{d\xi^2}$  (es decir  $LE(\xi) = \delta(\xi)$ )

la delta de Dirac), donde  $h(\xi)$  es la función de Heaviside (igual a 0 para  $\xi < 0$  e igual a 1 para  $\xi > 0$ ). Escribiendo

$$v(\xi) = h(\xi)u(\xi),$$

obtenemos de (7) y (12) la ecuación diferencial (en sentido distribucional)

$$v^{(4)}(\xi) - \lambda^2 v^{(2)}(\xi) = h(\xi)g(\xi) - \frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{n+1} \delta(\xi) + \theta \delta^{(1)}(\xi),$$

con solución

$$\begin{aligned} v(\xi) - E(\xi) * \left[ h(\xi)g(\xi) - \frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{n+1} \delta(\xi) + \theta \delta^{(1)}(\xi) \right] \\ = h(\xi) \int_0^\xi E(\xi-t)g(t)dt - \frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{n+1} E(\xi) + \theta E^{(1)}(\xi), \end{aligned}$$

donde \* es el producto de convolución. De aquí se observa tiene finalmente, con (13)

$$\begin{aligned} u(\xi) = \frac{1}{\lambda^3} \int_0^\xi \{ \sinh[\lambda(\xi-t)] - \lambda(\xi-t) \} g(t)dt \\ - \frac{\lambda^4 s^4 \hat{q}}{n+1} \left[ \sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi \right] + \frac{\theta}{\lambda^2} [\cosh(\lambda\xi) - 1] \quad (14) \end{aligned}$$

De (14) obtenemos

$$u^{(2)}(\xi) = \frac{1}{\lambda} \int_0^\xi \sinh[\lambda(\xi-t)]g(t)dt$$

$$- \frac{\lambda^3 s^4 \hat{q}}{n+1} \sinh(\lambda\xi) + \theta \cosh(\lambda\xi),$$

de donde, aplicando la condición  $u^{(2)}(1) = 0$  en (9), obtenemos una expresión para  $\theta$  la cual por sustitución en (14) lleva a

$$u(\xi) = \lambda s^4 \hat{q} \left[ \int_0^\xi \{ \sinh[\lambda(\xi-t)] - \lambda(\xi-t) \} g^*(t)dt \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n+1} \left[ \sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi \right] + \frac{\cosh(\lambda\xi) - 1}{\cosh\lambda} \left( \frac{\sinh\lambda}{n+1} - I \right) \right] \quad (15)$$

$$\text{donde } I = \int_0^1 \sinh[\lambda(1-t)]g^*(t)dt \quad (16)$$

$$g^*(t) = t^n + \frac{\lambda^2(v^2-1)}{v^2(n+1)(n+2)} \left[ -t^{n+2} + (n+2)t - (n+1) \right] \quad (17)$$

$$\phi(\xi) = \int_0^\xi \{ \sinh[\lambda(\xi-t)] - \lambda(\xi-t) \} g^*(t)dt \quad (18)$$

El cómputo de la función

que aparece en (15), requiere de la evaluación de integrales de la forma

$$I_m(\xi) = \int_0^\xi \sinh(\lambda(\xi-t))t^m dt; m = 0,1,2,\dots \quad (19)$$

$$\text{Y } L_m(\xi) = \int_0^\xi (t-\xi)t^m dt; m = 0,1,2,\dots \quad (20)$$

$$\text{Es fácil ver que } L_m(\xi) = -\frac{\xi^{m+2}}{(m+1)(m+2)} \quad (21)$$

Para  $I_m(\xi)$  encontramos la fórmula de reducción

$$I_m(\xi) = -\frac{\xi^m}{\lambda} + \frac{m(m-1)}{\lambda^2} I_{m-2}(\xi); m = 2,3,\dots \quad (22)$$

con

$$I_0(\xi) = \frac{1}{\lambda} [\cosh(\lambda\xi) - 1], I_1(\xi) = -\frac{\xi}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2} \sinh(\lambda\xi) \quad (23)$$

Por las potencias de  $\lambda$  en los denominadores estas fórmulas no sirven para calcular y graficar  $u(\xi)$  y sus derivadas para valores pequeños de  $\lambda$ . Este problema se agrava mientras más grande  $n$ . Sin embargo, tenemos las relaciones

$$\frac{\lambda^{m+1}}{m!} I_m(\xi) = \sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi - \frac{\lambda^3 \xi^3}{3!} - \dots - \frac{\lambda^m \xi^m}{m!}$$

para  $m$  impar (24),

$$\frac{\lambda^{m+1}}{m!} I_m(\xi) = \cosh(\lambda\xi) - 1 - \frac{\lambda^2 \xi^2}{2!} - \frac{\lambda^4 \xi^4}{4!} - \dots - \frac{\lambda^m \xi^m}{m!}$$

para  $m$  par (25),

de donde se obtiene

$$I_m(\xi) = \lambda m! \xi^{m+2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{2k} \xi^{2k}}{(m+2k+2)!}; 0 \leq \xi \leq 1 (m = 0,1,2,3,\dots) (26)$$

De (15)-(20) tenemos, introduciendo  $\psi(\xi)$ , definida por

$$\psi(\xi) = I_n(\xi) + \lambda L_n(\xi) + \frac{\lambda^v (v-1)}{v^2(n+1)(n+2)} [-I_{n+2}(\xi) - \lambda L_{n+2}(\xi) + (n+2)\{I_1(\xi) + \lambda L_1(\xi)\} - (n+1)\{I_0(\xi) + \lambda L_0(\xi)\}] (27)$$

$$u(\xi) = \lambda s^4 \hat{q} \psi(\xi) + \lambda s^4 \hat{q} \left[ -\frac{1}{n+1} \{ \sinh(\lambda\xi) - \lambda\xi \} + \frac{\cosh(\lambda\xi) - 1}{\cos n\lambda} \left( \frac{\sinh \lambda}{n+1} - I \right) \right]; 0 \leq \xi \leq 1 (28)$$

donde  $L_m(\xi)$  está dada por (21), y

$$I = I_n(1) + \frac{\lambda^2 (v^2 - 1)}{v^2(n+1)(n+2)} [-I_{n+2}(1) + (n+2)L_1(1) - (n+1)L_0(1)] (29)$$

Implementamos (24)-(29) en un programa con Mathematica para calcular y graficar  $u(\xi)$  sus primeras tres derivadas. Los experimentos numéricos realizados confirman que Mathematica evalúa correctamente la serie infinita en (26) (los resultados son idénticos a los que se obtienen de (22), (23) o (24), (25)) para un amplio rango de variación de  $m$  y  $\lambda$  aunque (como es de esperar) empiezan problemas con la precisión cerca de  $\xi = 1$  para valores grandes de  $\lambda$ . Para  $\lambda \geq 1$  efectuamos los cálculos usando (24), (25) en lugar de (26). Algunos resultados gráficos se muestran al final de este trabajo. El programa también permite la salida de valores puntuales de  $u(\xi)$  y sus primeras tres derivadas. Suprimiendo la asignación de valores numéri-

cos a  $\lambda, H, \hat{q}$  y  $v$  el programa permite la salida de  $u(\xi)$  y estas derivadas en Corma analítica para valores seleccionados de  $n$ .

Es de interés graficar  $u^{(k)}(\xi)$  ( $k = 0,1,2,3$ ) como funciones  $u^{(k)}(\xi, \lambda)$  de  $\lambda$  para valores seleccionados de  $\xi \in [0,1]$  Consideremos ahora el caso límite  $\lambda \rightarrow 0$  (lo que según (6) implica que  $s \rightarrow \infty$  de tal manera que  $\lambda s$  queda constantemente igual a  $H$ ). Sustituyendo  $\lambda=0$  en (7), (8), (11) obtenemos la ecuación diferencial

$$u^{(4)}(\xi) = H^4 \hat{q} \xi^n; 0 \leq \xi \leq 1 (30)$$

$$\text{con } u(0) = u^{(1)}(0) = 0, u^{(2)}(1) = 0, u^{(3)}(0) = -\frac{H^4 \hat{q}}{n+1} (31)$$

como condiciones de borde, según (9). De (30), (31) se obtiene la solución (usando (21))

$$u_0(\xi) = \frac{H^4 \hat{q}}{(n+1)(n+2)} [-(n+1)L_0(\xi) + (n+2)L_1(\xi) - L_{n+2}(\xi)] (32)$$

Usando desarrollos de Taylor de las funciones hiperbólicas involucradas, podemos verificar que  $u^{(k)}(\xi, \lambda) \rightarrow u_0^{(k)}(\xi)$  en  $0 \leq \xi \leq 1$  si  $\lambda \rightarrow 0$ , para todo  $k$ . Este resultado se obtiene sin la necesidad de explicar  $\lambda \rightarrow \infty$  en (6) visto  $k \rightarrow \infty$  o  $Cv^2 \rightarrow \infty$ . Observemos que  $u_0(\xi)$  no depende de  $y$ .

Para las gráficas de  $u(\xi, \lambda)$  en función de  $\lambda$ , para valores seleccionados de  $\xi$ , nuestro programa produce gráficas  $u(\xi, \lambda)$  asumiendo su máximo  $u_0(\xi)$  en  $\lambda = 0$ . Para  $\xi = 1$  encontramos que  $u(1, \lambda)$  tiene para  $\lambda \rightarrow \infty$  una asíntota horizontal a la altura de

$$u(1, \infty) = \frac{H^4 \hat{q} (v^2 - 1)}{v^2(n+1)(n+2)} [-L_{n+2}(1) + (n+2)L_1(1) - (n+1)L_0(1)] (33)$$

De (32), (33) obtenemos la razón

$$\frac{u(1, \infty)}{u_0(1)} = \frac{v^2 - 1}{v^2} (34)$$

la cual es independiente de  $n$ . Por razones de espacio dejaremos para una publicación futura el estudio mate-

mático de las gráficas de  $u(\xi, \lambda)$  para valores  $\xi \neq 1$   
 el estudio de las gráficas de las  $u^{(k)}(\xi, \lambda)$  Sin embar

go, se presentan algunos resultados gráficos al final de  
 este trabajo, para los casos  $n=0$  (carga uniforme) y  
 $n=1$  (carga triangular) solamente, pero es igualmente  
 sencillo obtenerlas para cualquier valor de  $n$ .

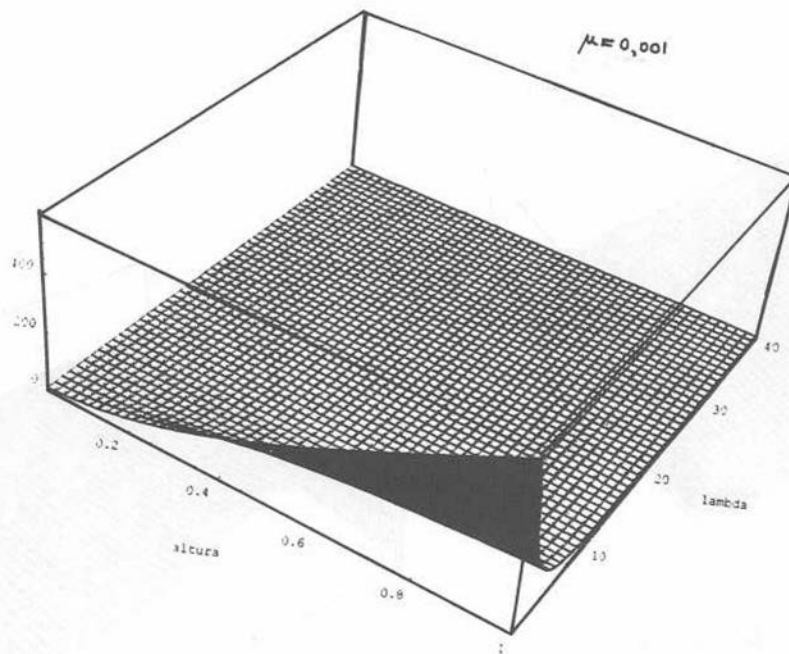
También programamos las salidas de las gráficas  
 de  $u^k(\xi, \lambda)$  ( $k=0,1,2,3$ ) como funciones simultá-  
 near de  $\xi$  y  $\lambda$ . Ejemplos de las superficies correspon-  
 dientes se muestran al final del trabajo. Partiendo de  
 (27)-(29), y las relaciones

$$I_m^{(1)}(\xi) = mI_{m-1}(\xi), L_m^{(1)}(\xi) = mI_{m-1}(\xi); m \geq 1 \quad (35)$$

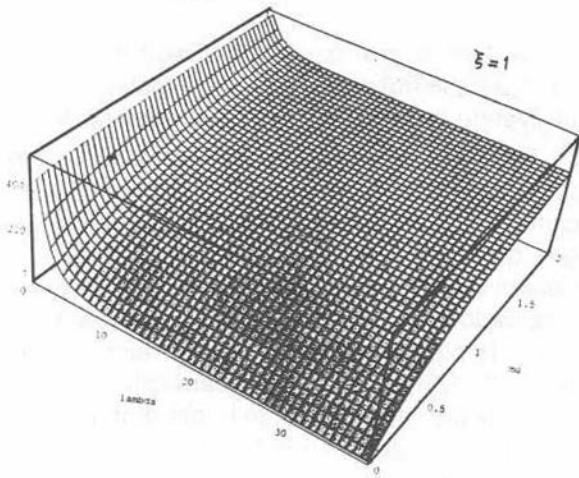
la programación de las derivadas es sencilla (aunque  
 los casos  $n=0,1,2$  deben tratarse por separado).

También podemos representar superficies en  
 función de  $\xi, \nu$  o  $\lambda, \nu$  como variables independientes.

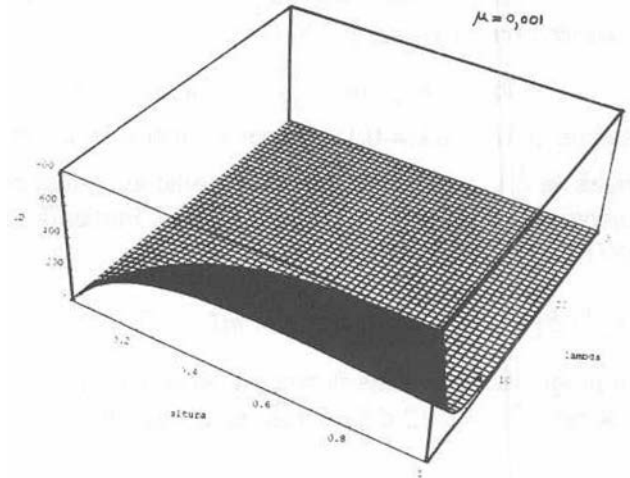
La fórmula (15) para la solución del problema de  
 valores en la frontera (7),(9) es completamente ge-  
 neral, siendo válida para cualquier término forzante  
 $g(\xi)$ . Este hecho permite abordar matemáticamente  
 (o por lo menos numericamente) un sin numero  
 de situaciones más generales, para una gran variedad  
 de cargas  $q(x)$  diferentes, incluso con situaciones que  
 involucran a cargas y/o momentos puntuales. El méto-  
 do empleado arriba (reducción del problema de valo-  
 res en la frontera a un problema de valores iniciales  
 (7),(12)) permite acomodar fácilmente modifi-  
 caciones de las condiciones de borde. Esperamos, en  
 trabajos futuros, atender a estas generalizaciones del  
 presente trabajo.



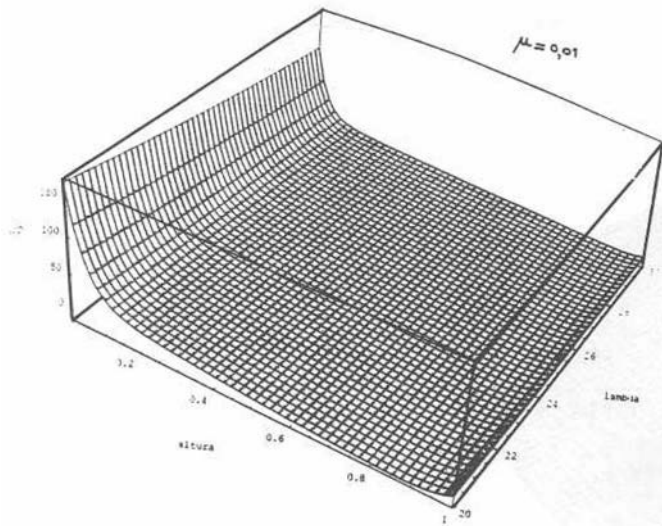
Gráfica 1:  $\mu$ (Deflexión)



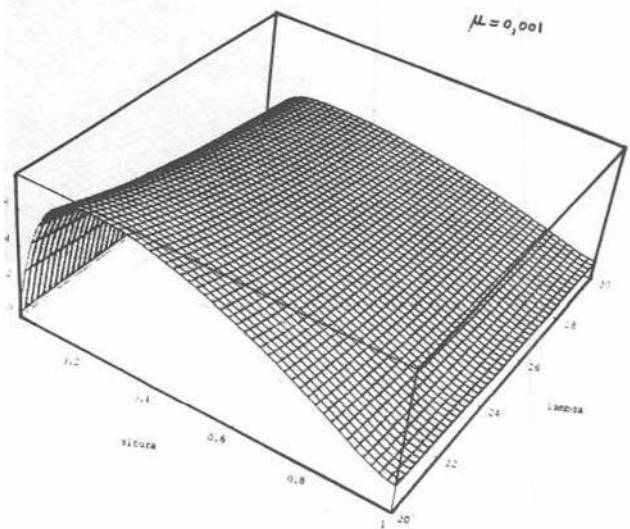
Gráfica 2: Flechas en el tope



Gráfica 3:  $\mu'$ (Pendiente)



Gráfica 4:  $K\mu''$ (Momentos)



Gráfica 5:  $K\mu'''$ (Cortantes)

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] Murashev V.I.; Sigalov E.V.; Baykov J. "Design of Reinforced Concrete Structures" Prentice Hall Inc. Englewood Cliffs, 1971
- [2] Paparoni Mario "Predimensioning of Tall Reinforced Concrete Buildings" Presented to A.C.I. Convention, Puerto Rico, December 1980.-Later published in a Spanish Version in the I.M.M.E. Bulletin N° 72-73 pp 101-164 U.C.V. — Caracas Venezuela. 1983 (Jan-Dec)
- [3] Casadei, Rosanna "Predimensionamiento de Edificios Altos Apantallados" UCLA, Barquisimeto-Noviembre 1983.
- [4] Cantelmi, Bruno; Gil Alonso; Goncalves, Donald. "Estudio de combinaciones Tipicables para Edificios Mixtos y Complejos" (Combinaciones de Pórticos y Pantallas) — U.C.V. — Octubre 1986.
- [5] Mercado M., Zoraima; Sierra M., Emilio; Rojas R. Angel R. "Análisis de las Ecuaciones del Método del Medio Continuo Equivalente para el Dimensionamiento de Edificios, haciendo uso de calculadora de bolsillo programables en BASIC" U.C.V. — Junio 1987.
- [6] Kameo, Aharón; Sanz, Carlos, "Problemas de Deriva Sísmica en Edificios. Estudio Paramétrico de las Variables Sistémicas que inciden sobre la Deriva de un Pórtico" UNIMET- Septiembre 1988.
- [7] Akel, Gamal; Barreiro B., Foraco, Andrés. "Análisis de una Población de Estructuras Semi-Prismáticas por los Métodos del Continuo Equivalente y Discretos" U.C.V. — Septiembre 1988.
- [8] Fuentes C. Eyslen; Pereira, Wilfren. "Estudio de las Soluciones del Método del Medio Continuo para Estructuras de Bajo Acoplamiento" U.C.V. —1988 (Tratamiento Matemático del Problema).
- [9] Boneta P.; Leonardo.; Petrocinio A., Yajaira C. "Compendio de Medios Gráficos de Variables Configuracionales para el Predimensionado de Estructuras Aporticadas." UNIMET— Septiembre 1989.
- [10] Gonzalez R., Claudio A.; Gutiérrez C.; Oscar J.; Saputelli M. Fabrizio. "El haz y la Celda en un Pórtico, Investigación Experimental para su Validez". UNIMET — Abril 1990.
- [11] Melandri Majonica, Mónica "Verificación Matricial de Variables Configuracionales en Estructuras Aporticadas" UNIMET — Septiembre 1991.
- [12] Paparoni Mario "Predimensionamiento de Edificios Altos de Concreto Armado" (Libro) Ediciones SIDETUR — Caracas - Venezuela — Febrero 1991
- [13] Casadei Rosanna "Variables determinantes en la obtención de la capacidad sismo resistente de una estructura aporticada de concreto armado", Universidad Centro Occidental "Lisandro Alvarado". Decanato de Ingeniería Civil.