УДК 51.72: 51.73 https://doi.org/10.33619/2414-2948/43/02

ИССЛЕДОВАНИЕ И ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ФИЗИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ

*©**Шувалова Л. Е.**, ORCID: 0000-0001-7272-3898, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, leshyvalova@yandex.ru*
*©**Зотин А. В.**, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, artem.zotin99@mail.ru*
*©**Крутикова А. А.**, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, lino4ka.9933@gmail.com*
*©**Сысолятина А. И.**, Казанский национальный исследовательский технологический университет, г. Нижнекамск, Россия, Sysolyatina.A2000@mail.ru*

RESEARCH AND APPROXIMATE SOLUTION OF A PHYSICAL PROBLEM

*©**Shuvalova L.**, ORCID: 0000-0001-7272-3898, Kazan National Research Technological University, Nizhnekamsk, Russia, leshyvalova@yandex.ru*
*©**Zotin A.**, Kazan National Research Technological University, Nizhnekamsk, Russia, artem.zotin99@mail.ru*
*©**Krutikova A.**, Kazan National Research Technological University, Nizhnekamsk, Russia, lino4ka.9933@gmail.com*
*©**Sysolyatina A.**, Kazan National Research Technological University, Nizhnekamsk, Russia, Sysolyatina.A2000@mail.ru*

Аннотация. Предлагается решение задачи из раздела физики об электролизе, которая сводится к приближенному решению дифференциального уравнения с численной реализацией в математическом пакете MathCad.

Abstract. The problem from the section of physics about electrolysis is considered, which is reduced to an approximate solution of a differential equation with numerical implementation in the mathematical package MathCad.

Ключевые слова: нелинейное дифференциальное уравнение, степенной ряд, численные методы.

Keywords: nonlinear differential equation, power series, numerical methods.

Электролиз — основной метод промышленного производства алюминия, хлора, важнейший способ получения фтора, щелочных и щелочноземельных металлов, эффективный метод рафинирования металлов. Именно поэтому проблема электролиза занимает центральное место в физических исследованиях.

В данной работе на примере одной из задач электрического тока в жидкостях предлагаются три подхода: метод Эйлера, метод Рунге–Кутта и разложение искомой функции в степенной ряд.

Рассмотрим следующую задачу [1]. Электрическая цепь состоит из последовательно соединенных индуктивности L=0,4 генри и электролитической ванны, наполненной литром воды, подкисленной небольшим количеством серой кислоты. Вода разлагается током, при

 Т. 5. №6. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/43

этом меняются концентрация и сопротивление раствора. Напряжение на клеммах поддерживается постоянным (20 в). При электролизе выделяется некоторое количество вещества пропорциональное времени, току и электрохимическому эквиваленту, который равен 0,000187 г/кулон. Сопротивление раствора в начале опыта R0=2 Ом, начальный ток 10 А. Найти зависимость объема воды в сосуде от времени.

Как известно, это явление описывается дифференциальным уравнением

$$E = L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{dQ}{dt} \cdot \frac{V_0 - kQ}{k_1}, \tag{1}$$

где Q — количество электричества, протекшее через цепь за промежуток времени от начала опыта до момента t.

Из уравнения (1) выражается Q через переменную V–количество воды в сосуде в момент времени t. В результате получается следующее нелинейное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$V''(t) + aV(t)V'(t) + b = 0, \tag{2}$$

здесь $a = \frac{1}{k_1 L} = 0{,}005,\ b = \frac{kE}{L} = 0{,}00935.$

Уравнение (2) точно проинтегрировать с помощью элементарных функций не удается, поэтому его решение удобно искать в виде степенного ряда.

$$V(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{V^{(n)}(0)}{n!} t^n, \tag{3}$$

где $V(0)=V_0 = 1000$ см^3, $V'(0)=-kI_0= -0{,}00187$ см^3/сек, а остальные производные $V^{(n)}(0)$ (n= 2, 3,…) находятся путем последовательного дифференцирования уравнения

$$V''(t) = -aV(t)V'(t) - b. \tag{4}$$

Численная реализация рассмотренной схемы представлена на Рисунке 1.

$a := 0.005 \quad b := 0.00935$

$i := 1..5 \quad h := 0.01$

$t_0 := 0 \quad t_i := t_0 + i \cdot h$

$V_0 := 1000 \quad V1_0 := -0.00187$

$V2_0 := -a \cdot V_0 \cdot V1_0 - b$

$V2_0 = 0$

$V3_0 := -a \cdot V1_0 \cdot V1_0 - a \cdot V_0 \cdot V2_0$

$V3_0 = -1.748 \times 10^{-8}$

$V4_0 := -a \cdot 2V1_0 \cdot V2_0 - a \cdot V1_0 \cdot V2_0 - a \cdot V_0 - a \cdot V_0 \cdot V3_0$

$V4_0 = -5$

$V(t) := \left(V_0 + \frac{V1_0}{1!} \cdot t + \frac{V2_0}{2!} \cdot t^2 + \frac{V3_0}{3!} \cdot t^3\right)$

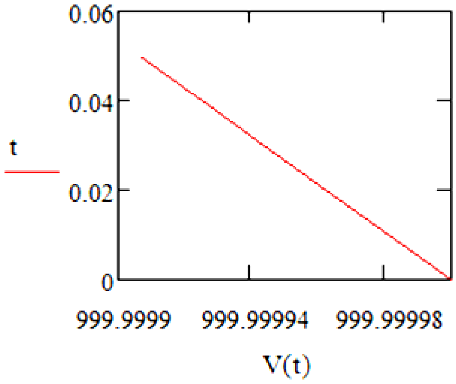

Рисунок 1. Численная реализация схемы.

Из представленных расчетов получаем степенной ряд

 Т. 5. №6. 2019
DOI: 10.33619/2414-2948/43

$$V(t) = 1000 - 0.00187t - 2.91 \cdot 10^{-9}t^3 + 3.64 \cdot 10^{-9}t^4 - 3.64 \cdot 10^{-9}t^5 + 3.04 \cdot 10^{-9}t^6 - 2.17 \cdot 10^{-9}t^7 + \cdots, \quad (5)$$

из которого видно, что коэффициенты знакочередующегося ряда убывают, а с течением времени объем воды постепенно уменьшается, что наблюдается на графике.

В подтверждение полученных результатов рассмотрим решение задачи (1) численными методами [2], дающими решение в виде таблицы приближенных значений искомой функции V(t): метод Эйлера и метод Рунге-Кутта, сравним полученные результаты.

Проинтегрировав уравнение (2) получим уравнение вида:

$$V'(t) = -\frac{aV^2(t)}{2} - bt + V'(0) + \frac{aV^2(0)}{2}. \quad (6)$$

Расчетная формула метода Эйлера в математическом пакете MathCad имеет вид:

$$d := a \cdot \frac{1000000}{2} - 0.00187$$

$$f(V,t) := \left(d - \frac{a \cdot V^2}{2} + 0.00935 \cdot t\right)$$

$$V_i := V_{i-1} + h \cdot f\left(V_{i-1}, t_{i-1}\right)$$

Результаты вычислений двух рассмотренных методов представлены на Рисунке 2, где z(p) — степенной ряд (5).

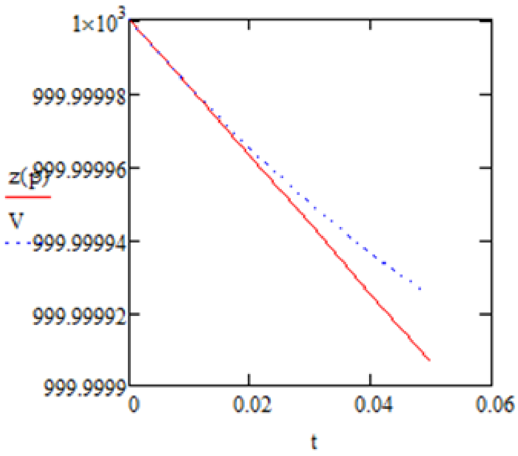

Рисунок 2. Вычисления по методам Эйлера и Рунге–Кутта.

Кроме того, получены вычисления методом Рунге-Кутты 4-го порядка применительно к уравнению (2), которые решены при помощи встроенной функции rkfixed [3] (Рисунок 3) математического пакета MathCad.

$$D(V,t) := \left(d - \frac{a \cdot V^2}{2} + 0.00935 \cdot t\right)$$

$$V := \mathrm{rkfixed}(1000, 0, 0.05, 10, D)$$

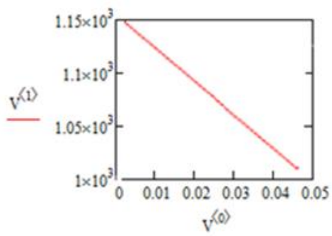

Рисунок 3. Решение при помощи встроенной функции rkfixed.

Погрешность вычислений можно проследить по приведенным графикам, которые показывают, что методы Эйлера и Рунге–Кутты обеспечивают хорошую точность на начальном промежутке времени, но затем приводят к резкому накоплению ошибок.

Список литературы:

1. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа М.: Наука, 1985. 384 с.
2. Копченова Н. В., Марон И. А. Вычислительная математика в примерах и задачах: учебное пособие. СПб.: Лань, 2017. 368 с.
3. Кирьянов Д. В. Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 432 с.

References:

1. Berman, G. N. (1985). Sbornik zadach po kursu matematicheskogo analiza Moscow, Nauka, 384.
2. Kopchenova, N. V., & Maron, I. A. (2017). Vychislitel’naya matematika v primerakh i zadachakh: uchebnoe posobie. St. Petersburg, Lan’, 368.
3. Kiryanov, D. V. (2012). Mathcad 15/Mathcad Prime 1.0. St. Petersburg, BKhV-Peterburg, 432.

Работа поступила в редакцию 14.05.2019 г.

Принята к публикации 19.05.2019 г.

Ссылка для цитирования:

Шувалова Л. Е., Зотин А. В., Крутикова А. А., Сысолятина А. И. Исследование и приближенное решение физической задачи // Бюллетень науки и практики. 2019. Т. 5. №6. С. 21-24. https://doi.org/10.33619/2414-2948/43/02

Cite as (APA):

Shuvalova, L., Zotin, A., Krutikova, A., & Sysolyatina, A. (2019). Research and Approximate Solution of a Physical Problem. *Bulletin of Science and Practice, 5*(6), 21-24. https://doi.org/10.33619/2414-2948/43/02 (in Russian).