

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)

International Scientific Journal  
Theoretical & Applied Science

p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)

Year: 2018 Issue: 12 Volume: 68

Published: 19.12.2018 <http://T-Science.org>

QR – Issue



QR – Article



S. U. Zhanatauov

candidate of physics and mathematical sciences,  
Department «Information technologies and automation»,  
Professor, Noncommercial joint-stock company  
"Kazakh national agrarian university", Kazakhstan  
[sapagtu@mail.ru](mailto:sapagtu@mail.ru)

SECTION 2. Applied mathematics.  
Mathematical modeling.

INVERSE SPECTRAL PROBLEM

**Abstract:** The article solved a new spectral problem - ISP 3, inverse to the Direct Spectral Problem [3]. For known values of the eigenvalues  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ , such that  $\lambda_1 > \dots > \lambda_\ell > 0$ ,  $\ell < n$ , and the known values of the  $n$  components of the  $\ell$  eigenvectors from the submatrix  $C_1 = [c_{11} \dots c_{1\ell}]$ , of the matrix of eigenvectors  $C^{+_{mn}} = [C_1 | C^+_2]$  find: 1) unknown  $n$  values of the components  $n-\ell$  of eigenvectors  $c^{+_{n-\ell}}, \dots, c^{+_n}$ ,  $c^{+_j} = (c^{+_{1j}}, c^{+_{2j}}, \dots, c^{+_{nj}})^T, j = \ell + 1, \dots, n$ , from the submatrix  $C_2 = [c^{+_{\ell+1}} \dots c^{+_n}]$  of the matrix  $C^{+_{mn}} = [C_1 | C^+_2] = [c_1 | c_2 | \dots | c^+_n]$ ; 2) the unknown  $n-\ell$  values of the eigenvalues  $\lambda^{+_{\ell+1}}, \dots, \lambda^{+_n}$ , satisfying the relations  $\lambda_\ell > \lambda^{+_{\ell+1}} > \dots > \lambda^{+_n} > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_\ell + \lambda^{+_{\ell+1}} + \dots + \lambda^{+_n} = n$ ,  $A^{+_{mn}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\ell, \lambda^{+_{\ell+1}}, \dots, \lambda^{+_n})$ ; 3)  $A^{+_{mn}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\ell, \lambda^{+_{\ell+1}}, \dots, \lambda^{+_n})$  should have the given values of  $f$ -parameters  $f_1(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = f_1$ ,  $f_2(A^{+_{mn}}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) = f_2$ ,  $f_3(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 / \lambda^{+_n} = f_3$ ,  $1 - f_4(A^{+_{mn}}) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell) / n = 1 - f_4$ ,  $f_5(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_\ell \times \dots \times \lambda^{+_n} = f_5$ ,  $f_6(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 / \lambda_2 + \dots + \lambda^{+_{n-1}} / \lambda^{+_n} = f_6$ ; 4) the matrices  $C^{+_{mn}}$  and  $A^{+_{mn}}$  satisfy the relations from DSP. With the use of ISP 3, a new algorithm has been developed for estimating missing non-dominant eigenvalues. An example is given when  $n = 6$  estimates of the missing non-dominant eigenvalues of the unknown correlation matrix of 20 real measurements of 6 properties of a cereal crop.

**Key words:** inverse, spectral, problem.

**Language:** Russian

**Citation:** Zhanatauov, S. U. (2018). Inverse spectral problem. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 12 (68), 101-112.

**Soi:** <http://s-o-i.org/1.1/TAS-12-68-19> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.12.68.19>

ОБРАТНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА

**Аннотация:** В статье решена новая спектральная задача - ОСЗ 3, обратная к Прямой Спектральной задаче [3]. Для известных значений собственных чисел  $\lambda_1, \dots, \lambda_\ell$ , таких, что  $\lambda_1 > \dots > \lambda_\ell > 0$ ,  $\ell < n$ , и известных значений  $n$  компонент у  $\ell$  собственных векторов из подматрицы  $C_1 = [c_{11} \dots c_{1\ell}]$  матрицы собственных векторов  $C^{+_{mn}} = [C_1 | C^+_2]$  найти: 1) неизвестные  $n$  значений компонент  $n-\ell$  собственных векторов  $c^{+_{n-\ell}}, \dots, c^{+_n}$ ,  $c^{+_j} = (c^{+_{1j}}, c^{+_{2j}}, \dots, c^{+_{nj}})^T, j = \ell + 1, \dots, n$ , из подматрицы  $C_2 = [c^{+_{\ell+1}} \dots c^{+_n}]$  матрицы  $C^{+_{mn}} = [C_1 | C^+_2] = [c_1 | c_2 | \dots | c^+_n]$  собственных векторов; 2) неизвестные  $n-\ell$  значений собственных чисел  $\lambda^{+_{\ell+1}}, \dots, \lambda^{+_n}$ , удовлетворяющих соотношениям  $\lambda_\ell > \lambda^{+_{\ell+1}} > \dots > \lambda^{+_n} > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_\ell + \lambda^{+_{\ell+1}} + \dots + \lambda^{+_n} = n$ ,  $A^{+_{mn}} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_\ell, \lambda^{+_{\ell+1}}, \dots, \lambda^{+_n})$  должна иметь заданные значения  $f$ -параметров  $f_1(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = f_1$ ,  $f_2(A^{+_{mn}}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) = f_2$ ,  $f_3(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 / \lambda^{+_n} = f_3$ ,  $1 - f_4(A^{+_{mn}}) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell) / n = 1 - f_4$ ,  $f_5(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_\ell \times \dots \times \lambda^{+_n} = f_5$ ,  $f_6(A^{+_{mn}}) = \lambda_1 / \lambda_2 + \dots + \lambda^{+_{n-1}} / \lambda^{+_n} = f_6$ ; 4) матрицы  $C^{+_{mn}}$  и  $A^{+_{mn}}$  удовлетворяют соотношениям из ПСЗ. С применением ОСЗ 3 разработан новый алгоритм оценки отсутствующих недоминирующих собственных чисел; Приведен пример (при  $n=6$ ) оценки отсутствующих недоминирующих собственных чисел неизвестной корреляционной матрицы реальных данных из 20 измерений 6 признаков зерновой культуры.

**Ключевые слова:** обратная, спектральная, задача.

Введение

Часто в текстах публикаций по анализу реальных данных методом главных компонент (ПМ ГК [1]) не приводятся неиспользуемые для

содержательной

недоминирующие элементы  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  спектра  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell, \dots, \lambda_n)$

интерпретации выборочной корреляционной матрицы  $R_{nn}$  анализируемой

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

реальной многомерной стандартной званной выборки  $Z_{nn}$  (примеры спектров [2, стр.177-183]). Спектр  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  является решением прямой спектральной задачи (ПСЗ) диагонализации симметрической матрицы  $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$  [3,4]. В ПСЗ (однородной спектральной задаче), решаемой для симметрической матрицы  $R_{nn}=R_{nn}^T$  вычисляются 2 матрицы: ортогональная матрица  $C_{nn}$  собственных векторов  $c_j=(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$ , расположенных по её столбцам:  $C_{nn}=[c_1|c_2|\dots|c_n]$  и матрица  $\Lambda_{nn}$  собственных чисел матрицы  $R_{nn}$ . Эти матрицы ( $C_{nn}$  и  $R_{nn}$ ) согласованы со спектром  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  корреляционной матрицы  $R_{nn}$  таким образом, что выполняются равенства  $R_{nn}C_{nn}=C_{nn}\Lambda_{nn}$ ,  $C_{nn}^T C_{nn}=C_{nn} C_{nn}^T=I_{nn}$ ,  $\text{diag}(R_{nn})=(1, \dots, 1)$ ,  $\text{tr}(R_{nn})=1+1+\dots+1=\text{tr}(\Lambda_{nn})=\lambda_1+\dots+\lambda_n=n$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  [3,4].

В работах [1,-3] изложены 3 алгоритма оценки недоминирующих элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  спектра  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\ell}, \dots, \lambda_n)$  неизвестной выборочной корреляционной матрицы  $R_{nn}$ . В статье [3] моделируется  $(f_1, f_2, f_4)$ -спектр, восстанавливающий полный спектр таким, что значения его  $f$ -параметров  $f_1(R_{nn})$ ,  $f_2(R_{nn})$ ,  $f_4(R_{nn})$  имеют требуемые значения  $f_1, f_2, f_4$ . При решении оптимизационной задачи в качестве переменных и постоянных используются только элементы спектра. Как выяснилось при решении других задач [4-8] необходимо использовать и матрицу собственных векторов. В разработанной здесь модели ОСЗ 3 используются матрица собственных векторов и все 6  $f$ -параметров матрицы собственных чисел. Модель ОСЗ3 применяется ниже в новом алгоритме, отличающегося от алгоритмов из статей [1,3].

### Модели Обратных Спектральных Задач

Несимметрическая матрица  $C_{nn}$  собственных векторов имеет дуальный содержательный смысл. Ее роль оказалась более существенной, чем демонстрировалась ранее при ее применении, например, в задачах [4-7]. В паре с ней «работает» спектр  $\Lambda_{nn}$  – полный или неполный. Ниже мы убедимся в полезности наличия как полной, так и не полной матриц  $C_{nn}$ ,  $\Lambda_{nn}$ .

Спектр  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  является решением прямой спектральной задачи (ПСЗ) диагонализации симметрической матрицы  $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$ . ПСЗ (однородная спектральная задача) решается методом Холецкого для симметрической матрицы  $R_{nn}=R_{nn}^T$  и имеет единственное решение  $\Lambda_{nn}$ . Здесь присутствуют 2 матрицы корреляций: одна- $R_{nn}=R_{nn}^T$ , она содержит коэффициенты корреляции между  $z$ -переменными, другая -  $C_{nn}$ , содержит коэффициенты корреляции между парами  $(z, y)$   $z$ - и  $y$ -переменных [1,3-8]. Их матрица корреляций  $C_{nn}$  не является симметрической ( $C \neq C^T$ ), а

является ортонормированной:  $C^T C = C C^T = I_{nn}$ . При этом она служит а) матрицей преобразования симметрической матрицы  $R_{nn}$  в диагональную  $\Lambda_{nn}$ :  $C_{nn}^T R_{nn} C_{nn} = \Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  и б) матрицей преобразования многомерной выборки  $Z_{nn}$  коррелированных  $z$ -переменных. Каждый элемент матрицы  $C_{nn}$  равен скалярному произведению 2-х векторов: компоненты одного из них равны значениям  $z$ -переменной, компоненты другого-нормированным значениям  $y$ -переменной [2,5-8]. Длины векторов  $z$ -переменных равны 1, их скалярное произведение, умноженное на коэффициент  $(1/m)$ , равно коэффициенту корреляции в соответствии с определением коэффициента парной корреляции Пирсона. Собственные векторы  $c_j=(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$  и собственные числа  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  вычисляются: при решении ПСЗ; б) при моделировании с применением модели ОСЗ 1[9]; в) при применении моделей ОСЗ 2 [3], ОСЗ3. Модель ОСЗ3 излагается ниже. Соответствующие ненулевым собственным числам собственные векторы расположены по ее столбцам:  $C_{nn}=[c_1|c_2|\dots|c_n]$ . Каждому вычисленному ненулевому собственному числу соответствует свой собственный вектор:  $Rc_j=c_j\lambda_j, R=R_{nn}=R_{nn}^T$ . Матрица  $C_{nn}$  собственных векторов корреляционной матрицы согласована со спектром  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  корреляционной матрицы таким образом, что выполняются равенства  $R_{nn}=R_{nn}^T$ ,  $R_{nn}C_{nn}=C_{nn}\Lambda_{nn}$ ,  $C_{nn}^T C_{nn}=C_{nn} C_{nn}^T=I_{nn}$ ,  $\text{diag}(R_{nn})=(1, \dots, 1)$ ,  $\text{tr}(R_{nn})=1+\dots+1=\text{tr}(\Lambda_{nn})=\lambda_1+\dots+\lambda_n=n$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  [1, 3-6]. При решении данной ПСЗ вычисленные собственные числа-элементы спектра  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , подвергаются в прикладных исследованиях подробному анализу, интерпретации и делаются выводы [1-3,5-8]. При применении ПМ ГК (ее схематичное изображение [2]:  $Z_{nn} \Rightarrow (R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{nn})$ ) вычисляется единственная матрица  $C_{nn}$  собственных векторов. В ОМ ГК решается многократно обратная спектральная задача (ОСЗ1 [9]). В ОСЗ1:  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C_{nn}^{(\ell)}, R_{nn}^{(\ell)})$ ,  $\ell=1, \dots, \infty$ , для единственного решения  $\Lambda_{nn}$  из ПСЗ [2-4] вычисляются бесконечное число ортогональных матриц  $C_{nn}^{(\ell)}$  собственных векторов таких, что  $R_{nn}^{(\ell)} C_{nn}^{(\ell)} = C_{nn}^{(\ell)} \Lambda_{nn}$ ,  $C_{nn}^{(\ell)T} C_{nn}^{(\ell)} = C_{nn}^{(\ell)} C_{nn}^{(\ell)T} = I_{nn}$ ,  $\text{diag}(R_{nn}^{(\ell)})=(1, \dots, 1)$ ,  $\text{tr}(R_{nn}^{(\ell)})=1+\dots+1=\text{tr}(\Lambda_{nn}=\lambda_1+\dots+\lambda_n=n)$ ,  $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$  [1-5]. Это влияние элементов спектра  $\Lambda_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  на значения элементов  $\{c_{ij}^{(\ell)}\}$  бесконечного числа ортогональных матриц  $C_{nn}^{(\ell)}$   $\ell=1, \dots, k_t < \infty$ , является актуальным при моделировании с применением ОМ ГК[2]:  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C_{nn}^{(\ell)}, R_{nn}^{(\ell)}, Y_{nn}^{(\ell)}, Z_{nn}^{(\ell)})$ ,  $t=1, \dots, k_t < \infty$ ,  $\ell=1, \dots, k_t < \infty$ . В частности, значение элемента  $\lambda_j$  спектра влияет на величину  $c_{ij}$   $i$ -ой компоненты  $j$ -го собственного вектора  $c_j=(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$ .

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

Заметное отклонение указанной величины от истинного ведет к неверному отнесению элемента  $|c_{ij}|$  к категории тесноты связи (по шкале Чеддока), к неправильной интерпретации степени силы связи. При публикации результатов анализа реальных данных значения элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  в тексте статьи не приводятся, ибо они использовались при содержательной интерпретации элементов матриц  $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}$ . Впоследствии при других исследованиях, связанных с анализом реальной многомерной выборки  $Z_{mn}$ , имеющей корреляционную матрицу  $R_{nn}$ , или 2 матрицы  $C_{nn}, \Lambda_{nn}$  собственной структуры многомерной выборки  $Z_{mn}$ , обнаруживается другими исследователями отсутствие в публикациях значений элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$ , приблизительно равных нулю [1-3].

Ненеполные матрицы  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}, 0, \dots, 0)$ ,  $\lambda_1 > \dots > \lambda_n > 0$ ,  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+ + \dots + \lambda_n^+)$  и  $C_{nn} = [C_1^+ | C_2^+]$ ,  $C_{nn}^+ = [C_1^+ | C_2^+]$  [6,7] используются для моделирования пар новых полных матриц  $(C_{nn}^+, \Lambda_{nn}^+)$  с новыми или с заданными значениями параметров [6,7].

Рассматриваемая в нашей статье Модель ОСЗ 3 отличается от ОСЗ 2 [6,7] налагаемыми дополнительными нелинейными ограничениями на матрицу (y,z)-корреляций  $C_{nn}$  с выделенными значениями компонент собственных векторов  $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$ . В ОСЗ 2 номер  $j$  собственного вектора принимает значения  $j = 1, \dots, \ell$ , а в ОСЗ 3 номер  $j$  собственного вектора принимает значения  $n - j = \ell + 1, \dots, n$ , расположенных по столбцам другой подматрицы  $C_2: C_{66} = [C_1 | C_2]$ .

Схемы их наглядно показывают структурные отличия ОСЗ 3 от ОСЗ 2. Схема ОСЗ 2:  $[C_1^0 | C_2] \Rightarrow (C_{nn}^+, \Lambda_{nn}^+)$ , либо  $C_{66} \Rightarrow C_{66} = [C_1^+ | C_2] \Rightarrow (C_{nn}^+, \Lambda_{nn}^+)$ , схема ОСЗ 3:  $C_{nn}^+ = [C_1 | C_2^+] \Rightarrow (C_{nn}^+, \Lambda_{nn}^+)$ . В ОСЗ 2 две подматрицы моделируются заново, а в ОСЗ 3 – неизменной остается подматрица  $C_1$  размерности  $n - \ell$ , моделируется новая подматрица  $C_2^+$  матрицы  $C_{nn}^+ = [C_1 | C_2^+]$ , которая, тем самым, обновляется частично.

Существенным отличием ОСЗ 3 являются наличие ранее не введенных в модель ОСЗ 2 нелинейных функций  $f$ -параметров вида  $f_s(\Lambda_{nn}^+) = f_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Функции  $f$ -параметров важны в нашей модели ОСЗ 3, они многократно способствовали повышению точности оценок. В ОСЗ 3 они хорошо «работают» для повышения точности наименьших элементов спектра  $\Lambda_{nn}^+$ . Для фиксированного полного спектра  $\Lambda_{nn}$  формулы наших функций имеют виды:  $f_1(\Lambda_{66}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_6 = \text{tr}(R_{66}) = 6$ ,  $f_2(\Lambda_{66}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_6^2) = \text{tr}(R_{66}^T R_{66})$ ,  $f_3(\Lambda_{66}) = \lambda_1 / \lambda_6$ , - число обусловленности матрицы симметричной матрицы  $R_{66}$ , равное числу обусловленности

матрицы  $C_{66} \Lambda_{66} C_{66}^T$  – разложения симметричной матрицы  $R_{66}$ . Функция  $f_4(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_3) / n$  – доля 3 доминирующих элементов спектра,  $f_5(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_n$  – определитель матрицы  $R_{nn}$ . Функция  $f_n(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / (\lambda_2 + \dots + \lambda_5 / \lambda_n)$  введена в работе [8] для учета зависимости значения  $i$ -ого собственного числа  $\lambda_i$ , относительно остальных элементов (с номерами  $j \neq i$ ),  $i = 1, \dots, n$ , спектра  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ .

Они «сужают» область допустимых значений для переменных  $\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+$  в модели ОСЗ 3. Это позволяет получать модельные матрицы собственных чисел в ОСЗ 3:  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^+, \lambda_5^+, \lambda_6^+)$  с приемлемыми значениями недоминирующих элементов спектра.

В ОСЗ 2 и в ОСЗ 3 одновременно в дополнение к матрице  $C_{66}^+$  моделируются матрицы собственных чисел  $\Lambda_{nn}^+$ . В ОСЗ 2 она имеет вид:  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \lambda_2^+, \lambda_3^+, \lambda_4^+, \lambda_5^+, \lambda_6^+)$ , в ОСЗ 3 –  $\Lambda_{66}^+ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^+, \lambda_5^+, \lambda_6^+)$ . В ОСЗ 2 выделяются компоненты собственных векторов только из подматрицы  $C_1^+$  (в ОСЗ 3 подматрица  $C_1$  сохраняется неизменной). В ОСЗ 2 моделируются новые подматрицы  $C_1^+ | C_2^+$  из матрицы  $C_{nn}^+ = [C_1^+ | C_2^+]$ , а в ОСЗ 3 выделяются компоненты собственных векторов только из подматрицы  $C_2^+$ . Модельные матрицы собственных чисел в ОСЗ 2 имеет вид:  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+)$ , а модельные матрицы собственных чисел в ОСЗ 3:  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\ell}, \lambda_{\ell+1}^+, \dots, \lambda_n^+)$  – недоминирующие элементы спектра моделируются при постоянных значениях доминирующих элементов  $\lambda_1, \dots, \lambda_{\ell}$ .

Ниже рассмотрим алгоритм оценки отсутствующих недоминирующих значений собственных чисел, где процедура Solver эффективно вычисляет значения компонент  $(c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})$  собственных векторов  $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$ ,  $j = \ell + 1, \dots, n$ , соответствующих недоминирующим значениям собственных чисел  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$ . Используя нелинейные ограничения в виде функций  $f$ -параметров  $f_s(\Lambda_{nn}^+) = f_s$ ,  $s = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ .

В результате имеем восстановленный полный спектр  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{\ell}, \lambda_{\ell+1}^+, \dots, \lambda_n^+)$ . Спектр  $\Lambda_{nn}^+$  может быть назначен входным объектом ОМ ГК. Он отличен от других спектров  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  [2,3] и таков, что каждый его  $j$ -ый член  $\lambda_j$  из совокупности чисел  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$  неотрицателен и является дисперсией моделируемых в ОМ ГК некоррелированных между собой  $u$ -переменных  $\lambda_j = (1/m)(u_{1j}^2 + u_{2j}^2 + \dots + u_{mj}^2)$ . Каждая  $j$ -ая переменная из  $n$   $u$ -переменных  $u_1, u_2, \dots, u_n$  равна линейной комбинации  $n$   $z$ -переменных с коэффициентами («весами»)  $c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj}$ . Эти коэффициенты образуют  $j$ -ый собственный вектор  $c_j = (c_{1j}, c_{2j}, \dots, c_{nj})^T$ .  $u_{kj} = Z_{k1}c_{1j} + Z_{k2}c_{2j} + \dots + Z_{kn}c_{nj}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Образуется матрица  $Y_{mn}$   $u$ -переменных,

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

$m > n \gg 2$ . При этом компоненты  $j$ -го собственного вектора равны коэффициентам корреляции пар  $(y, z)$ -переменных:  $c_{1j} = \text{corr}(y_j, z_1), \dots, c_{nj} = \text{corr}(y_j, z_n), j=1, \dots, n$ . Матрица «весов»  $C_{mn}^+$  преобразует матрицу  $Y_{mn}$   $y$ -переменных в матрицу  $z$ -переменных  $Z_{mn} = Y_{mn} C_{mn}^{+T}$ . Матрица  $Z_{mn} = \{z_{kj}\}, k=1, \dots, m, j=1, \dots, n$ , состоит из значений стандартизованных  $z$ -переменных. Каждое значение  $z_{kj}$  может быть преобразовано в «измеренное» значение  $x^0 = zs + x^{me}$  при любых значениях средних  $x^{me}$  и стандартных отклонениях  $s$ .

Существует много задач моделирования многомерной выборки  $Z_{mn}$  и среди них актуальны такие, в которых входным объектом является полный спектр  $\Lambda_{nn}$  неизвестной к корреляционной матрицы  $R_{nn}$ . Рассмотрим случай когда нам известна ее (матрицы  $R_{nn}$ ) матрицы: ортогональная матрица  $C_{nn}$  собственных векторов матрицы: ортогональная матрица  $C_{nn}$  собственных векторов.

### Задача восстановления отсутствующих недоминирующих значений собственных чисел

В прикладных исследованиях с применением ПМ ГК (ее схематичное изображение [1,3]:  $Z_{mn} = \langle (R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}, Y_{mn}) \rangle$ ) проводятся анализ, интерпретация, выводы. Но при публикации результатов анализа реальных данных значения элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  не приводятся [1,2], ибо не используются при содержательной интерпретации элементов матриц  $R_{nn}, C_{nn}, \Lambda_{nn}$ . Впоследствии при других исследованиях, связанных с анализом этой же реальной многомерной выборки  $Z_{mn}$ , имеющей выборочную корреляционную матрицу  $R_{nn}$  и матрицы  $C_{nn}, \Lambda_{nn}$  собственной структуры многомерной выборки  $Z_{mn}$ , обнаруживается другими исследователями отсутствие в текстах публикаций значений элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$ , приблизительно равных нулю [1,9,10].

Существует несколько алгоритмов восстановления отсутствующих недоминирующих значений собственных чисел [1-3]. В этих алгоритмах не использовался важный объект – матрица  $C_{nn}$ . Использовалась одна матрица  $\Lambda_{nn}$  и свойства взаимного расположения ее элементов:  $a$ -параметры,  $b$ -параметры [1-3].

Ниже опишем новую модель ОСЗ 3, краткую критику ОСЗ1 из статьи [9] и проиллюстрируем доводы на примере, восстановив те же значения отсутствующих недоминирующих значений собственных чисел, что и в статье [1]. Мы получим новый восстановленный спектр  $\Lambda_{66}^{new}$  равный старому восстановленному спектру  $\Lambda_{66}^{old}$  (Таблица 2). При этом одному спектру

$\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4^+, \lambda_5^+, \lambda_6^+)$  соответствуют разные матрицы собственных векторов, отличающиеся подматрицами  $C_{+2}^+ = [c^+4 | c^+5 | c^+6]$  из матриц  $C_{+6}^+ = [C_1 | C_2^+]$ .

Элементы подматрицы  $C_1 = [c_1 | c_2 | c_3]$  в ОСЗ3 служат постоянными параметрами, таковыми являются значения собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , таких, что  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$ .

Так как новый восстановленный спектр  $\Lambda_{66}^{new}$  равен старому восстановленному спектру  $\Lambda_{66}^{old}$  и равен модельному из модели ОСЗ3, то мы используем старый *восстановленный* спектр  $\Lambda_{66} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$  и новую матрицу  $C_{+6}^+ = [C_1 | C_2^+]$  для моделирования многомерных стандартизованных выборок  $Z_{mn}^{(L)}$  с номерами  $t=1, \dots, k_t$ . Полученные нами модельные многомерные  $\Lambda$ -выборки (одна из них приведена в Таблице 3) адекватны той единственной реальной многомерной выборке  $Z_{mn}$ , «реальный» спектр которой имел недоминирующие элементы  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$ , отсутствовавшие в публикациях. Восстановленный спектр  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  назначаем входным элементом обратной модели главных компонент (ОМ ГК) [2,5-8,10-13]:  $\Lambda_{nn} = \langle (C_{nn}, R_{nn}, Y_{mn}^{(L)}, Z_{mn}^{(L)}) \rangle, t=1, \dots, k_t$ . В нашем случае после решения ОСЗ3 имеем пару матриц  $(\Lambda_{nn}^+, C_{nn}^+)$  и можем реализовать один или несколько вариантов ОМ ГК [7,14]. Мы нашли альтернативу для модели ОСЗ1 [9], причем такую, что позволяет подправить значения входных элементов спектра. При этом остаются неизменными заданные значения компонентов собственных векторов. Эт свойство модели ОСЗ3 является «ценной находкой», используется и будет использоваться в задачах когнитивного моделирования [10-13] в новых неформализованных предметных областях, где многое не известно. Например, не ясно во сколько раз модельное значение «честности» больше модельного значения «обмана». Известно, что уровень «честности» выше уровня «обмана», знаки при их значениях противоположны. Свойство процедуры Solver при решении оптимизационной задачи в модели ОСЗ3 о необходимости подправить значения входных элементов стимулирует пользователя к познанию новых реалий. Теперь мы имеем возможность не менять входной объект  $\Lambda_{nn}^+$  и решать ОСЗ1:  $\Lambda_{nn}^+ = \langle (C_{nn}^{(L)}, R_{nn}^{(L)}) \rangle, L=1, \dots, k_L < \infty$ , где восстановленный спектр  $\Lambda_{nn}^+ = \text{diag}(\lambda_1^+, \dots, \lambda_n^+)$  будет *входным элементом* одного из вариантов ОМ ГК [2,14]. Мы не используем *модельную* матрицу  $R_{nn}^{(L)}$ , а используем *известную* модельную матрицу  $C_{nn}^+$  собственных векторов, однозначно определяющих корреляционную матрицу  $R_{nn}^+$  такую, что:  $R_{nn}^+ C_{nn}^+ = C_{nn}^+ \Lambda_{nn}^+, C_{nn}^{+T} C_{nn}^+ = C_{nn}^+ C_{nn}^{+T} = I_{nn}$ . ОСЗ1 решается в обратной задаче анализа главных компонент (ОЗ АГК) [2].



## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

В работах [1-3] рассмотрена задача моделирования *модельного* спектра  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  и был дан ответ на вопрос: если не известна корреляционная матрица  $R_{nn}$  *реальной* многомерной выборки, то исходя из каких параметров (числовых и функциональных) и как нужно вычислять элементы спектра корреляционной матрицы:  $(?) \Rightarrow \Lambda_{nn}$ . Для вариантов ОМ ГК использовались подмножества значений функциональных параметров «реального» спектра  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , а наличие в неполном спектре только доминирующих элементов позволяет вычислить значение f-параметра  $f_4(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1, \dots, \lambda_\ell) / n < 1$ . Остальные f-параметры:  $f_1(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = n$ ,  $f_2(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)$ ,  $f_3(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_n$ ,  $f_5(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_n$ ,  $f_6(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} / \lambda_n$  не могут быть вычислены без наличия значений недоминирующих элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  «реального» спектра  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ . Недоминирующие n- $\ell$  значения элементов «реального» спектра не рассматривались, что привело к отсутствию значений у-переменных  $u_{\ell+1}, \dots, u_n$  у анализируемых реальных данных. Теперь у нас появилась возможность устранения этого недостатка. Описание значимости и примеры применения тех или иных из этих 6 f-параметров приведены в работах [1-3, 5-8]. Наши модели ОС32, ОС33 делают работу для применимости модели ОС31. И становится возможной реализация ОМ ГК:  $\Lambda_{nn} \Rightarrow (C_{nn}^{(L)}, R_{nn}^{(L)}, Y_{nn}^{(0)}, Z_{nn}^{(L)})$ , где входной объект-спектр  $\Lambda_{nn} = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$  должен быть полным («реальным» или модельным). У модельного спектра  $\Lambda_{nn}^+$ , вычисленного алгоритмически с применением оптимизационных задач из ОС33 решается и задача моделирования неизвестной корреляционной матрицы с заданными значениями ее 6 f-параметров - числа  $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$  равны с заданной точностью значениям f-параметров «реального» спектра  $\Lambda_{nn}$ .

В результате решения нашей задачи мы получим спектр с заданными алгебраическими свойствами, с известными из публикации значениями 6 f-параметров либо спектра, либо корреляционной матрицы. Для этих значений смоделируем (восстановим) спектр  $\Lambda_{nn}^+$  и матрицу  $C_{nn}^+$ . Полученные нами новые модельные значения элементов  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  таковы, что, не равны старым вычисленным значениям. Наш *восстановленный* спектр адекватен по значениям f-параметров  $f_1(\Lambda_{nn}) = n$ ,  $f_4(\Lambda_{nn})$ ,  $f_2(\Lambda_{nn})$ ,  $f_3(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_n$ ,  $f_5(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_n$ ,  $f_6(\Lambda_{66}) = \lambda_1 / \lambda_2 + \dots + \lambda_5 / \lambda_6$ , т.е. имеет заданные значения 6 основных f-параметров.

Мы рассматриваем случай, когда неизвестна выборочная корреляционная матрица  $R_{nn}$ , но известны некоторые ее алгебраические свойства

(значения некоторых f-параметров), совпадающие со значениями f-параметров диагональной матрицы  $\Lambda_{nn}$ :  $f_1(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \text{tr}(R_{nn}) = n$ ,  $f_2(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) = \text{tr}(R_{nn}^T R_{nn})$ ,  $f_3(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 / \lambda_n$  - число обусловленности симметричной матрицы  $R_{nn}$ , равное числу обусловленности  $C_{nn} \Lambda_{nn} C_{nn}^T$  - разложения симметричной матрицы  $R_{nn}$ ,  $f_4(\Lambda_{nn}) = (\lambda_1 + \dots + \lambda_\ell) / n$  - доля доминирующих элементов спектра,  $f_5(\Lambda_{nn}) = \lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_n$  - определитель матрицы  $R_{nn}$ . В силу совпадения свойств корреляционной матрицы со свойствами её спектра достаточно иметь алгоритмы вычисления только *модельного* спектра с заданными свойствами. Соответствующая модельному спектру *единственная* корреляционная матрица известна, если мы рассматриваем ПМ ГК, в ОМ ГК же для модельного спектра существует *бесконечное множество* корреляционных матриц (лемма С.Р.Chalmers[11]). Удобно моделировать, обладая в качестве входных объектов применяемой модели небольшой набор значений *существенных f-параметров моделируемого спектра*. Эти значения должны быть значениями f-параметров «реального» (выборочного) спектра, т.е. должен существовать спектр, вычисленный ранее по «реальной» или модельной корреляционной матрице  $R_{nn}$ . Далее для спектра  $\Lambda_{nn}$  (с вычисленными до нашего исследования значениями  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$ ) неизвестной корреляционной матрицы  $R_{nn}$  с заданными значениями этих f-параметров, необходимо смоделировать ортогональную матрицу собственных векторов  $C_{nn}$ , зависящую от *восстановленного* спектра  $\Lambda_{nn}$  и матрицы собственных векторов некоторой корреляционной матрицы  $R_{nn}$  такой, что  $R_{nn} C_{nn} = C_{nn} \Lambda_{nn}$ , где  $C^T C = C C^T = I_{nn}$ .

### Алгоритм оценки отсутствующих недоминирующих значений собственных чисел

Рассмотрим задачу моделирования значений отсутствующих недоминирующих элементов спектра неизвестной корреляционной матрицы. Разработаем модель ОС33 и применим ее к новому алгоритму оценки отсутствующих недоминирующих значений собственных чисел. Шаги алгоритма апробируем на реальных данных - неполном спектре неизвестной корреляционной матрицы  $R_{66}$ .

Матрица  $R_{66}$  была вычислена по реальной стандартизированной выборке значений 6 измеренных признаков зерновой культуры, выращиваемой в 20 делянках Алтая. Если известны выборочные средние, дисперсии и полный спектр неизвестной корреляционной матрицы, то задача моделирования многомерной

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	ПИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

выборки, адекватной той единственной реальной стандартизированной выборке, успешно решается [1-3].

Но нам известны только матрица  $C_{66}$  собственных векторов, а из элементов спектра  $\Lambda_{66}$  – только доминирующие элементы  $\lambda_1=2.5117$ ,  $\lambda_2=1.592$ ,  $\lambda_3=1.18$ . Из публикации [1] также известны значения его f-параметров:  $\varphi=0,3839$ ,  $f_1=6$ ,  $f_2=10,56$ ,  $f_3=627,9$ ,  $\ell=3$ ,  $f_4=0,8806$ ,  $f_5=1,7E-3$ ,  $f_6=260,17$ . Здесь функции видов  $f_1(\Lambda_{66})=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6=\text{tr}(R_{66})=6$ ,  $f_2(\Lambda_{66})=(\lambda_1^2+\dots+\lambda_6^2)=\text{tr}(R_{66}^T R_{66})$ ,  $f_3(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_6$ , имеют содержательные смыслы в разных задачах использования ПМ ГК и ОМ ГК. Например, число обусловленности симметричной матрицы  $R_{66}$ , равное числу обусловленности матрицы  $C_{66}\Lambda_{66}C_{66}^T$  – разложения симметричной матрицы  $R_{66}$ , входит в тройку  $(f_1, f_2, f_3)$ , позволившую моделировать  $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6)$  – спектр. Функция  $f_4(\Lambda_{66})=(\lambda_1+\dots+\lambda_3)/6$  – доля 3 доминирующих элементов спектра используется в нашем ОСЗ3 в виде  $1-f_4(\Lambda_{66})$ , значение которой равно доле недоминирующих элементов спектра  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ . Функция  $f_5(\Lambda_{66})=\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_6$  – определитель матрицы  $R_{66}$ . Функцию вида  $f_6(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_2+\dots+\lambda_5/\lambda_6$  мы рассматривали в составе тройки  $(f_3, f_4, f_6)$  введена в работе [8] для учета зависимости значения i-ого собственного числа  $\lambda_i$ , относительно остальных элементов (с номерами  $j \neq i$ ),  $i=1, \dots, 6$ , спектра  $\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ . Тройки значений  $(f_1, f_2, f_3)$ ,  $(f_3, f_4, f_6)$  анализировались в ОЗ3, где не матрица  $C_{66}$  не входила в условие ОЗ3. Эффект отсутствия матрицы  $C_{66}$  привел к эффектам, изложенным в работе [1]. Это составило причину введения в линеаризованную оптимизационную задачу №3 дополнительных изменяемых переменных  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ , суммарная доля которых не меняет требуемого значения  $f_1(\Lambda_{66})=(\lambda_1+\dots+\lambda_6)=6$ . В нашей ОЗ мы используем матрицу  $C_{66}$  и это позволило в процедуре Solver не изменять значения переменных  $\lambda_1, \dots, \lambda_6$ : они остались невключенными в перечень изменяемых ячеек в процедуре Solver. Вместо них в ОСЗ3 мы включили ячейки с элементами матрицы  $C_2$ .

Остальные недоминирующие элементы  $\lambda_4, \dots, \lambda_6$  спектра неизвестны (потеряны вместе с файлами). Для их восстановления разработаны алгоритмы, например, в [1]. С применением одного из них получены оценки  $\lambda_4=0.307010656$ ,  $\lambda_5=0.018512809$ ,  $\lambda_6=0.08035575$ .

Восстановленная матрица  $\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$  будет служить нам «точным решением» задачи оценки отсутствующих недоминирующих элементов спектра неизвестной корреляционной матрицы. Если мы применим наш новый алгоритм к нашей задаче и в результате получим те же элементы, что и в восстановленной матрице

$\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ , то это будет подтверждением правильности нашей программы-таблицы.

Теоретическое обоснование преимущества применения модели ОСЗ3 в нашей задаче следующее. Оптимизационная задача, решаемая в ОСЗ3 использует дополнительные ограничения на значения компонент соответствующих собственных векторов из подматрицы  $C_{+2}=[c^+4|c^+5|c^+6]$  матрицы  $C_{+66}=[C_1|C_{+2}]$ . Матрица  $C_{+66}=[C_1|C_{+2}]$  и ее подматрицы являются как известными, так и не известными величинами, участвующими в итерациях алгоритма нелинейной оптимизации Generalized Reduced Gradient (GRG2), реализованного в процедуре Solver. Процедура Solver (разработчики Леон Ласдон (Leon Lasdon, University of Texas at Austin) и Алан Уорен (Allan Waren, Cleveland State University).) используется нами при решении Оптимизационной задачи в модели ОСЗ3.

Будем использовать только известные нам значения величин. Нам известны значения элементов матрицы собственных векторов (Таблица 1). Из элементов спектра нам известны только доминирующие элементы. Из публикации [1,10] известны значения его f-параметров:  $\varphi=0,3839$ ,  $f_1=6$ ,  $f_2=10,56$ ,  $f_3=627,9$ ,  $\ell=3$ ,  $f_4=0,8806$ ,  $f_5=1,7E-3$ ,  $f_6=260,17$ ,  $\lambda_1=2.5117$ ,  $\lambda_2=1.592$ ,  $\lambda_3=1.18$ . Здесь  $f_1(\Lambda_{66})=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6=\text{tr}(R_{66})=6$ ,  $f_2(\Lambda_{66})=(\lambda_1^2+\dots+\lambda_6^2)=\text{tr}(R_{66}^T R_{66})$ ,  $f_3(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_6$ , – число обусловленности матрицы симметричной матрицы  $R_{66}$ , равное числу обусловленности матрицы  $C_{66}\Lambda_{66}C_{66}^T$ . Это – разложение симметричной матрицы  $R_{66}$  на произведение матриц собственных векторов и собственных чисел. Функция  $f_4(\Lambda_{66})=(\lambda_1+\dots+\lambda_3)/6$  – доля 3 доминирующих элементов спектра,  $f_5(\Lambda_{66})=\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_6$  – определитель матрицы  $R_{66}$ . Функция  $f_6(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_2+\dots+\lambda_5/\lambda_6$  введена в работе [8] для учета зависимости значения i-ого собственного числа  $\lambda_i$ , относительно остальных элементов (с номерами  $j \neq i$ ),  $i=1, \dots, 6$ , спектра  $\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ .

Так как нам известны только матрица собственных векторов, а из элементов спектра – только доминирующие элементы, то введем новые ограничения как на элементы матрицы, так и на элементы матрицы  $\Lambda_{66}$ . Ограничения на элементы матрицы  $\Lambda_{66}$   $f_s(\Lambda_{66})=f_s$ ,  $s=1,2,3,4,5,6$ . Из публикации [1,10] известны значения его f-параметров:  $\varphi=0,3839$ ,  $f_1=6$ ,  $f_2=10,56$ ,  $f_3=627,9$ ,  $\ell=3$ ,  $f_4=0,8806$ ,  $f_5=1,7E-3$ ,  $f_6=260,17$ ,  $\lambda_1=2.5117$ ,  $\lambda_2=1.592$ ,  $\lambda_3=1.18$ . Здесь  $f_1(\Lambda_{66})=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6=\text{tr}(R_{66})=6$ ,  $f_2(\Lambda_{66})=(\lambda_1^2+\dots+\lambda_6^2)=\text{tr}(R_{66}^T R_{66})$ ,  $f_3(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_6$ , – число обусловленности симметричной матрицы  $R_{66}$ , равное числу обусловленности матрицы  $C_{66}\Lambda_{66}C_{66}^T$  – разложения симметричной матрицы  $R_{66}$ . Функция  $f_4(\Lambda_{66})=(\lambda_1+\dots+\lambda_3)/6$  – доля 3

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

доминирующих элементов спектра,  $f_5(\Lambda_{66})=\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_6$  - определитель матрицы  $R_{66}$ . Функция  $f_6(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_2 + \dots + \lambda_5/\lambda_6$  введена в работе [8] для учета зависимости значения  $i$ -ого собственного числа  $\lambda_i$ , относительно остальных элементов (с номерами  $j \neq i$ ),  $i=1, \dots, 6$ , спектра  $\Lambda_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_6)$ . В Таблице 1 приведены значения накопленных по мере возрастания номера элемента спектра значения «динамических» параметров спектра. Для нового восстановленного спектра  $\Lambda_{66}=\text{diag}(2.5117, 1.592, 1.18, 0.307010656, 0.018512809, 0.08035575)$  известной выборочной матрицы собственных векторов  $C_{66}$  вида (таблица 2) неизвестной выборочной корреляционной матрицы  $R_{66}=(1/m)Z^{(t)T}_{20,n}Z^{(t)}_{20,n}$   $m=20$ ,  $t=1, \dots, k_t$ , мы получили большое количество ( $k_t=1$  млн) модельных  $\Lambda$ -выборок  $Z^{(t)}_{mn}$  из ОМ ГК схематически изображаемой в виде [1,10,12-14]:  $\Lambda \rightarrow (R, C, Y^{(t)}, Z^{(t)})$ .

Адекватность модельных  $\Lambda$ -выборок (или  $R$ -выборок, или  $(\Lambda, Y)$ -выборок) единственной реальной выборке (к настоящему времени потерянной) показана в работе [10]. Иные примеры адекватности приведены в [12-14]. Здесь в таблице 3 приведена одна из бесконечного множества модельных  $\Lambda$ -выборок  $X^{(t)}_{20,6}$ , адекватной той единственной реальной выборке  $X^0_{20,6}$ . Приведенные выше значения выборочных средних  $x_j^{cp}=(45.75, 106.1, 19.15, 1.1367, 40.45, 27.65)$  и выборочных стандартных отклонений  $s_{1,6}=\text{diag}(4.4931, 7.5425, 1.711, 0.1532, 5.0742, 2.7798)$  преобразовали стандартизованную выборку  $Z^{(t)}_{20,6}$  в  $X^{(t)}_{20,6}$  (таблица 3). У стандартизованной выборки  $Z_{mn}=\{z_{ij}\}$  каждый ее элемент  $z_{ij}$  получен преобразованием элемента  $x_{ij}^0$  в безразмерный элемент матрицы  $Z_{131,6}=\{z_{ij}\}$ ,  $i=1, \dots, 20$ ,  $j=1, \dots, 6$ , где  $z_{ij}=(x_{ij}^0 - x_j^{cp})/s_j$ ,  $x_j^{cp}=(x_{1,j}^0 + \dots + x_{20,j}^0)/20$ ,  $s_j^2=(x_{1,j}^0{}^2 + \dots + x_{20,j}^0{}^2)/20$ ,  $x_{ij}^0 = x_{ij}^0 - x_j^{cp}$ ,  $i=1, \dots, 20$ ,  $j=1, \dots, 6$ . Здесь  $Z_{20,6}$ -входной элемент решенной ранее ПЗ АГК [1,10]:  $Z_{131,6} \Rightarrow (R_{66}, C_{66}, \Lambda_{66}, Y_{131,6})$ , а использованная нами известная матрица собственных векторов  $C_{66}$  (таблица 2) вычислена при решении прямой спектральной задачи (ПЗ) диагонализации симметрической матрицы [1]  $R_{nn} \Rightarrow (C_{nn}, \Lambda_{nn})$ . Матрица  $R_{nn}$  потеряна,  $\Lambda_{nn}$  - неполная, отсутствуют недоминирующие элементы  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ .

Вычисленные по алгоритму (восстановленные) значения оценок недоминирующих элементов спектра равны:  $\lambda_4=0.307010656$ ,  $\lambda_5=0.018512809$ ,  $\lambda_6=0.08035575$ . Теперь мы имеем полный спектр  $\Lambda_{66}=\text{diag}(2.5117, 1.592, 1.18, 0.462221049, 0.173723201, 0.08035575)$ . Ниже в программе-таблице решения Оптимизационной Задачи для модели ОСЗ 3 считаем известными 3 доминирующих элемента  $\Lambda_{66}=\text{diag}(2.5117, 1.592, 1.18, \dots)$ . Полагаем известными и правильно оцененными значения

$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6$   $f$ -параметров  $f_1(\Lambda_{66})=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6=f_1$ ,  $f_2(\Lambda_{66})=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_6^2)=f_2$ ,  $f_3(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_6=f_3$ ,  $f_4(\Lambda_{66})=(\lambda_1+\dots+\lambda_3)/6=f_4$ ,  $f_5(\Lambda_{66})=\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_6=f_5$ ,  $f_6(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_2 + \dots + \lambda_5/\lambda_6=f_6$ .

### Оптимизационная задача для модели ОСЗ

3

**Задача (ОСЗ 3):** Для известных значений собственных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , таких, что  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > 0$  и известных значений  $n=6$  компонент у  $\ell=3$  собственных векторов из подматрицы  $C_1=[c_1|c_2|c_3]$  матрицы собственных векторов  $C^+_{66}=[C_1|C^{0+}_2]$  найти:

1) неизвестные  $n=6$  значений компонент  $n-\ell=6-3=3$  собственных векторов  $c^+_4, c^+_5, c^+_6$ ,  $c^+_j=(c^+_{1j}, c^+_{2j}, \dots, c^+_{nj})^T$ ,  $j=4, 5, 6$ , из подматрицы  $C_2=[c^+_4|c^+_5|c^+_6]$  матрицы  $C^+_{66}=[C_1|C^+_2]=[c_1|c_2|\dots|c^+_6]$  собственных векторов;

2) неизвестные  $n-\ell=6-3=3$  значений собственных чисел  $\lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6$ , удовлетворяющих соотношениям  $\lambda_3 > \lambda^+_4 > \lambda^+_5 > \lambda^+_6 > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda^+_4 + \lambda^+_5 + \lambda^+_6 = 6$ ,  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$ .

3) полученная полная матрица  $\Lambda^+_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$  должна иметь заданные значения  $f$ -параметров  $f_1(\Lambda_{66})=\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6=f_1$ ,  $f_2(\Lambda_{66})=(\lambda_1^2+\lambda_2^2+\dots+\lambda_6^2)=f_2$ ,  $f_3(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_6=f_3$ ,  $f_4(\Lambda_{66})=f_4(\lambda_1+\dots+\lambda_3)/6=f_4$ ,  $f_5(\Lambda_{66})=\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_6=f_5$ ,  $f_6(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_2 + \dots + \lambda_5/\lambda_6=f_6$ .

4) полученные полные матрицы  $\Lambda^+_{66}$  и  $C^+_{66}=[C_1|C^+_2]=[c_1|c_2|c_3|c^+_4|c^+_5|c^+_6]$  собственных векторов должны удовлетворять равенствам  $C^{+T}_{nn}C^+_{nn}=C^+_{nn}C^{+T}_{nn}=I_{nn}$ ,  $C^+_{nn}\Lambda^+_{nn}C^{+T}_{nn}=R^+_{nn}$ ,  $c^+_i\Lambda^+_{nn}c^+_j{}^T=1$ ,  $c^+_i\Lambda^+_{66}c^+_j{}^T=r^+_{ij}$ ,  $r^+_{ij}=r^+_{ji}$ ,  $i=1, \dots, 6$ ;  $j=1, \dots, 6$ ,  $C^+_{nn}=[C_1|C^+_2]$ , и корреляционная матрица  $R^+_{nn}=C^+_{nn}\Lambda^+_{66}C^{+T}_{nn}$  имеет новые матрицы собственных векторов и собственных чисел  $\Lambda^+_{66}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$ ,  $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda^+_4 > \lambda^+_5 > \lambda^+_6 > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda^+_4 + \lambda^+_5 + \lambda^+_6 = 6$ . Модель ОСЗ 3 схематически изображается так:  $(\Lambda_{nn}, C_{nn}) \Rightarrow (\Lambda_{nn})$ ,

$C_{nn}=[C_1|C^{0+}_2] \Rightarrow (C^+_{nn}=[C_1|C^+_2], \Lambda^+_{nn})$ .

Совокупность известных -  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  и неизвестных -  $\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6$ , собственных чисел удовлетворяют соотношениям  $\lambda^+_4 > \lambda^+_5 > \lambda^+_6 > 0$ ,  $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda^+_4 + \lambda^+_5 + \lambda^+_6 = 6$ ,  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$ .

Для матрицы  $C_{nn}=[C_1|C^{0+}_2]$  (с новыми значениями  $c^+_{kj}$ ,  $j=\ell, \dots, n$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ ) требуется найти новую пару матриц  $(C^+_{nn}, \Lambda^+_{nn})$ , такую, что матрица  $C^+_{nn}=[C_1|C^+_2]$  имеет те же заданные пары индексов  $(k, j)$  и те же новые значения компонент  $c^+_{kj}$ ,  $j=\ell, \dots, n$ ,  $k \in \{1, \dots, n\}$ , что и у последних  $n-\ell$  собственных векторов  $c^+_j=(c^+_{1j}, c^+_{2j}, \dots, c^+_{nj})^T$ , расположенных по столбцам подматрицы  $C^+_2$  матрицы  $C^+_{nn}=[c_1|c_2|\dots|c^+_l|\dots|c^+_n]$ .

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

В подматрице  $C^{0+}_2$  могут присутствовать задаваемые нами значения выделенных компонент у собственных векторов.  $c^+_4, c^+_5, c^+_6$ . В окне процедуры Solver в строке «Изменяемые ячейки» важен порядок адресов: сперва вставить адреса ячеек с значениями подматрицы  $C_2$ , затем через знак (;) - адреса ячеек с значениями  $\lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6$ .

Формулировка этой задачи, назовем ее ОСЗ 3, отличается от формулировки задачи из модели ОСЗ 2 структурой матрицы  $C^{+}_{nn}$ . Вводятся функции ограничений и их значения. В ОСЗ 2 матрица  $C^{+}_{nn}$  имеет вид -  $C^{+}_{nn}=[C^+_1|C^+_2]$ , а в результате решения нашей задачи (ОСЗ 3 ее решение – матрица  $C^{+}_{nn}$  имеет вид:  $C^{+}_{nn}=[C_1|C^+_2]$ . В ОСЗ 2 2 подматрицы моделируются заново, а в ОСЗ 3 – неизменной остается подматрица  $C_1$  размерности  $n$ -на- $\ell$ , моделируется подматрица  $C^+_2$  матрицы  $C^{+}_{nn}=[C_1|C^+_2]$ . В ОСЗ 2 и в ОСЗ3 одновременно моделируются матрицы собственных векторов чисел  $\Lambda^+_{nn}$ . В ОСЗ2 она имеет вид:  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda^+_1, \lambda^+_2, \lambda^+_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$ , в ОСЗ3 -  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$ . В ОСЗ 2 выделяются компоненты собственных векторов только из подматрицы  $C^+_1$  (в ОСЗ 3  $C_1$  сохраняется неизменной). В ОСЗ 2 моделируются новые подматрицы  $C^+_1|C^+_2$  из матрицы  $C^{+}_{nn}=[C^+_1|C^+_2]$ , а в ОСЗ 3 выделяются компоненты собственных векторов только из подматрицы  $C^+_2$ . Модельные матрицы собственных чисел в ОСЗ 2 имеет вид:  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda^+_1, \lambda^+_2, \lambda^+_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$ , а модельные матрицы собственных чисел в ОСЗ 3:  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6)$  – недоминирующие элементы спектра моделируются при постоянных значениях доминирующих элементов  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ .

Матрицы  $C^{+}_{nn}$  и  $\Lambda^+_{nn}$  должны удовлетворять равенствам из ПСЗ:  $C^{+T}_{nn}C^{+}_{nn}=C^{+}_{nn}C^{+T}_{nn}=I_{nn}$ ,  $C^{+}_{nn}\Lambda^+_{nn}C^{+T}_{nn}=R^+_{nn}$ ,  $\lambda^+_1+\dots+\lambda^+_n=n$ ,  $c^+_j\Lambda^+_{nn}c^+_jT=1$ ,  $c^+_i\Lambda^+_{nn}c^+_jT=r^+_{ij}$ ,  $r^+_{ij}=r^+_{ji}$ ,  $i=1, \dots, n$ ;  $j=1, \dots, n$ ,  $C^{+}_{nn}=[C_1C^+_2]$ , где корреляционная матрица  $R^+_{nn}$  имеет новые матрицы собственных векторов  $C^{+}_{nn}=[C_1C^+_2]$ , и собственных чисел  $\Lambda^+_{nn}=\text{diag}(\lambda^+_1, \dots, \lambda^+_n)=n$ .  $\lambda^+_1+\dots+\lambda^+_n=n$ ,  $\lambda^+_1 \geq \dots \geq \lambda^+_n$ .

Модель ОСЗ 3:  $C_{nn}=[C_1|C^+_2]=>(C^{+}_{nn}, \Lambda^+_{nn})$ . Решения ОСЗ 3: пары матриц  $\Lambda^+_{nn}$ ,  $C^{+}_{nn}=[C_1C^+_2]$

применены при реализации ОМ ГК:  $(C^{+}_{nn}, \Lambda^+_{nn})=>(R^+_{nn}, Z^{(0)}_{nn}, Y^{(0)}_{nn}), t=1, \dots, k_t < \infty$ .

Еще одно отличие модели ОСЗ3: в программе-таблице важен порядок следования изменяемых ячеек программы. Реализация модели ОСЗ 3 требует такой порядок перечисления изменяемых ячеек:  $C^+_2, \lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6$ . Требуется назначение  $n(n-\ell)$  элементов в панели «Изменяемые ячейки» процедуры Solver, затем ввод адресов 3 ячеек с  $\lambda^+_4, \lambda^+_5, \lambda^+_6$ . В противном случае процедура «выдает» неверное решение. Для модели ОСЗ 2 такого порядка не требует процедура Solver.

### Программа-таблица ОСЗ 3

Подробное описание модели ОСЗ 3 приведено выше. Описание программы-таблицы модели ОСЗ 3 при  $n=6$  приведем. В Таблице 1 приводим только отличия в заданных значениях  $\lambda_1=2.5117$ ,  $\lambda_2=1.592$ ,  $\lambda_3=1.18$ . Дополнительно вводим в ячейки программы-таблицы формулы и числовые значения 6 функций-ограничений :

$f_1(\Lambda_{66})=(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_6)=6$ ,  
 $f_2(\Lambda_{66})=(\lambda_1^2+\dots+\lambda_6^2)=10,56$ ,  $f_3(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_6=627,9$ ,  
 $f_4(\Lambda_{66}, \ell=3)=(\lambda_1+\dots+\lambda_3)/6=0.8806$ ,  
 $f_5(\Lambda_{66})=\lambda_1 \times \lambda_2 \times \lambda_3 \times \dots \times \lambda_6=1.7E-3$ ,  
 $f_6(\Lambda_{66})=\lambda_1/\lambda_2+\dots+\lambda_5/\lambda_6=260.17$ .  
 Формулы 6 функций введены в ячейки программы-таблицы в виде равенств соответствующим значениям  $f_1=6$ ,  $f_2=10,56$ ,  $f_3=627,9$ ,  $\ell=3$ ,  $f_4=0,8806$ ,  $f_5=1,7E-3$ ,  $f_6=260,17$ , взятых из текста статьи [1].

В Таблице 1 выделены красным цветом значения 1.0000, полученные из соотношения  $C^{+}_{nn}C^{+T}_{nn}=I_{nn}$ . Для первых 4-х собственных векторов, применяемых нами ниже, имеет место  $[C^{+T}]_{\ell n}C^{+}_{n\ell}=I_{\ell\ell}$ .

В отличие от ОСЗ2 в ОСЗ3 нет нарушения равенства  $C^{+T}_{nn}C^{+}_{nn}=C^{+}_{nn}C^{+T}_{nn}=I_{nn}$  для последних 3-х собственных чисел (0.462221, 0.1737232, 0.0803558) не является ошибкой модели (как в ОСЗ 2), а точно восстанавливает спектр. Матрица  $C^+_{66}$  и она является матрицей преобразования 6-мерной выборки  $Y_{m6}$  в 6-мерной выборку  $Z_{m6}=Y_{m6}[C^+_{66}]^T$  стандартизованных  $z$ -переменных, адекватных реальной

**Таблица 1. Начальные значения компонент собственных векторов из известной исходной матрицы  $C_{66}$  (фрагмент программы-таблицы)**

	eigen vector $c_{.1}$	eigen vector $c_{.2}$	eigen vector $c_{.3}$	eigen vector $c_{.4}$	eigen vector $c_{.5}$	eigen vector $c_{.6}$	Summa squares
ROW 1	0,5106	-0,3477	-0,6143	-0,3411	0,2672	-0,2307	<b>0,9999</b>
ROW 2	0,0665	-0,4642	-0,0354	0,3835	-0,6793	-0,4128	<b>1,0001</b>



**Impact Factor:**

**ISRA (India) = 3.117**    **SIS (USA) = 0.912**    **ICV (Poland) = 6.630**  
**ISI (Dubai, UAE) = 0.829**    **ПИИЦ (Russia) = 0.156**    **PIF (India) = 1.940**  
**GIF (Australia) = 0.564**    **ESJI (KZ) = 5.015**    **IBI (India) = 4.260**  
**JIF = 1.500**    **SJIF (Morocco) = 5.667**

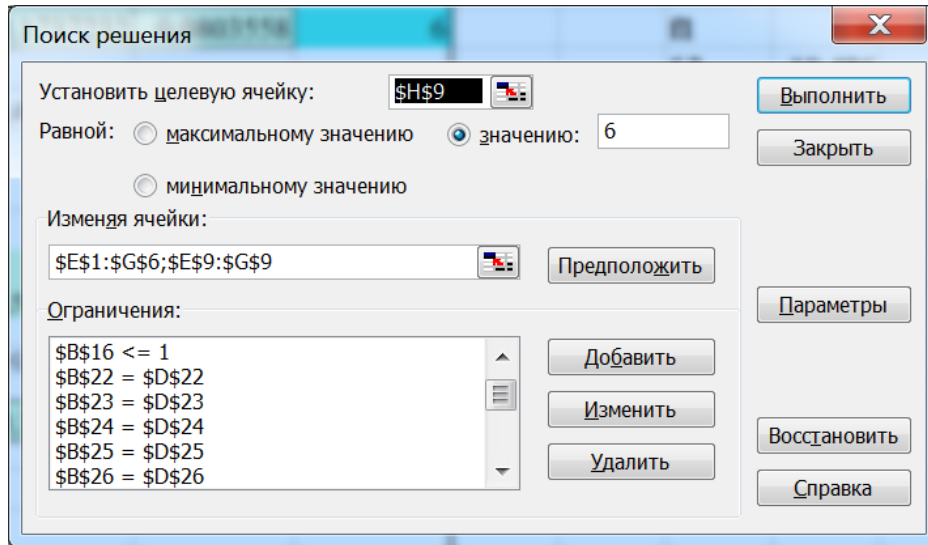
ROW 3	0,4569	-0,3185	0,0972	0,4628	0,109	0,674	<b>1,0000</b>
ROW 4	0,2923	-0,6128	0,2572	-0,5981	-0,1469	0,306	<b>1,0001</b>
ROW 5	0,5129	0,421	0,072	-0,3978	-0,5934	0,2100	<b>1,0000</b>
ROW 6	0,4215	-0,0976	0,7352	-0,0796	0,2856	-0,4294	<b>1,0000</b>
Summa squares	1,0001	1,00011	0,9999	0,9999	1,0000	1,0000	
$\Lambda_{66}$	2,5117	1,592	1,18	0,2221049	0,23201	0,035575	<b>5,773389</b> 9

**Таблица 2. Программа-таблица вычисления пары матриц ( $C^{+66}$ ,  $\Lambda^{+66}$ ) из модели ОСЗ 3 с заданными значениями 6 f-параметров спектра  $\Lambda^{+66}$**

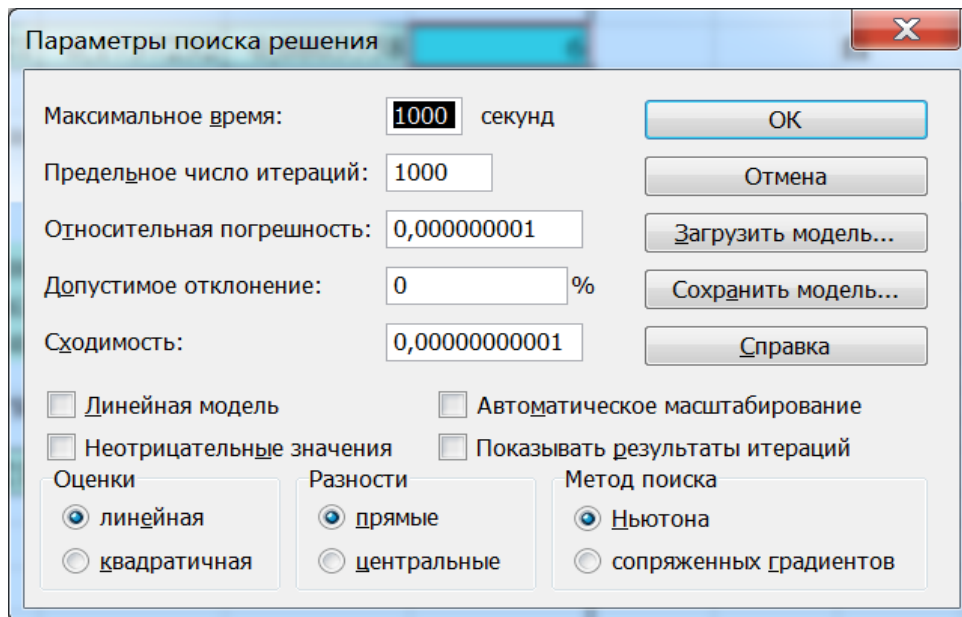
	eigen vector $c_1$	eigen vector $c_2$	eigen vector $c_3$	new eigen vector $c_4$	new eigen vector $c_5$	new eigen vector $c_6$	Summa squares
ROW 1	0,5106	-0,3477	-0,6143	-4,7949E-08	-3,5768E-08	-0,49094588	<b>1,0000</b>
ROW 2	0,0665	-0,4642	-0,0354	0,514046017	-0,71741896	2,72273E-06	<b>1,0001</b>
ROW 3	0,4569	-0,3185	0,0972	0,80040587	0,199255468	-3,6997E-05	<b>1,0000</b>
ROW 4	0,2923	-0,6128	0,2572	-0,30794288	-0,61486275	9,80233E-05	<b>1,0000</b>
ROW 5	0,5129	0,421	0,072	-0,01668276	-0,25990594	0,697623952	<b>1,0000</b>
ROW 6	0,4215	-0,0976	0,7352	-5,2014E-08	-6,0415E-09	-0,52181697	<b>1,0000</b>
	1,0001	1,00011	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	
new $\Lambda_{66}$	2,5117	1,592	1,18	0,462221	0,1737232	0,0803558	<b>6</b>
old $\Lambda_{66}$	2,5117	1,592	1,18	0,462221	0,1737232	0,0803558	
<b>f 2</b>	<b>10,485786</b>		10,485786				
<b>f 3</b>	<b>31,257253</b>		31,257253				
<b>1- f 4</b>	<b>0,1193833</b>		0,1193833				
<b>f 5</b>	<b>0,0304451</b>		0,0304451				
<b>f 6</b>	<b>10,302346</b>		10,302346				

**Impact Factor:**

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	



**Рисунок 1. Окно надстройки «Поиск решения» для программы-таблицы из Таблицы 2**



**Рисунок 2. Окно параметров надстройки «Поиск решения» для программы-таблицы из Таблицы 1.**

**Таблица 3. A<sup>+</sup>-выборка модельных значений 6 признаков зерновой культуры**

	номера признаков зерновой культуры					
	1	2	3	4	5	6
1	49,0090	110,9500	20,1990	1,2876	35,8830	27,4160
2	46,3290	99,2910	18,3600	1,1545	41,6360	26,4760
3	43,3200	98,1220	18,2180	1,1165	43,5010	27,8830
4	45,7550	108,2700	19,1670	1,1425	39,6720	28,0460
5	45,4480	107,3000	18,9700	1,1147	40,5420	27,8600

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	PIИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

6	45,7340	104,3000	18,6630	1,1180	41,0270	27,2790
7	45,7700	108,5500	19,6310	1,1511	40,1050	28,0610
8	47,2210	105,7500	19,2590	1,2679	40,1820	27,7480
9	43,9730	105,5400	19,1100	1,0507	42,4660	28,0030
10	46,1320	107,3300	19,4510	1,1569	40,4780	27,8760
11	44,5930	107,3700	19,2500	1,1308	39,9370	28,4880
12	44,1430	105,6500	19,5310	1,1883	41,7200	29,0010
13	45,9010	108,7200	19,3570	1,1546	40,1310	28,0880
14	44,1400	104,4700	18,9240	0,9824	42,3510	27,0860
15	46,2260	106,1300	19,0180	1,1215	40,8150	27,3370
16	46,8190	106,1900	19,2080	1,0779	41,1230	26,4220
17	45,4740	105,0600	19,0730	1,2181	40,3470	28,3090
18	45,4590	105,5100	19,1430	1,1196	39,9750	27,6990
19	46,8920	108,1100	19,1440	1,0886	38,6480	26,7970
20	46,6620	109,3900	19,3250	1,0917	38,4620	27,1240

и применили его для моделирования  $\Lambda^+$ -выборки  $Z_{mn}$  с неизвестным законом многомерного распределения. Программа IMPC3.exe [14,17,18], реализует 2-ый вариант ОМ ГК:  $(\Lambda_{66}, C_{66}) \Rightarrow (R_{66}, Y_{20,6}^{(i)}, Z_{m20,6}^{(i)})$ , с номерами  $i=1, \dots, k_i$ . Одна из  $\Lambda$ -выборок  $Z_{m20,6}^{(i)}$  - ассоциированных решений ОЗ АГК преобразована в матрицу (таблица 3) модельных данных, отличающихся от матрицы ([1], таблица 3) модельных данных, гистограммно и модельно адекватных реальной многомерной выборке [12-14], с заданными (известными из публикации [10]) значениями выборочных средних  $x_{16}^{cp}=(45.75, 106.1, 19.15, 1.1367, 40.45, 27.65)$  и выборочных стандартных отклонений  $s_{16}=\text{diag}(4.4931, 7.5425, 1.711, 0.1532, 5.0742, 2.7798)$ , вычисленных ранее по матрице реальных данных размерности  $20 \times 6$ . Номерам столбцов соответствуют названия свойств (признаков) зерновой культуры [10]: №1 - длина стебля, №2 - длина колоска, №3 - число колосков в стебле, №4 - вес одного зернышка в колоске, №5 - число зерен в колоске, №6 - вес 1000 зерен (в условных единицах). Номера строк матрицы данных соответствуют названиям географических районов, на землях которых выращивались селекционерами новые сорта зерновой культуры. Строки Таблицы 3 могут переставляться произвольно, можно каждую строку «привязать» к своему географическому району. Модельные значения признаков как числа имеют много цифр после запятой - разделителя целой и дробной частей. На практике такая точность недостижима. Но длина стебля (№1) измерялась в сантиметрах с точностью до 2-х знаков после запятой: по формату F5.2, длина колоска (№2) - в сантиметрах с точностью до 1 знака после запятой: по формату F5.1, число колосков в стебле (№3) - измерялось в целых числах: по формату F2.0, как двузначное целое число, вес

одного зернышка в колоске (№4) - в граммах с точностью до 4-х знаков после запятой: по формату F6.4, число зерен в колоске (№5) - измерялось в целых числах: по формату F2.0, как двузначное целое число, вес 1000 зерен (№6) - в граммах с точностью до 4-х знаков после запятой: по формату F9.4.

Отличие «старой» модельной выборки из [1] от нашей модельной выборки (Таблица 3) будем рассматривать по критерию «урожайность с 1 га» (единица измерения центнер/га). Будем выражать ожидаемый средний урожай с 1 га, используя наши модельные и реальные данные. Если автор статьи напишет «значение этого признака №6 равно значению признака №4, умноженного на 1000», то он будет неправ. Задачу придания реалистичности модельным значениям и методику прогноза урожайности мы рассмотрим в другой статье.

## Заключение

Как мы отметили выше после решения ПСЗ решаются несколько задач моделирования. Одни задачи используют полные матрицу  $\Lambda_{nn}$  собственных чисел и полные матрицу собственных векторов  $C_{nn}$  [1,2]. Другие - неполные матрицы  $\Lambda_{nn}$  и  $C_{nn}$  [1,2]. Общая цель решения всех задач с неполными матрицами  $\Lambda_{nn}$  и  $C_{nn}$  состоит в получении точных оценок значений этих матриц. Матрицы  $\Lambda^+$  и  $C^+_{nn}$  используются для моделирования многомерных выборок  $Z_{mn}, Y_{mn}$ , адекватных реальным многомерным выборкам  $Z^{re}_{mn}, Y^{re}_{mn}$  по трем множествам параметров [15].

На гистограммах из [15] и на гистограммах наших 1-мерных переменных видны одинаковости чисел точек в интервалах осей интервалов гистограмм модельной и реальной

## Impact Factor:

ISRA (India) = 3.117	SIS (USA) = 0.912	ICV (Poland) = 6.630
ISI (Dubai, UAE) = 0.829	РИИЦ (Russia) = 0.156	PIF (India) = 1.940
GIF (Australia) = 0.564	ESJI (KZ) = 5.015	IBI (India) = 4.260
JIF = 1.500	SJIF (Morocco) = 5.667	

выборок. Это-обратная задача: при неизвестной многомерной функции распределения случайного вектора  $\xi=(\xi_1, \dots, \xi_6)$  найти 1-мерное распределение каждой из 6 зависимых компонент  $\xi_1, \dots, \xi_6$ . Решения этой обратной задачи нет [13].

Эффективное применение значений компонент  $c_{1j}, \dots, c_{6j}$ ,  $j=\ell+1, \dots, n$ , соответствующих значениям собственных чисел  $\lambda_{\ell+1}, \dots, \lambda_n$  дополнено применением функциональных ограничений на недоминирующие значения.

Выявлены несколько нюансов программирования процедуры Solver.

Наши модельные  $\Lambda^+$ -выборки, воспроизведенные по *восстановленному* спектру, наравне с  $\Lambda$ -выборками по «реальному» спектру, будут использованы при решении задач «извлечения цифровых знаний» из цифровых данных из разных предметных областей, организованных в виде таблицы объект-свойства, например, средствами когнитивного моделирования.

## References:

1. Zhanatauov, S. U. (2017, May 29-31). *Modelirovanie mnogomernyh vyborok znachenij priznakov zernovoj kul'tury*. "II mezhdun. nauchno-prakt.konf. «Evropa i tjurkskij mir: nauka, tehnika i tehnologii". Izmir (Turcija), [www.regionacadem.org](http://www.regionacadem.org)
2. Zhanatauov, S. U. (2013). *Obratnaja model' glavnyh komponent*. (p.201). Almaty: Kazstatin-form.
3. Zhanatauov, S. U. (2017). Optimization problem of modeling missing elements of the spectrum of the correlation matrix. *International scientific journal Theoretical & Applied Science*, №10, vol.54, 189-198. [www.t-science.org](http://www.t-science.org)
4. Hotelling, H. (1933). Analysis of a complex of statistical variables into principal components. *J.Educ. Psych.*, v.24, 417,441,498-520.
5. Zhanatauov, S. U. (2018). Model of digitalization of indicators of individual consciousness. *Int.Sci. Jour. "Theoretical & Applied Science"*, №6 (62), 101-110. [www.t-science.org](http://www.t-science.org)
6. Zhanatauov, S. U. (2018). Modeling eigenvectors with given the values of their indicated components. *Int. Scientific Journal Theoretical & Applied Science*, №11(67), 107-119. [www.t-science.org](http://www.t-science.org)
7. Zhanatauov, S. U. (2018). Inverse spectral problem with indicated values of components of the eigenvectors. *Int. Scientific Journal Theoretical & Applied Science*, №11(67), 359-370. [www.t-science.org](http://www.t-science.org)
8. Zhanatauov, S. U. (2017). The optimization problem with linearized equations f-parameters (f1,f2,f3,f4,f5,f6)-spectrum. *International scientific journal Theoretical & Applied Science*, №11, vol.55, 251-267. [www.t-science.org](http://www.t-science.org)
9. Chalmers, C. P. (1975). Generation of correlation matrices with a given eigenstructure. *J. Stat. Comp. Simul.*, vol.4, 133-139.
10. Zhanatauov, S. U. (2013). Kognitivnaja karta i model' social'no-jekonomicheskikh faktorov kar'ernoj uspešnosti shkol'nikov municipal'nyh shkol SShA. *Sibirskij pedagogičeskij žurnal*, №6, 28-33.
11. Zhanatauov, S. U. (2015). *Kognitivnaja karta i kognitivnaja model' analiza glavnyh komponent (telekommunikacionnaja otrasl')*. Nacional'naja asociacija uche-nyh (NAU). IX Mezhd. nauch.-prakt. konf: «Otechest-vennaja nauka v jepohu izmenenij: postulaty pro-shlogo i teorii novogo vremeni». Rossija, Ekaterinburg, 16-17 maja 2015, p.55-58.
12. Zhanatauov, S. U. (2014). Analiz budushhih debitorskoj i kreditorskoj zadolzhennostej municipalitetov gorodov. *Jekonomicheskij analiz: teorija i praktika. M.: №2(353)*, 54-62. [www.fin-izdat.ru/journal/analiz/](http://www.fin-izdat.ru/journal/analiz/)
13. Zhanatauov, S. U. (2018). Model of digitalization of the validity indicators and of the measurable indicators of the enterprise. *Int.Sci. Jour. "Theoretical & Applied Science"*, №9(65), 315-334. [www.T-Science.org](http://www.T-Science.org)
14. Zhanatauov, S. U. (2014). *The inverse problem, inverse model, invertible model*. «Internat Conference " Science: Integrating Theory and Practice" (February 24-25. 2014), Bozeman, Montana, USA/ ICET ( International enterf or Education&Technology USA) Iternational Academic Research Conference on Business, Education, Nature and Technology», pp.447-449.
15. Zhanatauov, S. U. (1988). O funkcional'nom napolnenii PPP "Spektr". *Sistemnoe modelirovanie -13*, Novosibirsk, 3-11.