

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIIHЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2019 Issue: 01 Volume: 69

Published: 10.01.2019 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



Gennady Evgenievich Markelov

Candidate of Engineering Sciences, associate professor,
corresponding member of International
Academy of Theoretical and Applied Sciences,
Bauman Moscow State Technical University,
Moscow, Russia
markelov@bmstu.ru

SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.

A WORKING MATHEMATICAL MODEL OF A TECHNICAL SYSTEM ELEMENT

Abstract: A working mathematical model of a technical system element was obtained. The technical system element includes a resistor with temperature-dependent resistance and total heat capacity. The created model is sufficiently full, accurate, adequate, productive, and economical. Such a mathematical model, when applied, requires less time and costs spent on research and enables efficient use of mathematical modeling tools.

Key words: working mathematical model, properties of mathematical models, principles of mathematical modeling.

Language: Russian

Citation: Markelov, G. E. (2019). A working mathematical model of a technical system element. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01 (69), 52-55.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-69-11> **Doi:**  <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2019.01.69.11>

РАБОЧАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЭЛЕМЕНТА ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация: Получена рабочая математическая модель элемента технической системы. Элемент технической системы включает резистор, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от температуры. Построенная модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности. Применение такой математической модели приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

Ключевые слова: рабочая математическая модель, свойства математических моделей, принципы математического моделирования.

1. Введение

Подходы к построению математических моделей различных технических систем изложены в обширной учебной и научной литературе. В работах [1; 2] введено понятие рабочей математической модели и изложен единый подход к построению математической модели, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Некоторые свойства математических моделей приведены в работах [3; 4]. В работе [5] рассмотрен пример построения математической модели, в достаточной мере обладающей нужными свойствами применительно к исследованию, некоторые результаты которого изложены в

работах [6–8]. Особенности внедрения единого подхода к построению математических моделей рассмотрены в работах [9; 10].

Целью настоящей работы является разработка в рамках единого подхода рабочей математической модели одного из элементов технической системы. Такой элемент включает резистор, сопротивление и полная теплоемкость которого зависят от температуры.

2. Постановка задачи

Резистор считаем высокотеплопроводным телом, температура T которого в начальный момент времени t_0 равна T_0 . На поверхности резистора площадью S происходит

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

конвективный теплообмен с окружающей средой, температура которой равна T_0 , коэффициент теплоотдачи известен и равен α . Пусть

$$R(T) = R_0 [1 + \beta(T - T_0)],$$

$$C(T) = C_0 [1 + \gamma(T - T_0)],$$

где $R(T)$ и $C(T)$ — сопротивление и полная теплоемкость резистора; R_0 и C_0 — сопротивление и полная теплоемкость резистора при $T = T_0$; β и γ — температурные коэффициенты, причем $\beta > 0$ и $\gamma > 0$. Через резистор протекает электрический ток, сила которого равна

$$I = \frac{U}{R_0 [1 + \beta(T - T_0)]}, \quad (1)$$

где U — постоянная разность электрических потенциалов на полюсах рассматриваемого элемента.

В рамках проводимого исследования представляет интерес величина I . Построим рабочую математическую модель объекта исследования, которая в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

3. Решение задачи

Для решения поставленной задачи выстроим иерархию математических моделей данного объекта исследования и определим условия, при выполнении которых можно с относительной погрешностью не более заданного значения δ_0 найти искомую величину I .

Если разность $T - T_0$ достаточно мала, то согласно (1) найдем искомую величину по формуле

$$I_0 = U/R_0. \quad (2)$$

Определим условия, при которых применима полученная формула. Для этого рассмотрим установившийся процесс теплообмена. В этом случае мощность тепловыделения в материале резистора равна тепловому потоку, отводимому от резистора, т. е.

$$\frac{U^2}{R_0 [1 + \beta(T_* - T_0)]} = \alpha(T_* - T_0)S,$$

где T_* — установившееся значение температуры резистора. Из полученного равенства легко найти

$$T_* = T_0 + \frac{1}{2\beta} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4\beta U^2}{\alpha S R_0}} \right),$$

а затем определить установившееся значение

$$I_* = \frac{U}{R(T_*)} = \frac{2I_0}{1 + \sqrt{1 + 4\beta UI_0/(\alpha S)}}. \quad (3)$$

Очевидно, что $I_* \leq I \leq I_0$. Тогда для относительной погрешности величины I_0 запишем

$$\delta(I_0) = \left| \frac{I - I_0}{I} \right| = \frac{I_0}{I} - 1 \leq \frac{I_0}{I_*} - 1.$$

Следовательно, при выполнении условия

$$\frac{I_0}{I_*} - 1 \leq \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (2) для нахождения искомой величины. Тогда приходим к неравенству

$$\frac{\beta UI_0}{\alpha S} \leq (\delta_0 + 1)\delta_0. \quad (4)$$

При выполнении этого неравенства математическая модель (2) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Определим условия, при которых применима математическая модель (3). Для этого рассмотрим неустановившийся процесс теплообмена. В этом случае изменение температуры резистора во времени t описывает обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$C(T) \frac{dT}{dt} = \frac{U^2}{R(T)} - \alpha(T - T_0)S,$$

а начальное условие имеет вид

$$T(t_0) = T_0.$$

Учитывая, что

$$I = \frac{I_0}{1 + \beta(T - T_0)},$$

сформулируем задачу Коши

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\beta I^2}{C_0 I_0} - \frac{\alpha S (I_0 - I) - \beta UI^2}{\gamma (I_0 - I) + \beta I}, \quad (5)$$

$$I(t_0) = I_0.$$

При выполнении условия

$$\delta(I_*) = \left| \frac{I - I_*}{I} \right| = 1 - \frac{I_*}{I} \leq \delta_0$$

можно с относительной погрешностью не более δ_0 использовать формулу (3) для нахождения искомой величины, причем

$$\delta_0 < \frac{I_0}{I_*} - 1,$$

так как в противном случае следует применять формулу (2). Затем найдем момент времени

$$t_* = t_0 + \frac{C_0}{\alpha S} \left[\frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{I_*}{I_0} - 1 + \delta_0 \right) \frac{I_0}{I_*} + \left(\frac{I_0}{2I_0 - I_*} + \frac{\gamma}{\beta} \frac{I_0 - I_*}{2I_0 - I_*} \frac{I_0}{I_*} - 1 \right) \ln \left(2 - \frac{I_*}{I_0} - \delta_0 \right) \right] -$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	OAJI (USA) = 0.350

$$-\left(\frac{I_0}{2I_0 - I_*} + \frac{\gamma}{\beta} \frac{I_0 - I_*}{2I_0 - I_*} \frac{I_0}{I_*}\right) \ln\left(\frac{I_0}{I_0 - I_*} \delta_0\right),$$

для которого $I(t_*) = I_*/(1 - \delta_0)$. Тогда согласно (5) установившееся значение I_* можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I(t)$ при $t \geq t_*$.

Если не выполнено условие (4), то математическая модель (3) при $t \geq t_*$ в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

Разработка новой математической модели при формировании иерархии математических моделей объекта исследования может привести к уточнению найденных ранее условий применимости построенных математических моделей. Действительно, используя математическую модель (5), можно уточнить условие применимости формулы (2). Для этого найдем момент времени

$$t^* = t_0 + \frac{C_0}{\alpha S} \left[\left(\frac{I_0}{2I_0 - I_*} + \frac{\gamma}{\beta} \frac{I_0 - I_*}{2I_0 - I_*} \frac{I_0}{I_*} - 1 \right) \ln\left(1 + \frac{I_*}{I_0} \delta_0\right) - \frac{\gamma}{\beta} \delta_0 - \right. \\ \left. - \left(\frac{I_0}{2I_0 - I_*} + \frac{\gamma}{\beta} \frac{I_0 - I_*}{2I_0 - I_*} \frac{I_0}{I_*} \right) \ln\left(1 - \frac{I_*}{I_0 - I_*} \delta_0\right) \right],$$

для которого $I(t^*) = I_0/(1 + \delta_0)$. Тогда значение I_0 можно с относительной погрешностью не более δ_0 считать равным $I(t)$ при $t \leq t^*$.

Если выполнено условие (4) или $t \leq t^*$, то математическая модель (2) в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности.

4. Результаты

Построение иерархии математических моделей позволяет выявить рабочую математическую модель, которая в достаточной мере обладает нужными свойствами применительно к конкретному исследованию. Действительно, если выполняется неравенство (4) или в рамках проводимого исследования $t \leq t^*$, то математическую модель (2) считаем рабочей. Если не выполнено условие (4), а временной интервал от t_0 до t_* можно в рамках проводимого исследования не рассматривать, то выбираем математическую модель (3) как рабочую, иначе — математическую модель (5).

5. Заключение

Таким образом, в рамках единого подхода сформулированы утверждения, которые позволяют установить рабочую математическую модель элемента технической системы. Построенная математическая модель в достаточной мере обладает свойствами полноты, точности, адекватности, продуктивности и экономичности применительно к данному исследованию.

Очевидно, что применение такой модели приводит к сокращению затрат времени и средств на проведение исследования, позволяет рационально использовать возможности математического моделирования.

References:

1. Markelov, G. E. (2015). On Approach to Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 04 (24): 287–290. SoI: [http://s-o-i.org/1.1/TAS*04\(24\)52](http://s-o-i.org/1.1/TAS*04(24)52) DoI: <http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.04.24.52>
2. Markelov, G. E. (2015). Constructing a Working Mathematical Model. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 08 (28): 44–46. SoI: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-08-28-6> DoI: <http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.08.28.6>
3. Myshkis, A. D. (2011). *Elements of the Theory of Mathematical Models* [in Russian]. Moscow: URSS.
4. Zarubin, V. S. (2010). *Mathematical Modeling in Engineering* [in Russian]. Moscow: Izd-vo MGTU im. N.E. Bauman.
5. Markelov, G. E. (2012). Peculiarities of Construction of Mathematical Models. *Inzhenernyi zhurnal: nauka i innovatsii*, No. 4, <http://engjournal.ru/catalog/mathmodel/hidden/150.html>
6. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of the jet-forming layer of shaped-charge liners on the ultimate elongation of jet elements. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 41, No. 2, 231–234.

Impact Factor:

ISRA (India)	= 3.117	SIS (USA)	= 0.912	ICV (Poland)	= 6.630
ISI (Dubai, UAE)	= 0.829	PIIHU (Russia)	= 0.156	PIF (India)	= 1.940
GIF (Australia)	= 0.564	ESJI (KZ)	= 5.015	IBI (India)	= 4.260
JIF	= 1.500	SJIF (Morocco)	= 5.667	OAJI (USA)	= 0.350

7. Markelov, G. E. (2000). Effect of initial heating of shaped charge liners on shaped charge penetration. *J. Appl. Mech. and Tech. Phys.*, 41, No. 5, 788–791.
8. Markelov, G. E. (2000). *Influence of heating temperature on the ultimate elongation of shaped-charge jet elements*. Proc. of the 5th Int. Conf. “Lavrentyev Readings on Mathematics, Mechanics and Physics”. (p.170). Novosibirsk: Lavrentyev Institute of Hydrodynamics.
9. Markelov, G. E. (2015). Particular Aspects of Teaching the Fundamentals of Mathematical Modeling. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 05 (25), 69–72.
Soi: [http://s-o-i.org/1.1/TAS*05\(25\)14](http://s-o-i.org/1.1/TAS*05(25)14) Doi: <http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2015.05.25.14>
10. Markelov, G. E. (2016). Teaching the Basics of Mathematical Modeling. Part 2. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 01 (33), 72–74.
Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-01-33-15> Doi: <http://dx.doi.org/10.15863/TAS.2016.01.33.15>