წრფივი პროგრამირების ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნების მოძებნა მცირე საწარმოს მუშაობის მაგალითზე

ევროპული ინტეგრაცია და საქართველო
ეკონომიკისა და ბიზნესის აქტუალური პრობლემები გლობალიზაციის თანამედროვე პირობებში

საერთაშორისო სამეცნიერო-პრაქტიკული კონფერენცია

ბიზნესი, ორგანიზაციული სისტემები და მიკროეკონომიკური პრობლემები

იოსებ ქართველიშვილი
ტექნიკის აკადემიური დოქტორი,
ევროპის სასწავლო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

თეა თოდუა
ტექნიკის აკადემიური დოქტორი,
ევროპის სასწავლო უნივერსიტეტის პროფესორი

საკვანძო სიტყვები:
წრფივი პროგრამირება, ოპტიმალური ამონახსნების მოძებნა

თანამედროვე ცხოვრება შევიდა განვითარების ისეთ სტადიაში, რომ ნებისმიერი სფერო, პრაქტიკული ამოცანების გადასაჭრელად საჭიროებს ეფექტური მეთოდების შემუშავებასა და თანამედროვე ტექნიკური სისტემების დაპროექტებას, რომლებიც დასაშვები სიზუსტით მარტივად, სწრაფად და კომპიუტერული დროის უმნიშვნელო დანახარჯებით უზრუნველყოფს დასმული ამოცანების გადაწყვეტას. რთული, მათ შორის ეკონომიკური ობიექტების (სისტემების) ეფექტურად მართვის აუცილებლობამ გამოიწვია სპეციალური მოდელებისა და მეთოდების შექმნა, რომლებიც აადვილებენ სწორი გადაწყვეტილებების მიღებას. ისინი ოპტიმიზაციის მოდელების სახელწოდებითაა ცნობილი. უკანასკნელი 60 წლის განმავლობაში ეს მოდელები ინტენსიურად ვითარდება და გამოიყენება ადამიანის მოღვაწეობის ისეთ სფეროებში, როგორიცაა მრეწველობა, სოფლის მეურნეობა, ეკონომიკა, ტრანსპორტი, ჯანმრთელობის დაცვა, საყოფაცხოვრებო მომსახურება, ფსიქოლოგია და სხვა.

ოპტიმიზაციის ამოცანის გადაწყვეტა უმნიშვნელოვანესია ადამიანის მოღვაწეობის თითქმის ყველა სფეროში. მოვიყვანოთ რამდენიმე მაგალითი: 1) სამრეწველო საწარმოს აინტერესებს საწარმოო რესურსების ეკონომიის საკითხი; 2) ახალ ავტოსტრადაზე უნდა განლაგდეს ავტოგასამართი სადგურების ქსელი, საჭიროა რაციონალურად განისაზღვროს ამ ქსელის პარამეტრები; 3) საქალაქო ტრანსპორტის სამსახურს აინტერესებს სატრანსპორტო საშუალებების ოპტიმალური მარშრუტები. ყველა მაგალითში ოპერაციის კვლევის ძირითადი ამოცანაა გარკვეული მიზნის მისაღწევად საუკეთესო გზის ამორჩევა და მისი შეფასება. ამ შემთხვევაში მთავარი როლი ენიჭება მათემატიკურ მოდელირებას. სანამ მათემატიკურ მოდელს ავაგებდეთ, საჭიროა ობიექტის (სისტემის) წინასწარი შესწავლის საფუძველზე გამოვავლინოთ ამ ობიექტის ისეთი მახასიათებლები, რომელთა მნიშვნელობების ვარირებაც შეიძლება. სხვა სიტყვებით რომ ვთქვათ, უნდა დავადგინოთ მართვადი ცვლადების

სიმრავლე. მათემატიკური მოდელის ასაგებად საჭიროა სწორი წარმოდგენა გვქონდეს ობიექტის (სისტემის) ფუნქციონირების მიზანზე და ინფორმაცია გვქონდეს შეზღუდვებზე, რომლებიც განსაზღვრავს მართვადი ცვლადების დასაშვებ მნიშვნელობებს. როგორც მიზანი, ასევე შეზღუდვები უნდა ჩაიწეროს ფუნქციების სახით, რომელთა არგუმენტებს წარმოადგენენ მართვადი ცვლადები.

მათემატიკური მოდელები შეიძლება დავყოთ დეტერმინირებულ და სტოქასტურ მოდელებად. დეტერმინირებულ მოდელებში ყველა ფაქტორი, რომელიც ახასიათებს განსახილველ ობიექტს, მკვლევარისათვის ცნობილია. სტოქასტური მოდელები კი შეიცავენ შემთხვევით ფაქტორებს, რომელთა შესახებაც ცნობილია მათი განაწილების კანონები. ოპტიმიზაციის მოდელების პრაქტიკული ამოცანების ამოხსნის დაგროვილი გამოცდილება საშუალებას იძლევა, ამ ამოცანების შინაარსის მიხედვით გამოიყოს მათი ტიპობრივი კლასები. განვიხილოთ თითოეული მათგანი:

1. **რესურსების განაწილების და დანიშვნის ამოცანები** წარმოიშობა, როცა გვაქვს შესასრულებელ სამუშაოთა ერთობლიობა და მათ შესასრულებლად საჭირო რესურსები შეზღუდულია. ამოცანა მდგომარეობს სამუშაოების მიხედვით რესურსების ისეთი განაწილების მოძებნაში, რომლის დროსაც ან მინიმალური იქნება ოპერაციის ჩატარების დანახარჯები ან – მაქსიმალური საერთო ეფექტი. ორივე კრიტერიუმის ერთდროულად გათვალისწინებაც შესაძლებელია. ასეთ შემთხვევაში მიიღება ე.წ. მრავალკრიტერიუმიანი ოპერაციის ამოცანები. რესურსების განაწილების ტიპის ამოცანებს ეკუთვნის სატრანსპორტო ამოცანა, რომელშიც განიხილება წარმოების პუნქტებზე მოხმარების პუნქტების ოპტიმალური მიმაგრების პრობლემა. ამ ტიპის ამოცანების ამოსახსნელად ფართოდ გამოიყენება წრფივი პროგრამირების, გრაფთა თეორიის, განრიგებათა თეორიის მეთოდები.
2. **მარაგთა მართვის ამოცანები** ხასიათდება შემდეგი თავისებურებით: მარაგის ზრდასთან ერთად იზრდება მისი შენახვის ხარჯები, მაგრამ მცირდება დანაკარგები შესაძლო დეფიციტის გამო. საჭიროა დადგინდეს მარაგის ის მინიმალური რაოდენობა, რომლის დროსაც საჭირო დანახარჯებისა და შესაძლო დეფიციტის გამო შექმნილი დანახარჯების ჯამი მინიმალურია.
3. **მარშრუტების ამორჩევის ამოცანები,** ანუ ქსელური ამოცანები გვხვდება სატრანსპორტო და კავშირგაბმულობის სხვადასხვა პროცესის განხილვისას. ამ ტიპის ამოცანებს მიეკუთვნება კომივოიაჟერის, მაქსიმალური ნაკადის და გრაფთა თეორიის ზოგიერთი სხვა ამოცანა.
4. **ქსელური დაგეგმვის ამოცანები** აქტუალურია რთული და ძვირადღირებული პროექტების დამუშავებისას. ამ დროს არსებითია პროექტის სხვადასხვა ეტაპის დაწყებისა და დამთავრების ოპტიმალური დროის დადგენა.
5. **კალენდარული დაგეგმვის ამოცანებისათვის** დამახასიათებელია სხვადასხვა ტიპის სამუშაოთა შესრულების ოპტიმალური თანმიმდევრობის დადგენა სხვადასხვა კრიტერიუმის შესაბამისად.
6. **კომბინირებული ამოცანები** ერთდროულად მოიცავს რამდენიმე ტიპის ამოცანას. მაგალითად, წარმოების მართვის პროცესში ვაწყდებით შემდეგ პრობლემებს: თითოეული ტიპის რა რაოდენობის ნაკეთობა გამოვუშვათ (წარმოების დაგეგმვის ამოცანა), როგორ გავანაწილოთ შეკვეთები მოწყობილობებზე (განაწილების ამოცანა), რა თანმიმდევრობით შევასრულოთ შეკვეთები (კალენდარული დაგეგმვის ამოცანა).

პრაქტიკული ამოცანების უმრავლესობა გულისხმობს გარკვეული აზრით საუკეთესო (ოპტიმალური) გადაწყვეტილების ამორჩევას (მაგალითად, მოგების მაქსიმუმი, დანახარჯების მინიმუმი, გარკვეული ოპერაციის ჩატარებისათვის საჭირო დროის მინიმუმი და ა.შ.). შესაბამისი მათემატიკური მოდელებიც ძალიან ხშირად ოპტიმიზაციის ამოცანებია. ისეთ ოპერაციებში, სადაც მრავალი ცვლადის ფუნქციის ექსტრემუმს ვეძებთ და ცვლადები გარკვეულ პირობებს (შეზღუდვებს) აკმაყოფილებენ, ამოცანების მოდელირებისათვის ძირითადად გამოიყენება მათემატიკური პროგრამირების მეთოდები.

მიზნობრივი ფუნქციისა და შეზღუდვების სტრუქტურის მიხედვით შეიძლება მივიღოთ წრფივი, არაწრფივი, დინამიკური, დისკრეტული

(მთელრიცხვა), სტოქასტური პროგრამირების ამოცანები. ოპტიმალური (თუ ეს შესაძლებელია) ან მიახლოებითი ამონახსნის მისაღებად გამოიყენება ცნობილი ალგორითმები (თუ ასეთი არ არსებობს, უნდა დამუშავდეს ახალი). როგორც წესი, პრაქტიკულ ამოცანებში ცვლადებისა და შეზღუდვების რაოდენობა საკმაოდ დიდია, ამიტომაც კომპიუტერის როლი პრაქტიკული ამოცანების გადაჭრაში ძალიან მნიშვნელოვანია.

მათემატიკური პროგრამირების მეთოდებს შორის ყველაზე კარგად დამუშავებულს წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანების ამოხსნის მეთოდები.

წრფივი პროგრამირების ამოცანები შეიძლება სხვადასხვა სახით დაისვას, მაგრამ ყველა ამოცანა, რომელზეც დაიყვანება ნებისმიერი ეკონომიკური ან ტექნიკური ამოცანა, შეიძლება გავაერთიანოთ წრფივი პროგრამირების ერთ ზოგად ამოცანაში.

ავაგოთ ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელი მცირე საწარმოსთვის (კონკრეტული მაგალითი და მონაცემები მოყვანილია ქვემოთ) და მიღებული მოდელის საფუძველზე ვიპოვოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანის ოპტიმალური ამონახსნები.

დავუშვათ, მოცემული გვაქვს მცირე საწარმო, რომელსაც რესურსების სახით გააჩნია 120 გრძივი მეტრი ფიცარი, 100 გრძივი მეტრი ლატანი და 64 კვ.მ დიქტი. ამ მასალებისგან საწარმოს შეუძლია დაამზადოს მაგიდები და კარადები. თითოეული მაგიდის დამზადებას ესაჭიროება: ფიცარი – 12 გრძივი მეტრი, ლატანი – 5 გრძივი მეტრი და დიქტი – 5 კვ.მ. თითოეული კარადის დამზადებას ესაჭიროება: ფიცარი – 4 გრძივი მეტრი, ლატანი – 10 გრძივი მეტრი და დიქტი – 6 კვ.მ. ერთი მაგიდა ღირს – 80, ხოლო ერთი კარადა – 50 ლარი.

წარმოების ოპტიმალური მართვის ამოცანა მდგომარეობს შემდეგში: რამდენი დავამზადოთ თითოეული სახის პროდუქცია ისე, რომ არ გადავაჭარბოთ არსებულ რესურსებს და საწარმომ მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი. დასმული ამოცანა დავიყვანოთ წრფივი პროგრამირების ამოცანამდე. ჯერ ამოცანა წარმოვადგინოთ ზოგადი სახით, ამისათვის შემოვიღოთ აღნიშვნები.

განვიხილოთ ნებისმიერი სახის წარმოება. დავუშვათ, რომ მოცემული წარმოება უშვებს n რაოდენობის პროდუქციას, რომლისთვისაც საჭიროა m რაოდენობის რესურსი. ამასთან ცნობილია თითოეული სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად საჭირო რესურსების რაოდენობა, ე.ი. ნორმა, რომელიც ღვნიშნოთ a_{ij}-ით, სადაც $i=(1,..,m)$, $j=(1,..,n)$. a_{12} – ეს არის ნორმა I სახის რესურსისა, რომელიც საჭიროა II სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად. ზოგადად a_{ij} – ეს არის ნორმა i-ური სახის რესურსისა, რომელიც საჭიროა j-ური სახის პროდუქციის ერთეულის დასამზადებლად. c_j-ით აღვნიშნოთ j-ური სახის პროდუქციის ერთეულის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება, b_i – i-ური რესურსის რაოდენობა, რომელიც წარმოებას აქვს, x_j – პროდუქციის რაოდენობა, რომელიც წარმოებამ უნდა დაამზადოს. მაშინ $X(x_1, x_2,..., x_n)$ იქნება წარმოების მთლიანი გეგმა. ცხადია, რომ წარმოებას სურს შეადგინოს ისეთი გეგმა, რომელიც მოცემული რესურსების გამოყენებით მას მისცემს მაქსიმალურ მოგებას, ე.ი. უნდა განვსაზღვროთ ეფექტურობის კრიტერიუმი ან მოცემული ამოცანის მიზნობრივი ფუნქცია.

ჩვენი აღნიშვნის თანახმად ცნობილია c_j, მაშინ c_1x_1 იქნება x_1 რაოდენობის I სახის პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება. ასევე c_nx_n არის x_n რაოდენობის n-ური სახის პროდუქციის რეალიზაციის შედეგად მიღებული მოგება. თუ შევკრებთ c_jx_j-ს, მივიღებთ მიზნობრივ ფუნქციას, ანუ ეფექტურობის კრიტერიუმს

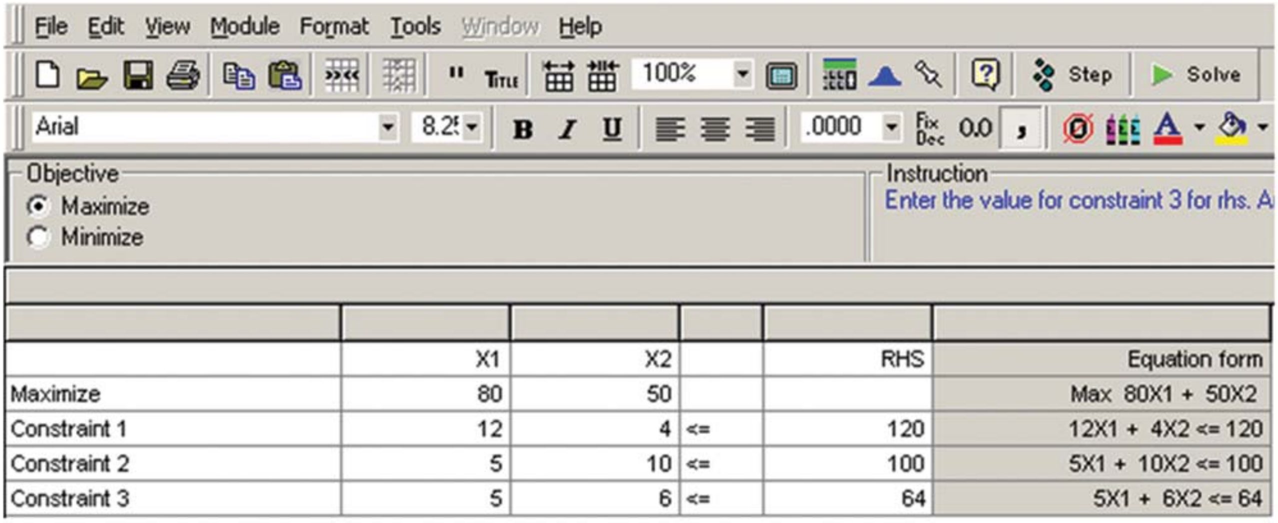
$F= c_1x_1+ c_2x_2+...+ c_jx_j+...+ c_nx_n$ ანუ

$$F=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j \qquad (1)$$

წარმოებას აინტერესებს ისეთი $X(x_1, x_2,..., x_n)$ გეგმის შედგენა, რომ ერთი მხრივ, მიზნობრივმა ფუნქციამ (1) მიიღოს მაქსიმალური მნიშვნელობა, ხოლო მეორე მხრივ, არ გადააჭარბოს არსებულ რესურსებს. ე.ი. x_j ცვლადებმა უნდა დააკმაყოფილონ შემდეგი უტოლობები:

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n \le b_i, \ \ i = 1,2,...,m \qquad (2)$$

რადგანაც x_j აღნიშნავს დამზადებული პროდუქციის რაოდენობას, ამიტომ x_j რიცხვების მნიშვნელობები არ შეიძლება იყოს უარყოფითი, ეს არის ეკონომიკური ხასიათის შეზღუდვა.



	X1	X2		RHS	Equation form
Maximize	80	50			Max 80X1 + 50X2
Constraint 1	12	4	<=	120	12X1 + 4X2 <= 120
Constraint 2	5	10	<=	100	5X1 + 10X2 <= 100
Constraint 3	5	6	<=	64	5X1 + 6X2 <= 64

სურ.1. საწყისი მონაცემების შესატანი ფორმა

მივიღებთ *m+1* უტოლობისაგან შემდგარ სისტემას, რომელიც წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანის შეზღუდვების სისტემას:

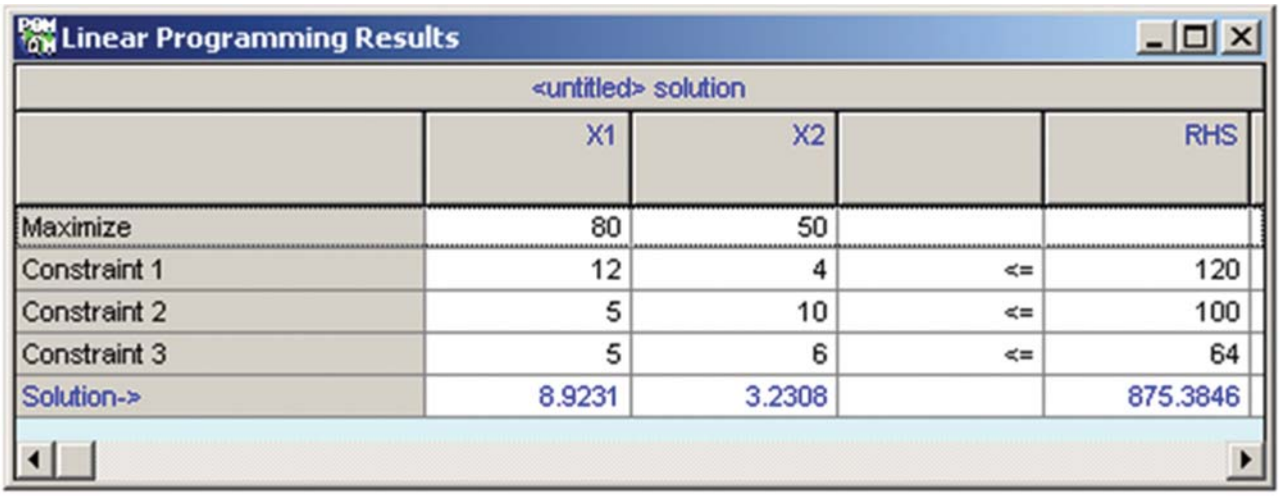
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1j} x_j + \ldots + a_{1n} x_n \le b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2j} x_j + \ldots + a_{2n} x_n \le b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mj} x_j + \ldots + a_{mn} x_n \le b_m \end{cases} \quad (3)$$

თუ $x_j=0$, ეს იმას ნიშნავს, რომ მოცემული სახის პროდუქციის გამოშვება წარმოებისათვის არ არის მიზანშეწონილი. საბოლოოდ, თუ შეზღუდვების სისტემას მივუწერთ მიზნობრივ ფუნქციას, მაშინ წარმოების მართვის ამოცანა მოკლედ ასე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ: ვიპოვოთ $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ცვლადების ისეთი არაუარყოფითი მნიშვნელობები, რომლებიც დააკმაყოფილებენ (3) უტოლობებს და რომლებისთვისაც (1) მიზნობრივი ფუნქცია მიიღებს მაქსიმალურ მნიშვნელობას. თუ შეზღუდვების სისტემაში და მიზნობრივ ფუნქციაში შევიტანთ კონკრეტულ რიცხვით მაგალითებს, მაშინ მივიღებთ:

$$\begin{cases} \square\square x_1 + 4x_2 \le 120 \\ 5x_1 + \square\square x_2 \le 100 \\ 5x_1 + 6x_2 \le \square\square \end{cases} \quad (4)$$

$$F = \square\square x_1 + 5\square x_2 \to \max \quad (5)$$

(4) და (5) გამოსახულებაში ყველა დამოკიდებულება არის წრფივი, ამიტომ მოცემული ამოცანა წარმოადგენს წრფივი პროგრამირების ამოცანას. (4) შეზღუდვების სისტემა და (5) მიზნობრივი ფუნქცია წარმოადგენს ამოცანის



	X1	X2		RHS
Maximize	80	50		
Constraint 1	12	4	<=	120
Constraint 2	5	10	<=	100
Constraint 3	5	6	<=	64
Solution->	8.9231	3.2308		875.3846

სურ.2. ოპტიმალური ამონახსნების გამომავალი ფორმა

მათემატიკურ მოდელს.

წრფივი პროგრამირების ამოცანებში მათემატიკური მოდელის აგების შემდეგ მოიძებნება ოპტიმალური ამონახსნები, რომლისთვისაც გამოიყენება სიმპლექსმეთოდი. ამისათვის გამოვიყენოთ "Pom For Windows" პროგრამული პაკეტი, რომელშიც ჩადებულია სიმპლექსმეთოდის ალგორითმი. გამოვიძახოთ საწყისი მონაცემების შესატანი ფორმა და ამოცანის მათემატიკური მოდელიდან მასში შევიყვანოთ საწყისი მნიშვნელობები (სურ. 1).

შემდეგ მოვახდინოთ ფორმის რეალიზაცია, ამისათვის დავაჭიროთ ღილაკს "Solve", რის შემდეგაც გამოჩნდება გამომავალი ფორმა, სადაც მოცემულია ოპტიმალური ამონახსნები (სურ. 2).

სურ.2-დან ჩანს შემდეგი: იმისათვის, რომ წარმოებამ მიიღოს მაქსიმალური შემოსავალი, უნდა დაამზადოს I სახის პროდუქტი – 9 ცალი, II სახის პროდუქტი – 3 ცალი, ხოლო მოგება იქნება – 875.38 ლარი.

საბოლოოდ შეიძლება დავასკვნათ, რომ წარმოების მართვის პროცესში ობიექტის ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელის გამოყენება ძალიან მნიშვნელოვანია ეფექტური დაგეგმვისა და ოპტიმალური გადაწყვეტილებების მისაღებად. ეკონომიკური ამოცანა წარმოდგენილი უნდა იყოს მათემატიკური განტოლებების, უტოლობებისა და ზღვრული ფუნქციის ექსტრემუმის (მაქსიმუმი ან მინიმუმი) სახით, სადაც ყველა პირობა იქნება დაცული თავისი შეზღუდვებით.

ამგვარად, ოპტიმალური გადაწყვეტილების მისაღებად, ნებისმიერი ეკონომიკური ამოცანისათვის, თავდაპირველად აუცილებელია აიგოს ეკონომიკურ-მთემატიკური მოდელი ისეთი სტრუქტურით, რომელიც მოიცავს შეზღუდვების სიტემებს, მიზნობრივ ფუნქციას და ოპტიმალურობის კრიტერიუმებს, ხოლო შემდეგ უნდა განხორციელდეს მისი პრაქტიკული რეალიზაცია პროგრამული პაკეტის დახმარებით.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. გოგიჩაიშვილი, გ. (1998). შონია ო., ქართველიშვილი ი. ოპერაციათა კვლევა. სტუ, თბილისი.
2. გოგიჩაიშვილი, გ. (2004). შონია ო., ქართველიშვილი ი. ავტომატიზებული მართვის მოდელები. სტუ, თბილისი.
3. ქართველიშვილი, ი., შონია, ო., ნადირაშვილი, ვ. (2015). წრფივი პროგრამირების ამოცანების ოპტიმალური ამონახსნების მოძებნა ეკონომიკურ-მათემატიკური მოდელების გამოყენებით. საერთაშორისო რეცენზირებადი და რეფერირებადი სამეცნიერო ჟურნალი „ეკონომიკა" №1-2, თბილისი.

Finding Optimal Solutions for the Task of Linear Programming on the Basis of Working of Small Enterprise

Ioseb Kartvelishvili
Doctor of Technics,
European Teaching University Associate Professor

Tea Todua
Doctor of Technics,
European Teaching University Professor

Key words:
LINEAR PROGRAMMING, OPTIMAL SOLUTIONS

Summary

Solution of the task of optimization is the major for all fields of activity of the person. In this article there are considered questions of use of economic-mathematical model of object in an enterprise management process for its effective planning and adoption of optimal solutions. For small enterprise the economic-mathematical model is constructed and by means of a software package of "Pom For Windows" optimal solutions for a task of linear programming are found.