ევროპული ინტეგრაცია და საქართველო
ეკონომიკისა და ბიზნესის აქტუალური პრობლემები გლობალიზაციის თანამედროვე პირობებში

საერთაშორისო სამეცნიერო-პრაქტიკული კონფერენცია

ბიზნესი, ორგანიზაციული სისტემები და მიკროეკონომიკური პრობლემები

თამაშები უნაგირა წერტილით და თამაშის ამონახსნი შერეული სტრატეგიის არეში

იოსებ ქართველიშვილი
ტექნიკის აკადემიური დოქტორი,
ევროპის სასწავლო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

თეა თოდუა
ტექნიკის აკადემიური დოქტორი,
ევროპის სასწავლო უნივერსიტეტის ასოცირებული პროფესორი

საკვანძო სიტყვები:
თამაშები უნაგირა წერტილით, თამაშის ამონახსნი, შერეული სტრატეგია

პრაქტიკაში ხშირად გვხვდება ისეთი სიტუაციები, როდესაც ურთიერთსაწინააღმდეგო მიზნების მქონე მხარეთა ინტერესების შეჯახება ხდება. მოცემული სიტუაციების უმთავრეს მახასიათებელ თვისებად ითვლება ის, რომ არცერთი მხარისათვის არ არის ცნობილი, როგორ იმოქმედებს მოწინააღმდეგე მხარე მოცემულ მომენტში. ეს წარმოქმნის განუსაზღვრელობის ფაქტორს, რომლის არსებობაც მოცემული სიტუაციის ძირითადი მახასიათებელი თვისებაა. გარდა ამისა, თითოეული მხარე გულისხმობს, რომ საქმე აქვს გონიერ მოწინააღმდეგესთან და მათი ყოველი მოქმედება მიმართულია იქითკენ, რომ მოწინააღმდეგე მხარისათვის შედეგი იყოს საზიანო, ხოლო თავისთვის კი - სასარგებლო.

ზემოთ მოყვანილი კონფლიქტური სახის სიტუაციების ანალიზისათვის იყენებენ სპეციალურ მათემატიკურ მიმართულებას - თამაშთა თეორიას. მის ძირითად ამოცანას წარმოადგენს, გამოიმუშაოს რეკომენდაციები კონფლიქტურ სიტუაციაში მოთამაშეთა გონივრული მოქმედებისათვის.

თამაშთა თეორიის პრინციპს, რომელიც თითოეულ მხარეს უწევს რეკომენდაციას უალრესად ფრთხილი სტრატეგიის ამორჩევაში, იმ პირობის გათვალისწინებით, რომ მოწინააღმდეგე მხარის ყოველი მოქმედება ყოველთვის თავისთვის სასარგებლოა და მოპირდაპირე მხარისთვის საზიანო, მინიმაქსის პრინციპი ეწოდება. ეს პრინციპი საშუალებას იძლევა, განისაზღვროს მინიმაქსური სტრატეგიები.

მოვიყვანოთ 4X4-ზე თამაშის მაგალითი:

ცხრილი 1

A \ B	B_1	B_2	B_3	B_4	min სტრ.
A_1	2	3	7	1	1
A_2	6	2	1	5	1
A_3	5	**4**	6	7	**4***
A_4	5	2	3	4	2
max სვეტ.	6	4	7	7	

მოცემული თამაშისათვის გამოვიყენოთ მინიმაქსის პრინციპი, რომელიც გვაძლევს:

$$\alpha = \max\min a_{ij} = 4; \qquad \beta = \min\max a_j = 4$$

$$v = \alpha = \beta = 4$$

სადაც, v – თამაშის ფასია. მინიმაქსური სტრატეგიები იქნება A_3 და B_2. ხაზგასმული რიცხვი წარმოადგენს მინიმალურ სიდიდეს თავის სტრიქონში და მაქსიმალურს თავის სვეტში (ე.ი. მდებარეობს მინიმაქსური სტრატეგიების გადაკვეთაზე). მოცემულ რიცხვს ეწოდება უნაგირა წერტილი, ხოლო თამაშებს, რომლებიც შეიცავს უნაგირა წერტილს, ეწოდება თამაშები უნაგირა წერტილით. ასეთი ტიპის თამაშებში მინიმაქსის პრინციპის გამოყენება საშუალებას იძლევა, განისაზღვროს მინიმაქსური სტრატეგიები, რომლებიც თამაშის საბოლოო ამონახსნს წარმოადგენს. მიღებული ამონახსნი იქნება საბოლოო იმ მიზეზით, რომ ნაპოვნი მინიმაქსური სტრატეგიებიდან გადახვევა მხოლოდ თამაშის შედეგის გაუარესებამდე მიგვიყვანს. რადგანაც, მოცემულ შემთხვევაში, თამაშის ამონახსნი საბოლოოა, ამიტომ ის აგრეთვე იქნება ოპტიმალური, ხოლო ნაპოვნი მინიმაქსური სტრატეგიები იქნება მოთამაშეების ოპტიმალური სტრატეგიები.

თამაშის ოპტიმალურ ამონახსნს გააჩნია შემდეგი მნიშვნელოვანი თვისება: თუ A მხარე ემყარება თავის ოპტიმალურ სტრატეგიას, მაშინ ის უზრუნველყოფს თავისთვის მოგებას, რომელიც თამაშის v ფასის ტოლია, როგორც არ უნდა იმოქმედოს B მხარემ. თუ B მხარე გადაუხვევს თავის ოპტიმალურ სტრატეგიას, მაშინ A მხარის მოგება, B მხარისთვის უკეთეს შემთხვევაში განმეორდება, ხოლო ყველა დანარჩენ შემთხვევაში A მხარის მოგება გაიზრდება.

პრაქტიკაში გვხვდება უამრავი თამაში, სადაც $\alpha \neq \beta$. ასეთ თამაშებში, მინიმაქსის პრინციპის გამოყენება საშუალებას არ გვაძლევს, ვიპოვოთ თამაშის საბოლოო ამონახსნი. ამავე დროს, თამაშებში უნაგირა წერტილით მინიმაქსის პრინციპის გამოყენება განსაზღვრავს თამაშის საბოლოო ამონახსნს, ანუ მის ოპტიმალურ ამონახსნს. თამაშებში, სადაც $\alpha \neq \beta$ □თამაშის ამონახსნი არ არსებობს მოცემულ წმინდა სტრატეგიათა არეში, მაგრამ იგი არსებობს შერეულ სტრატეგიათა არეში. შერეული სტრატეგია ისეთი სტრატეგიაა, რომლის დროსაც თითოეული მოთამაშე იყენებს თავის სტრატეგიებს წინასწარ მოცემული ალბათობებით. წმინდა სტრატეგია წარმოადგენს შერეული სტრატეგიის კერძო სახეს, რომელშიაც ყველა წმინდა სტრატეგია გამოიყენება 0-ის ტოლი ალბათობით.

განვიხილოთ თამაშის ერთი მაგალითი. ვთქვათ აგროფირმას, რომელიც დაკავებულია მარცვლეული კულტურების მოყვანით, გამოყოფილი აქვს 100ჰა მიწის ნაკვეთი, რომელზედაც შესაძლებელია ხორბლის, ჭვავის, ქერის და შვრიის მოსავალის მიღება. დავუშვათ, რომ გარკვეული მიზეზების გამო საჭირო გახდა ორი მარცვლეული კულტურა შეეცვალათ დანარჩენი ორი მარცვლეული კულტურით ისე, რომ მოსავლის აღების შემდეგ ფირმას მიელო გარკვეული მოგება. ამ მიზნის განხორციელებისათვის არსებობს შეცვლის ოთხი შესაძლებელი ვარიანტი: ქერი – ხორბალი, ქერი – ჭვავი, შვრია – ხორბალი, შვრია – ჭვავი.

მე-2 და მე-3 ცხრილებში მოყვანილია 1ჰა-ზე მიღებული მოსავლის ღირებულება ლარებში, მარცვლეული კულტურების სახეობების მიხედვით და ერთი სახეობის მეორესთან უპირატესობის ალბათობები მოსავლიანობის გამართლების თვალსაზრისით (მონაცემები აღებულია პირობითად). ზემოთ მოყვანილი სიტუაცია წარმოვიდგინოთ როგორც თამაში ორი – A და B მხარის მონაწილეობით. ამავე დროს A-ს ქვეშ ვიგულისხმოთ წყვილი: ქერი – შვრია, ხოლო B-ს ქვეშ – წყვილი: ხორბალი – ჭვავი.

ცხრილი 2

მარცვლეულის დასახელება	1 ჰა-ზე შემოსავლის ღირ. ლარებში
ქერი	$20 \bullet 10^2$
შვრია	$15 \bullet 10^2$
ხორბალი	$30 \bullet 10^2$
ჭვავი	$10 \bullet 10^2$

ცხრილი 3

A \ B	ქერი	შვრია	ხორბალი	ჭვავი
	უპირატესობის კოეფიციენტი			
ქერი	–	–	0.7	0.6
შვრია	–	–	0.7	0.6
ხორბალი	0.8	0.9	–	–
ჭვავი	0.8	0.9	–	–

მოცემული ცხრილების საშუალებით შეგვიძლია გამოვთვალოთ ყველა შესაძლებელი ვარიანტის გამოყენების დროს მიღებული შემოსავალი. I ვარიანტი – ქერის მაგიერ ხორბლის დათესავის შემთხვევა. რადგანაც უპირატესობის ალბათობა შეადგენს 0.7-ს, ამიტომ 100 ჰა-დან მოსავალი გაამართლებს 0.7 • 100 = 70 ჰა-ზე და ღირე-

ბულების ცხრილის თანახმად, შემოსავალი იქნება $70 \bullet 30 \bullet 10^2 = 2.1 \bullet 10^5$ ლარი, მაგრამ ქერი ალბათობათა ცხრილის თანახმად გაამართლებს $0.8 \bullet 100 = 80$ ჰა-ზე და შესაბამისად შემოსავალი იქნება $80 \bullet 20 \bullet 10^2 = 1.6 \bullet 10^5$ ლარი. თუ პირველ შედეგს გამოვაკლებთ მეორე შედეგს, მივიღებთ I ვარიანტის გამოყენების დროს მიღებულ შემოსავალს.

$2.1 \bullet 10^5 - 1.6 \bullet 10^5 = 0.5 \bullet 10^5$ ლარი

ასევე შეგვიძლია გამოვთვალოთ დანარჩენი სამი ვარიანტის გამოყენების დროს მიღებული შემოსავლები. მიღებული შედეგები შევიტანოთ მე-4 ცხრილში.

ცხრილი 4

A \ B	ხორბალი	ქვავი	min სტრიქონში
ქერი	$0.5 \bullet 10^5$	$1 \bullet 10^5$	0.6
შვრია	$0.75 \bullet 10^5$	$-0.75 \bullet 10^5$	$-0.75 \bullet 10^5$
max სვეტში.	$0.75 \bullet 10^5$	$1 \bullet 10^5$	

მოცემულ თამაშში გამოვიყენოთ მინიმაქსის პრინციპი.

$$\alpha = \max_i \min_j a_j = 0.5 \bullet 10^5$$

$$\beta = \min_i \max_j a_j = 0.75 \bullet 10^5$$

როგორც ჩანს $\alpha \neq \beta$, ეს იმას ნიშნავს, რომ თამაშს წმინდა სტრატეგიათა არეში ამონახსნი არ გააჩნია. თამაშის ამონახსნი უნდა ვეძებოთ შერეულ სტრატეგიათა არეში.

დავუშვათ, რომ A მხარე იყენებს თავის პირველ სტრატეგიას x ალბათობით, მაშინ თავის მეორე სტრატეგიას გამოიყენებს $(1- x)$ ალბათობით. დავუშვათ B მხარე გამოიყენებს თავის პირველ სტრატეგიას y ალბათობით, მაშინ თავის მეორე სტრატეგიას გამოიყენებს $(1- y)$ ალბათობით.

ვიპოვოთ A მხარის მოგების საშუალო მნიშვნელობა, ანუ მოგების მათემატიკური მოლოდინი.

$$\square\ \square\square\square = 0.5 \bullet 10^5 xy + 1 \bullet 10^5 x(1-y) + 0.75 \bullet 10^5 y \bullet$$
$$\bullet (1-x) - 0.75 \bullet 10^5 y(1-x)(1-y) = -2 \bullet 10^5 \left(x - \frac{\square}{4}\right) \bullet$$
$$\bullet \left(y - \frac{\square}{\square}\right) + \frac{9}{16} \bullet 10^5$$

მოვახდინოთ მიღებული გამოსახულების ანალიზი. დავუშვათ რომ A მხარე იყენებს თავის პირველ სტრატეგიას $x<3/4$ ალბათობით, მაშინ $x-3/4<0$. ამ შემთხვევაში B მხარე გამოიყენებს თავის პირველ სტრატეგიას $y<7/8$ ალბათობით, იმიტომ რომ $y-7/8<0$. ამას ის გააკეთებს იმ მიზნით, რომ A მხარის მოგება იყოს რაც შეიძლება ნაკლები.

დავუშვათ, რომ A მხარე იყენებს თავის პირველ სტრატეგიას $x>3/4$ ალბათობით, ამასთან x-$3/4>0$. მაშინ B მხარე გამოიყენებს თავის პირველ სტრატეგიას $y>7/8$ ალბათობით, ამასთან y-$7/8>0$, იმის გამო, რომ ამ შემთხვევაშიც A მხარის მოგება შემცირდეს. A მხარისათვის არ არის მომგებიანი, გამოიყენოს თავისი პირველი სტრატეგია ალბათობებით $x<3/4$ და $x>3/4$. აქედან გამომდინარეობს, რომ A-მ უნდა გამოიყენოს თავისი პირველი სტრატეგია $x_1=3/4$ ალბათობით, ხოლო მეორე სტრატეგია $x_2=1-3/4=1/4$ ალბათობით.

თუ ანალოგიურად ვიმსჯელებთ B მხარის მოქმედების მიმართ, შეიძლება ვაჩვენოთ, რომ მან უნდა გამოიყენოს თავისი პირველი სტრატეგია $y_1=7/8$ ალბათობით და მეორე სტრატეგია $y_2=1-7/8=1/8$ ალბათობით.

ამგვარად, სტრატეგიების გამოყენების ოპტიმალური ალბათობები იქნება:

A მხარისათვის: 3/4 – ქერისათვის, 1/4 – შვრიისათვის;

B მხარისათვის: 7/8 – ხორბლისათვის, 1/8 – ქვავისათვის.

ამასთან თამაშის ფასი ტოლი იქნება:

$$v = 9/16 \bullet 10^5 = 0.56 \bullet 10^5 = 56000 \text{ ლარი}$$

როგორც ვხედავთ, შერეული სტრატეგიების გამოყენების შედეგად თამაშის ფასი, ანუ A მხარის მოგება გაიზარდა.

ნებისმიერ თამაშს გააჩნია ამონახსნი ცალკეულ ან შერეულ სტრატეგიათა არეში. თუ A მხარე მიყვება თავის ოპტიმალურ შერეულ სტრატეგიას, მაშინ ის უზრუნველყოფს გარანტირებულ მოგებას, რომელიც თამაშის v ფასის ტოლია, როგორც არ უნდა იმოქმედოს B მხარემ.

თუ $v = 0$, მაშინ თამაში თანაბრად ხელსაყრელია ორივე მხარისათვის. თუ $v > 0$, მაშინ თამაში ხელსაყრელია მხოლოდ A მხარისათვის. თუ $v < 0$, მაშინ თამაში ხელსაყრელია მხოლოდ B მხარისათვის.

გამოყენებული ლიტერატურა:

1. გოგიჩაიშვილი, გ., შონია, ო., ქართველიშვილი, ი. (1972). ოპერაციათა კვლევა. საქართველოს ტექნიკური უნივერსიტეტი, თბილისი.
2. Вентцель, Е. (1972). Исследование операций. М.: Сов.радио.

Games with the Saddle Point and Solutions of Games in the Field of the Mixed Strategy

Ioseb Kartvelishvili
Doctor of Technics,
European Teaching University Associate Professor

Tea Todua
Doctor of Technics,
European Teaching University Professor

Key words:
GAMES WITH A SADDLE POINT, GAME SOLUTION, MIXED STRATEGY

Summary

In this article there are considered questions of use of game theory for the analysis of conflict situations, those factors of uncertainty which existence are the main characteristic feature for this situation. Methods of determination of minimax strategy are discussed also. The specific conflict situation on the example of agricultural firm is given. Searching of optimal solution for this situation happens in the field of the mixed strategy.