

ANALISIS KONVERGENSI METODE BEDA HINGGA DALAM MENGHAMPIRI PERSAMAAN DIFUSI

F. Muhammad Zain¹, M. Garda Khadafi², P. H. Gunawan^{3*}

¹Program Studi Ilmu Komputasi, Universitas Telkom [Email: fmuhammadzain@student.telkomuniversity.ac.id]

²Program Studi Ilmu Komputasi, Universitas Telkom [Email: gardakhadafi@student.telkomuniversity.ac.id]

³Program Studi Ilmu Komputasi, Universitas Telkom [Email: phgunawan@telkomuniversity.ac.id]

*Corresponding Author

ABSTRACT

The diffusion equation or known as heat equation is a parabolic and linear type of partial differential equation. One of the numerical method to approximate the solution of diffusion equations is Finite Difference Method (FDM). In this study, the analysis of numerical convergence of FDM to the solution of diffusion equation is discussed. The analytical solution of diffusion equation is given by the separation of variables approach. Here, the result show the convergence of rate the numerical method is approximately approach 2. This result is in a good agreement with the spatial error from Taylor expansion of spatial second derivative.

Keywords: convergence, finite difference method, diffusion equation, discrete.

1 PENDAHULUAN

Persamaan difusi adalah persamaan diferensial parsial linier tipe parabolik yang umumnya digunakan untuk merepresentasikan perubahan konsentrasi dari tinggi menjadi rendah Laili (2014) seiring dengan berlalunya waktu. Persamaan difusi satu dimensi pada domain $[0, L]$ dapat dituliskan sebagai masalah nilai awal dan batas seperti berikut ini:

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad x \in (0, L) \quad (1)$$

$$U(0,t) = U(L,t) = a, \quad t > 0, \quad (2)$$

$$U(x,0) = f(x), \quad x \in [0, L], \quad (3)$$

dengan $U(x,t)$ merupakan besar konsentrasi pada waktu t dan spasial x , koefisien difusi dinotasikan dengan μ dan $f(x)$ adalah fungsi awal sebaran konsentrasi pada domain.

Salah satu metode numerik untuk mendekati solusi (1 - 3) adalah Metode Beda Hingga (MBH). Metode ini merupakan metode yang

sangat mudah dan sederhana untuk menghampiri persamaan-persamaan diferensial linier. Metode ini secara langsung menghampiri turunan sesuai dengan orde turunan dari ekspansi deret Taylor (lihat pustaka Thomas (2013); Gulsu, Mustafa dan Sezer (2006) untuk lebih detail).

Pada penelitian ini, analisis konvergensi secara numerik dari solusi MBH untuk mendekati solusi persamaan difusi (1 - 3) akan dibahas. Konvergensi solusi hampiran MBH akan diperlihatkan dari perilaku *error* atau galat yang didapat. Untuk mendapatkan galat numerik, solusi numerik akan dibandingkan dengan solusi analitik yang dapat dicari menggunakan sparasi variabel. Detail solusi analitik menggunakan sparasi variabel dapat dilihat pada pustaka Farlow (1993).

2 METODE NUMERIK

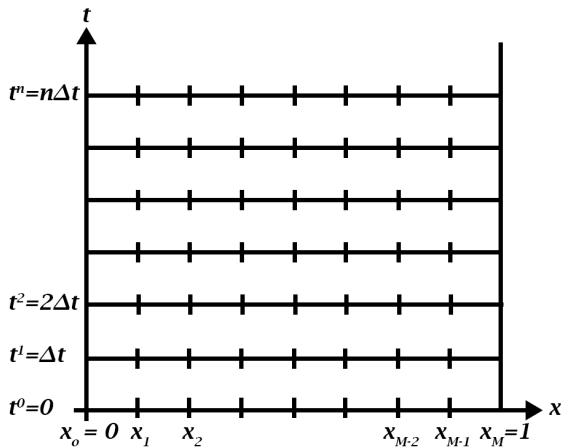
Berikut akan dibahas mengenai MBH dan analisis konvergensinya. Pada bab ini, dimulai dengan membahas diskritisasi MBH sampai

bentuk diskrit hampiran solusi (1 - 3) secara eksplisit. Selanjutnya analisis konvergensi titik demi titik juga dibahas untuk mendukung hasil analisis konvergensi secara numerik.

2.1 Metode Beda Hingga

Berikut akan dibahas mengenai bentuk diskrit dari persamaan panas dengan menggunakan metode beda hingga skema eksplisit. Diberikan domain spasial $\Omega = [0 : L]$ dan domain waktu $[0 : T]$. Selanjutnya tahap pertama, titik-titik diskrit dari seluruh domain spasial dikelompokkan dalam himpunan $\mathcal{M} = \{0, 1, \dots, M\}$, yaitu membagi domain Ω menjadi M buah partisi dengan $M \in \mathbb{Z}^+$.

Tahap kedua, titik-titik diskrit domain waktu didefinisikan sebagai $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, T_n\}$ dengan $T_n \in \mathbb{Z}^+$ adalah banyaknya partisi waktu. Ilustrasi mengenai titik-titik diskrit spasial dan waktu dapat dilihat pada Gambar 1. Sehingga, pasangan titik diskrit/ grid (x_i, t^n) mewakili titik spasial ke- i dan di waktu ke- n .



Gambar 1. Grid atau jaring titik-titik diskrit dengan langkah waktu Δt dan spasial Δx seragam.

Definisi dari notasi lain yang dibentuk oleh tiap grid diberikan seperti di bawah ini:

$$x_i = i \times \Delta x, \quad i \in \mathcal{M}, \quad \Delta x = \frac{L}{M},$$

$$t^n = n \times \Delta t, \quad n \in \mathcal{T}, \quad \Delta t = \frac{T}{T_n}$$

Solusi dari persamaan (1) secara eksplisit

menggunakan metode beda hingga untuk tiap diskrit waktu dan spasial $U(x_i, t^n)$ berupa: Recktenwald (2001)

$$U_i^{n+1} = (1 - 2r)U_i^n + r(U_{i+1}^n + U_{i-1}^n),$$

$$i \in \mathcal{M} - \{0, M\}, \quad n \in \mathcal{T} - \{0\} \quad (4)$$

dengan $r = \mu\Delta t/\Delta x^2$. Skema (4) memiliki syarat kestabilan, yaitu akan stabil jika memenuhi $r \leq 1/2$, dan galat/ error $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ yang diperoleh dari deret Taylor, Yuste, Santos B dan Acedo (2005).

2.2 Analisis Konvergensi

Berikut akan dibahas mengenai analisis konvergensi solusi numerik MBH terhadap solusi persamaan difusi (1).

Lemma 2.1. *Solusi persamaan beda hingga (4) dengan orde $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ konvergen titik demi titik (**pointwise convergence**) ke solusi persamaan difusi (1) sebagaimana $\lim \Delta x, \Delta t \rightarrow 0$.*

BUKTI. Dimisalkan solusi persamaan difusi (1) dan hampiran MBH (4) dengan kestabilan $r \leq 1/2$ pada titik grid (x_i, t^n) dinotasikan dengan Ψ_i^n dan U_i^n secara berurutan. Sehingga galat yang didapat pada titik grid (x_i, t^n) ditulis sebagai berikut:

$$Z_i^n = \Psi_i^n - U_i^n. \quad (5)$$

Selanjutnya, subsitusikan (5) ke (1), didapat

$$Z_i^{n+1} = (1 - 2r)Z_i^n + r(Z_{i+1}^n + Z_{i-1}^n) + \mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2).$$

Menggunakan sifat ketaksamaan segitiga, sehingga dapat ditulis ulang menjadi,

$$|Z_i^{n+1}| \leq (1 - 2r)|Z_i^n| + r|Z_{i+1}^n| + r|Z_{i-1}^n| + |\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)|.$$

Dengan mengambil $\varphi^n = \sup_{i \in \mathcal{M}} \{|Z_i^n|\}$, maka didapatkan,

$$\begin{aligned} \varphi^{n+1} &\leq \varphi^n + |\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)|, \\ &\leq \varphi^{n-1} + 2|\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)| \\ &\leq \varphi^{n-2} + 3|\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)|, \\ &\vdots \\ &\leq \varphi^0 + (n+1)|\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)| \\ &\leq (n+1)|\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)|, \end{aligned}$$

dengan $\varphi^0 = 0$ untuk galat pada kondisi awal. Akhirnya dengan mengambil $\lim \Delta x, \Delta t \rightarrow 0$, maka didapatkan $\varphi^{n+1} \leq 0$ mengakibatkan $\Psi_i^{n+1} = U_i^{n+1}$. Terbukti solusi hampiran (4) *pointwise convergence* ke solusi persamaan difusi (1). \square

3 HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk melihat konvergensi MBH (4) secara numerik, maka solusi analitik dan ukuran galat perlu diberikan. Solusi analitik dari Persamaan (1) menggunakan separasi variabel Hancock (2006), diberikan sebagai berikut

$$\Psi(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) e^{-\left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \mu t}, \quad (6)$$

dengan nilai awal pada saat $t = 0$,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right), \quad (7)$$

dengan A_k adalah konstanta ke- k .

Selain itu pada makalah ini, performansi dari laju konvergensi dilihat dari galat numerik yang didapatkan. Pengukur galat yang digunakan adalah L^1 -diskrit norm *error*, yaitu

$$\|Galat\|_{L^1(\Omega)} = \sum_{i \in \mathcal{M}} |\Psi_i^n - U_i^n| \Delta x. \quad (8)$$

Karena besarnya galat sangat bergantung pada nilai Δt dan Δx maka terdapat 2 kondisi

ketika galat dihitung, yaitu pada setiap nilai Δt maka nilai pada Δx berupa konstan, begitupun sebaliknya.

Pada analisis ini digunakan sembarang jangkauan pada T_n yang merupakan banyaknya partisi waktu dan sembarang nilai M yang merupakan banyaknya partisi spasial. Selanjutnya laju konvergensi metode numerik dapat dihitung sebagai berikut:

$$\left(\frac{\|Galat_2\|}{\|Galat_1\|}\right) = \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)^\tau,$$

sehingga,

$$\tau = \frac{\log(\|Galat_2\|/\|Galat_1\|)}{\log(\Delta x_2/\Delta x_1)}.$$

Simulasi numerik dalam penelitian ini menggunakan parameter-parameter berikut ini:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(\pi x), & a &= 0, & \mu &= 1, \\ L &= 1 & T &= 1. \end{aligned}$$

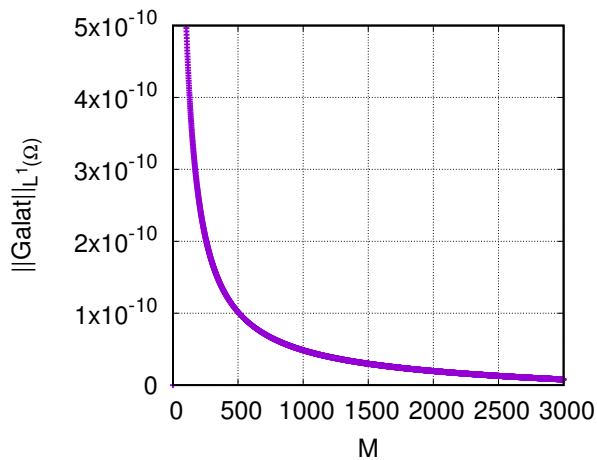
Disini, langkah waktu yang digunakan adalah langkah tetap $\Delta t = 1 \times 10^{-8}$ sehingga kondisi kestabilan $r \leq 1/2$ selalu terpenuhi untuk setiap Δx yang dipilih. Hasil galat numerik yang dihasilkan oleh MBH dalam menghampiri persamaan difusi (1) dapat dilihat pada Tabel 1 berikut ini.

Tabel 1. Galat numerik untuk beberapa nilai Δx berbeda.

No	Δx	$\ Galat\ _{L^1(\Omega)}$	τ
1	0.02	1.03×10^{-9}	-
2	0.01	5.16×10^{-10}	2.0001
3	0.005	2.58×10^{-10}	2.0025
4	0.0025	1.28×10^{-10}	2.0105
5	0.00125	6.21×10^{-11}	2.0427
6	0.000625	2.73×10^{-11}	2.1851
7	0.0003125	6.18×10^{-12}	2.1435

Berdasarkan data pada Tabel 1, terlihat galatnya terus menurun dan cenderung linier seiring dengan $\Delta x \rightarrow 0$. Selain itu, laju konver-

gensis $\tau \approx 2$ untuk $\Delta x \rightarrow 0$ yang sesuai dengan teori galat deret Taylor $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ yaitu orde 2 spasial.



Gambar 2. Nilai $\|Galat\|_{L^1(\Omega)}$ terhadap naiknya nilai M .

Gambar 2 menunjukkan semakin meningkatnya nilai M , maka galat yang dihasilkan semakin kecil. Hal ini menunjukkan metode beda hingga untuk persamaan difusi konvergen terhadap solusi analitik persamaan difusi.

4 KESIMPULAN

Analisis konvergensi secara numerik dari solusi MBH untuk mendekati solusi persamaan difusi didapat galat numerik terus menurun dan cenderung linier seiring dengan $\Delta x \rightarrow 0$. Selain itu, laju konvergensi $\tau \approx 2$ untuk $\Delta x \rightarrow 0$ yang sesuai dengan teori galat deret Taylor $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x^2)$ yaitu orde 2 spasial. Hal ini menunjukkan bahwa solusi numerik metode beda hingga konvergen terhadap solusi analitik persamaan difusi.

Daftar Pustaka

- Farlow, S. J. (1993). *Partial differential equations for scientists and engineers*. Courier Corporation.
- Gulsu, Mustafa dan Sezer, M. (2006). A Taylor polynomial approach for solving differential-difference equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 186(2):349–364.

Hancock, M. J. (2006). Page 1 the 1-d heat equation.

Laili, A. K. (2014). *Keakuratan solusi persamaan difusi menggunakan skema Crank-Nicolson*. PhD thesis, Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim.

Recktenwald, G. W. (2001). Finite-difference approximations to the heat equation.

Thomas, J. W. (2013). *Numerical partial differential equations: finite difference methods*, volume 22. Springer Science & Business Media.

Yuste, Santos B dan Acedo, L. (2005). An explicit finite difference method and a new von Neumann-type stability analysis for fractional diffusion equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 42(5):1862–1874.