

PENENTUAN HARGA OPSI BELI TIPE ASIA DENGAN METODE MONTE CARLO-CONTROL VARIATE

Ni Nyoman Ayu Artanadi¹, Komang Dharmawan^{2§}, Ketut Jayanegara³

¹Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: ayuartanadi88@gmail.com]

²Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: k.dharmawan@unud.ac.id]

³Jurusan Matematika, FMIPA – Universitas Udayana [Email: ketut_jayanegara@yahoo.com]

§Corresponding Author

ABSTRACT

Option is a contract between the writer and the holder which entitles the holder to buy or sell an underlying asset at the maturity date for a specified price known as an exercise price. Asian option is a type of financial derivatives which the payoff taking the average value over the time series of the asset price. The aim of the study is to present the Monte Carlo-Control Variate as an extension of Standard Monte Carlo applied on the calculation of the Asian option price. Standard Monte Carlo simulations 10.000.000 generate standard error 0.06 and the option price convergent at Rp.160.00 while Monte Carlo-Control Variate simulations 100.000 generate standard error 0.01 and the option price convergent at Rp.152.00. This shows the Monte Carlo-Control Variate achieve faster option price toward convergent of the Monte Carlo Standar.

Keywords: Asian Option, Monte Carlo-Control Variate, Monte Carlo Standar, Option

1. PENDAHULUAN

Menurut Bodie *et al.* (2006), opsi adalah kontrak yang dapat memberikan hak (bukan kewajiban) kepada pemegang kontrak (*option buyer*) untuk membeli atau menjual suatu aset tertentu suatu perusahaan kepada penulis opsi (*option writer*) dengan harga tertentu (*exercise price*) dalam jangka waktu tertentu (*expiration date*). Opsi dapat dibedakan menjadi opsi Standar dan opsi *non*-standar. Opsi Asia merupakan salah satu opsi *non*-standar yang pembayarannya mencakup waktu rata-rata dari harga aset. Penentuan harga kontrak opsi didasarkan pada probabilitas suatu hak opsi yang dilaksanakan (*exercised*). Beberapa model dan metode yang digunakan untuk menghitung harga kontrak opsi diantaranya: model *Black-Sholes*, metode *Binomial Tree*, *Trinomial*, *Beda Hingga* dan *Monte Carlo*.

Menurut Glasserman (2004), metode *Monte Carlo* didasarkan pada analogi antara probabilitas dan pembangkit bilangan acak. Metode *Monte Carlo* terbagi atas *Monte Carlo Standar* dan *Monte Carlo-Variance Reduction*.

Metode *Monte Carlo Standar* merupakan metode yang digunakan untuk perhitungan numerik, mengandung integral multidimensi dalam komputasi keuangan. Sedangkan metode *Monte Carlo-Variance Reduction* merupakan perluasan dari metode *Monte Carlo Standar*. Dalam metode *Monte Carlo-Variance Reduction* terdapat teknik pengurangan varians yang disebut dengan *Control Variate*. Teknik *Control Variate* merupakan teknik yang efektif dalam pengurangan varians.

Berdasarkan permasalahan tersebut, pada penelitian ini penulis ingin menentukan harga opsi beli tipe Asia dengan metode *Monte Carlo-Control Variate*. Tujuan dari penelitian ini adalah mengetahui penentuan harga opsi beli tipe Asia dengan menggunakan simulasi *Monte Carlo-Control Variate*.

Opsi adalah suatu kontrak antara *writer* dan *holder* yang dapat memberikan hak bukan kewajiban, kepada *holder* untuk membeli atau menjual suatu aset pokok (*underlying asset*) pada atau sebelum masa jatuh tempo (*maturity*

time) dengan harga pelaksanaan tertentu (*strike price*). Berdasarkan bentuknya opsi terbagi atas dua jenis, yaitu opsi jual dan opsi beli. Opsi beli yang sering disebut *call option* adalah suatu kontrak yang berisi hak untuk membeli sebuah saham dengan harga yang sudah disepakati sebelumnya. Persamaan matematis nilai opsi beli pada saat dieksekusi dinyatakan sebagai berikut:

$$C = \max(S_T - K, 0) \quad (1)$$

Persamaan (1) menunjukkan bahwa jika *strike price* lebih besar daripada harga saham pada saat jatuh tempo, maka opsi beli tidak memiliki *payoff* atau bernilai nol. Jika harga saham lebih besar dari *strike price* maka *payoff* opsi beli dapat dihitung dari selisih harga saham dengan *strike price*.

Opsi Asia adalah jenis derivatif keuangan yang *payoff*-nya mencakup waktu rata-rata dari harga aset. Menurut Rahmi (2011), opsi Asia termasuk pada opsi *path-dependent* yang dimana *payoff* dari opsi Asia tidak hanya bergantung pada harga saham saat jatuh tempo saja tetapi rata-rata harga saham selama masa jatuh temponya dan disimbolkan A (*average*). Opsi Asia terbagi menjadi opsi beli dan opsi jual. Secara matematis opsi beli tipe Asia dapat ditulis sebagai berikut:

$$C_T = \max(A_T - K, 0) \quad (2)$$

Persamaan (2) menunjukkan bahwa jika rata-rata harga saham lebih kecil daripada *strike price*, maka opsi beli tidak memiliki *payoff* atau bernilai nol. Jika rata-rata harga saham lebih besar daripada *strike price* maka *payoff* opsi beli dapat dihitung dari selisih rata-rata harga saham dengan *strike price*. Dalam hal ini:

$$A_T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} \quad (3)$$

Nilai A_T pada persamaan (3) tergantung pada pada lintasan harga saham selama umur opsi berlangsung. Secara umum rata-rata yang digunakan adalah rata-rata aritmatika dalam kasus diskret. Menurut Linetsky (2004), opsi Asia pertama kali diperkenalkan oleh Boyle (1996) dan Emanuel (1980) dan pertama kali digunakan oleh Ingersol. Ada dua bentuk dasar

dari opsi Asia. Salah satunya yaitu *Average price option* adalah opsi Asia yang *payoff*-nya bergantung pada perbedaan antara rata-rata harga saham selama masa hidup opsi dengan harga eksekusi yang telah ditentukan. *Payoff* dari *average price option* saat jatuh tempo untuk opsi beli tipe Asia dalam persamaan (4):

$$payoff = \max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} - K, 0\right) \quad (4)$$

Selanjutnya, persamaan (4) didiskontokan menjadi:

$$payoff = e^{-rT} \max\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_{t_i} - K, 0\right) \quad (5)$$

Menurut Tandelilin (2001), terdapat enam faktor yang memengaruhi harga opsi, yaitu: Harga saham, *Strike price*, *Expiration date*, Tingkat suku bunga bebas risiko, Volatilitas harga saham, dan Dividen yang diharapkan.

Secara formal, jika suatu variabel $B(t)$ mengikuti proses Wiener, maka berlaku dua sifat berikut:

1. Perubahan $\Delta B(t)$ selama periode waktu Δt yang kecil adalah $\Delta B(t) = Z\sqrt{\Delta t}$, dengan $Z \sim N(0,1)$.
2. $B(t)$ mengikuti proses Markov.

Jika $\{X(t); t \geq 0\}$ adalah gerak Brown dengan parameter r dan σ^2 , maka proses stokastik $\{Z(t); t \geq 0\}$ yang didefinisikan dengan:

$$\begin{aligned} Z(t) &= Z(0) \exp(X(t)) \\ &= Z(0) \exp(rt + \sigma B(t)) \end{aligned} \quad (6)$$

Jika persamaan diatas dideferensialkan, maka diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$dZ(t) = rZ(t)dt + \sigma Z(t)dB(t) \quad (7)$$

Pergerakan harga saham (S_t) mengikuti gerak Brown geometrik, yang secara matematis dapat ditulis:

$$\begin{aligned} S(t) &= S_{t_0} e^{r\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t} - \frac{\sigma^2}{2}\Delta t} \\ S(t) &= S_{t_0} e^{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\Delta t + \sigma Z\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \quad (8)$$

Harga saham pada waktu $t = 0$ atau S_{t_0} merupakan harga saham saat ini $S(t)$.

Penentuan nilai *return* saham dengan metode *geometric return*, dapat dihitung sebagai berikut:

$$R_t = \ln\left(\frac{S_t}{S_{t-1}}\right) \quad (9)$$

Rata-rata nilai *return* saham dapat dihitung sebagai berikut:

$$\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t \quad (10)$$

Volatilitas jika dinyatakan dalam bentuk kuadrat disebut *variance*, dapat dihitung sebagai berikut:

$$\text{var} = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R})^2 \quad (11)$$

Volatilitas tahunan dapat dihitung dengan rumus sebagai berikut:

$$\sigma = \sqrt{\text{var} \times k} \quad (12)$$

Faktor utama yang memengaruhi *standard error* adalah jumlah sampel. Semakin banyak sampelnya, maka akan semakin kecil *standard error mean*-nya yang berarti bahwa semakin kecil *standard error*-nya, semakin akurat *mean* sampel untuk dijadikan estimator untuk *mean* populasinya (Creswell, 2008). Ciri *standard error* adalah *error* yang terjadi biasanya berdistribusi normal yang besarnya berbeda.

Metode simulasi Monte Carlo adalah metode perhitungan numerik yang dipakai untuk mengestimasi nilai peubah acak. Pendekatan yang dilakukan adalah percobaan yang berulang-ulang kemudian mengambil nilai rata-rata dari percobaan tersebut sebagai nilai hampiran. Diberikan $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ dimana n independen dan berdistribusi identik diambil dari beberapa distribusi dengan kepadatan $f(x)$, maka secara umum dapat dituliskan sebagai berikut:

$$E[X] = \int x f(x) dx \approx \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i ; x \in X \quad (13)$$

Terdapat lima langkah utama pada simulasi Monte Carlo antara lain:

1. Menetapkan distribusi probabilitas untuk variabel utama
2. Menetapkan distribusi kumulatif untuk setiap variabel
3. Menentukan interval bilangan acak untuk setiap variabel
4. Pembangkit bilangan acak
5. Menjalankan simulasi dari serangkaian percobaan

Teknik *Control Variate* diperkenalkan pertama kali oleh Boyle, dalam perhitungan harga opsi. Teknik ini mengambil keuntungan dari variabel acak dengan nilai harapan yang diketahui dan berkorelasi positif dengan variabel yang dipertimbangkan. Secara matematis dapat ditulis:

$$\text{Var}(X^*) = \text{Var}(X) - \frac{[\text{Cov}(X, Y)]^2}{\text{Var}(Y)} \quad (14)$$

Simulasi Monte Carlo-*Control Variate* pada harga opsi dapat diuraikan sebagai berikut:

1. Hitung terlebih dahulu nilai dari *stock price* (S_0), *strike price* (K), volatilitas (σ), suku bunga bebas risiko ($r =$ ditetapkan 0.065), jumlah simulasi (N), waktu jatuh tempo (T) dan *dividen* = 0
2. Hitung pergerakan harga saham (S_t) harian PT.Telkom, yang mengikuti gerak Brown geometrik dengan persamaan (8).
3. Setelah diperoleh harga saham sampai waktu t , kemudian hitung *payoff* dari *average price option* dengan persamaan (4). Diskontokan *payoff* dengan persamaan (5).
4. Hitung rata-rata *payoff* dari *average price option* dari simulasi pertama sampai waktu t dengan persamaan (3).
5. Kemudian hitung kembali *payoff* dari *average price option* dengan memasukkan rata-rata yang telah diperoleh pada langkah (4) dan *strike price* yang telah ditetapkan, sehingga dapat menghasilkan suatu *average price option*.
6. Minimalkan varians dari *average price option* dengan persamaan (14) untuk memperoleh nilai *average price option* yang lebih cepat menuju konvergen.

2. METODE PENELITIAN

Jenis data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa harga penutupan dari saham PT. Telkom pada Januari 2014 sampai Agustus 2016. Dalam penelitian ini penulis mengambil data yang diperoleh dari <http://www.finance.yahoo.com/> dengan bantuan jasa internet. Langkah-langkah yang digunakan dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengumpulkan data historis dari saham PT.Telkom.
2. Menghitung nilai *return* dari saham PT. Telkom dengan menggunakan persamaan (9).
3. Menghitung volatilitas tahunan harga saham PT. Telkom dengan menggunakan persamaan (12).
4. Mensimulasikan harga opsi saham PT.Telkom dengan Monte Carlo Standar. Terdapat lima langkah utama pada simulasi Monte Carlo antara lain:
 - a. Menetapkan distribusi probabilitas untuk variabel utama
 - b. Menetapkan distribusi kumulatif untuk setiap variabel
 - c. Menentukan interval bilangan acak untuk setiap variabel
 - d. Pembangkit bilangan acak
 - e. Menjalankan simulasi dari serangkaian percobaan
5. Mensimulasikan harga opsi saham PT.Telkom dengan Monte Carlo-Control Variate sebagai berikut:
 - a. Hitung terlebih dahulu nilai dari *stock price* (S_0), *strike price* (K), volatilitas (σ), suku bunga bebas risiko ($r =$ ditetapkan 0.065), jumlah simulasi (N), waktu jatuh tempo (T) dan dividen = 0
 - b. Hitung pergerakan harga saham (S_t) harian PT.Telkom, yang mengikuti gerak Brown geometrik dengan persamaan (8).
 - c. Setelah diperoleh harga saham sampai waktu t , kemudian hitung *payoff* dari *average price option* dengan persamaan (4). Diskontokan *payoff* dengan persamaan (5).
 - d. Hitung rata-rata *payoff* dari *average price option* dari simulasi pertama sampai waktu t dengan persamaan (3).
 - e. Kemudian hitung kembali *payoff* dari *average price option* dengan memasukan rata-rata yang telah diperoleh pada langkah (4) dan *strike price* yang telah ditetapkan, sehingga dapat menghasilkan suatu *average price option*.
 - f. Minimalkan varians dari *average price option* dengan persamaan (14) untuk

memperoleh nilai *average price option* yang lebih cepat menuju konvergen

6. Selanjutnya harga opsi beli tipe Asia yang dihitung dengan Monte Carlo Standar dibandingkan dengan Monte Carlo-Control Variate.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Langkah pertama yang dilakukan adalah menghitung nilai rata-rata *return* dari saham PT.Telkom sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\bar{R} &= \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n R_t \\ &= \frac{1}{683} 0.655227946 \\ &= 0.000959338\end{aligned}$$

Jadi, nilai rata-rata *return* saham PT.Telkom adalah 0.000959338. Selanjutnya menghitung *variance* dan volatilitas tahunan harga saham PT.Telkom yaitu:

$$\begin{aligned}\text{var} &= \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^n (R_t - \bar{R})^2 \\ &= \frac{1}{683-1} \sum_{t=1}^{683} (R_t - \bar{R})^2 \\ &= \frac{1}{682} 0.164861612 \\ &= 0.000241733\end{aligned}$$

Sehingga diperoleh nilai *variance* dari saham PT.Telkom sebesar 0.000241733. Volatilitas tahunan dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{\text{var} \times k} \\ &= \sqrt{0.000241733 \times 265} \\ &= 0.253099053\end{aligned}$$

Jadi, nilai volatilitas tahunan saham PT.Telkom adalah 0.253099053. Setelah mendapatkan nilai rata-rata *return* dan volatilitas tahunan maka berikutnya perhitungan harga opsi menggunakan simulasi Monte Carlo Standar. Langkah pertama yang dilakukan pada simulasi Monte Carlo Standar adalah menetapkan harga pelaksanaan (*strike price*) dan harga saham saat ini, kemudian membangkitkan vektor harga, yaitu

$S = (S_1, S_2, \dots, S_T)$ dimana nilai masing-masing elemen vektor S dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \times \sqrt{t} \text{ bilangan acak}(1,1) \right)} \\ S_2 &= S_0 e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \times \sqrt{t} \text{ bilangan acak}(2,1) \right)} \\ &\vdots \\ S_T &= S_0 e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \times \sqrt{t} \text{ bilangan acak}(T,1) \right)} \end{aligned}$$

Dengan nilai masukan harga saham saat ini (*stock price*), harga pelaksanaan (*strike price*), volatilitas, suku bunga bebas risiko ($r =$ ditetapkan 0.065), jumlah periode amatan, waktu jatuh tempo dan bilangan acak adalah fungsi dalam Matlab yang dipakai untuk membangkitkan bilangan acak yang berdistribusi normal standar. Dengan demikian, terdapat sejumlah barisan bilangan acak yang termuat dalam vektor S yaitu $S = (S_1, S_2, \dots, S_T)$. Setelah semua harga saham dibangkitkan dalam simulasi ke-1 kemudian dihitung rata-rata aritmetika barisan tersebut, yaitu:

$$\bar{S}_1 = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_T}{T}$$

Dengan cara yang sama dilakukan simulasi ke-2 sampai ke- N untuk memperoleh rata-rata harga saham. Setelah diperoleh rata-rata harga saham sampai simulasi ke- N , kemudian harga opsi beli tipe Asia untuk simulasi ke-1 dihitung dengan formula:

$$\begin{aligned} C_T^1 &= e^{-rT} \max(\bar{S}_1 - K, 0) \\ C_T^2 &= e^{-rT} \max(\bar{S}_2 - K, 0) \\ &\vdots \\ C_T^N &= e^{-rT} \max(\bar{S}_N - K, 0) \end{aligned}$$

Dari sejumlah N simulasi maka estimasi harga yang lebih baik diperoleh dengan menghitung rata-rata dari keseluruhan simulasi yaitu:

$$A_T = \frac{C_T^1 + C_T^2 + \dots + C_T^N}{N}$$

Nilai A_T merupakan rata-rata dari seluruh simulasi yang telah dilakukan. *Payoff* dari *average price option* dihitung dengan memasukan nilai A_T dan *strike price* untuk menghasilkan suatu harga opsi beli tipe Asia PT.Telkom.

Simulasi Monte Carlo-*Control Variate* hampir sama dengan simulasi Monte Carlo Standar. Perbedaannya terletak pada pengurangan varians pada Monte Carlo-*Control Variate* yang menyebabkan harga opsi konvergen lebih cepat daripada Monte Carlo Standar. Misalkan \hat{C} adalah penaksir harga opsi beli tipe Asia, yaitu $C = E(Y)$ dengan $Y = \max(A_T - K, 0)$ adalah luaran dari simulasi seperti pada Monte Carlo Standar. Misalkan juga Z adalah luaran dari simulasi Monte Carlo Standar, sehingga dapat dikonstruksikan sejumlah penaksir takbias dari C yaitu:

- $\hat{C} = Y$, yaitu penaksir harga opsi menggunakan Monte Carlo-Standar
- $\hat{C}_u = Y + c(Z - E[Z])$ adalah penaksir harga opsi beli tipe Asia menggunakan Monte Carlo-*Control Variate*

Dimana Y adalah bilangan riil. Dari keterangan a dan b dapat disimpulkan bahwa \hat{C}_u juga penaksir takbias dari C atau $E[\hat{C}_u] = C$. Dalam hal ini varians dari \hat{C}_u haruslah lebih kecil dari varians \hat{C} . Untuk meyakinkan hal ini maka $Var(\hat{C}_u)$ dihitung menggunakan:

$Var(\hat{C}_u) = Var(Y) + c^2 Var(Z) + 2c Cov(Y, Z)$
Persamaan diatas dapat dipandang sebagai persamaan kuadrat dalam c , sehingga untuk mendapatkan nilai $Var(\hat{C}_u)$ yang terkecil maka dapat dilakukan dengan mencari turunan pertama $Var(\hat{C}_u)$ terhadap c , kemudian samakan dengan 0 seperti berikut:

$$\begin{aligned} \frac{d Var(\hat{C}_u)}{dc} &= 2c Var(Z) + 2Cov(Y, Z) = 0 \\ c &= \frac{-Cov(Y, Z)}{Var(Z)} \end{aligned}$$

Jadi untuk mendapatkan nilai $Var(\hat{C}_u)$ yang minimum maka haruslah dipilih nilai $c^* = \frac{-Cov(Y, Z)}{Var(Z)}$. Substitusikan nilai c^* ke dalam persamaan (1) sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} Var(\hat{C}_u) &= Var(Y) - \frac{Cov(Y, Z)^2}{Var(Z)} \\ &= Var(\hat{C}) - \frac{Cov(Y, Z)^2}{Var(Z)} \end{aligned}$$

dengan

$$\text{Cov}(Y, Z) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (Y_i - \hat{Y}_M)(Z_i - E[Z])$$

dan

$$\text{Var}(Z) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (Z_i - E[Z])^2$$

Jadi untuk mendapatkan pengurangan nilai varians maka $\text{Cov}(Y, Z) \neq 0$. Dalam hal ini Z adalah variabel pengontrol dari Y . Jadi dalam melakukan sejumlah N simulasi maka nilai \hat{C}_u dihitung menggunakan rumus:

$$\hat{C}_u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i + c^*(Z_i - E[Z]))$$

Dalam menentukan harga opsi, data yang digunakan sesuai dengan data historis saham PT.Telkom yang telah diolah adalah sebagai berikut:

Stock price (S_0)	: Rp. 4.140,00
Strike price (K)	: Rp. 4.100,00
Suku bunga bebas risiko (r)	: 0.065
Waktu jatuh tempo (T)	: 66 hari
Volatilitas	: 0.253099053
Banyak iterasi	: 100

Setelah menentukan nilai masukan seperti di atas, maka pergerakan harga saham hari pertama dihitung dengan simulasi pertama seperti berikut:

$$\begin{aligned} S_1 &= S_0 e^{\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} \text{bilangan acak}(1,1) \right)} \\ &= 4.100 e^{((0.032970435)66 + 2.056186427 \times 0.0040)} \\ &= 4.100 e^{(2.17604871 + 0.008224745707)} \\ &= 4.100 e^{(2.184273456)} \\ &= 36.4251 \end{aligned}$$

Perhitungan harga saham melibatkan bilangan acak maka menggunakan bantuan program Matlab. Setelah diperoleh harga saham untuk hari pertama sebesar 36.4251 kemudian dihitung harga saham untuk hari kedua dengan cara yang sama sampai dengan harga saham terakhir PT.Telkom. Setelah diperoleh keseluruhan harga saham maka rata-rata harga saham yang telah diperoleh dihitung untuk

simulasi pertama. Harga opsi beli tipe Asia dengan rata-rata harga saham pada simulasi pertama dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} C_T^1 &= e^{-rT} \max(\bar{S}_1 - K, 0) \\ &= 0.9839 \max(41.9787 - 4.100, 0) \\ &= 37.2688 \end{aligned}$$

Simulasi yang kedua sampai dengan terakhir dihitung dengan cara yang sama, seperti pada simulasi pertama. Keseluruhan simulasi yang telah dilakukan dirata-ratakan. Kemudian harga opsi beli tipe Asia dihitung dengan memasukan nilai rata-rata yang diperoleh dan *strike price* yang telah ditetapkan sehingga diperoleh suatu harga opsi. Untuk menemukan harga opsi yang lebih cepat menuju konvergen maka dilakukan pengurangan varians menggunakan Monte Carlo-Control Variate. Pengurangan varians dapat dilakukan dengan memberikan variabel baru yaitu c^* pada penaksir harga opsi beli tipe Asia menggunakan Monte Carlo-Control Variate sebagai berikut:

$$\hat{C}_u = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (Y_i + c^*(Z_i - E[Z]))$$

Dengan Y_i diperoleh dari harga opsi beli yang dihitung dari Monte Carlo Standar dengan rata-rata aritmetik sedangkan Z_i merupakan harga opsi beli dengan rata-rata geometrik yang dikurangi dengan $E[Z]$ yang diperoleh dari perhitungan opsi Asia dengan memasukan kembali *stock price*, *strike price*, waktu jatuh tempo, volatilitas, suku bunga bebas risiko, bilangan acak dan sejumlah simulasi N . Perhitungan melibatkan bilangan acak maka menggunakan bantuan program Matlab, sehingga diperoleh nilai \hat{C}_u untuk simulasi pertama pada Monte Carlo-Control Variate sebesar 94.5018. *Standard error* dan harga opsi yang lebih cepat menuju konvergen dihasilkan pada Tabel 1.

Tabel 1. Harga Opsi dengan Monte Carlo Standar dan Monte Carlo-Control Variate dengan iterasi yang berbeda

N	Monte Carlo Standar		Monte Carlo-Control Variate	
	Harga Opsi	Standard Error	Harga Opsi	Standard Error
100	155.89	19.10	152.90	0.53
200	169.14	16.21	152.08	0.41
300	160.93	12.88	151.83	0.48
400	155.90	11.04	152.14	0.31
500	177.71	9.46	152.50	0.28
600	153.29	7.99	152.71	0.22
700	160.25	7.85	152.41	0.23
800	156.91	6.93	152.66	0.19
900	161.52	6.83	152.34	0.21
1000	158.83	6.62	153.02	0.17
2000	158.53	4.81	152.59	0.14
3000	160.32	3.90	152.47	0.11
4000	160.09	3.30	152.58	0.09
5000	162.77	3.04	152.54	0.08
6000	158.81	2.72	152.59	0.07
7000	157.58	2.53	152.54	0.07
8000	157.81	2.34	152.59	0.05
9000	164.68	2.26	152.53	0.06
10000	162.23	2.12	152.60	0.06
100000	161.75	0.67	152.55	0.01
1000000	160.78	0.21		
1000000	160.92	0.06		

Tabel 1 menunjukkan bahwa jumlah simulasi pada metode yang berbeda menghasilkan *standard error* dan harga opsi yang berbeda pula. Simulasi Monte Carlo Standar antara simulasi 100 sampai dengan 10.000.000 memiliki kisaran harga opsi yang berubah-ubah. Pada simulasi Monte Carlo Standar semakin besar jumlah simulasi, *standard error* yang dihasilkan semakin menurun dan akhirnya mendekati nol. Simulasi Monte Carlo Standar berhenti pada simulasi ke-10.000.000 karena *standard error*-nya sudah mendekati nol yaitu 0.06 dan harga opsi dianggap konvergen pada Rp.160.00.

Pada simulasi Monte Carlo-Control Variate dari awal simulasi antara simulasi 100 sampai

dengan 100.000 memiliki kisaran harga opsi yang tidak jauh berbeda. *Standard error* yang dihasilkan pun dari awal simulasi sudah mendekati nol. Simulasi Monte Carlo-Control Variate berhenti pada simulasi ke-100.000 karena *standard error*-nya sudah mendekati nol yaitu 0.01 dan harga opsi yang dianggap konvergen pada Rp.152.00. Hal ini menunjukkan bahwa Monte Carlo-Control Variate mampu mengurangi varians dari awal simulasi dengan *standard error* yang sudah mendekati nol dan harga opsi yang lebih cepat menuju konvergen. Sedangkan Monte Carlo Standar membutuhkan banyak simulasi agar *standard error*-nya mendekati nol dan menghasilkan harga opsi yang konvergen.

Perbedaan harga opsi yang diperoleh dari kedua simulasi menunjukkan bahwa metode Monte Carlo-Control Variate dapat mengurangi varians lebih baik daripada Monte Carlo Standar. Pengurangan varians pada simulasi Monte Carlo-Control Variate dapat menghasilkan harga opsi yang lebih cepat menuju konvergen dari simulasi Monte Carlo Standar.

4. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan pada penelitian ini diambil kesimpulan bahwa simulasi Monte Carlo-Control Variate dapat mengurangi varians dari Monte Carlo Standar. Pengurangan varians ini menyebabkan Monte Carlo-Control Variate dari awal simulasi *standard error*-nya sudah mendekati nol dengan harga opsi yang lebih cepat menuju konvergen dari simulasi Monte Carlo Standar. Hal ini dapat dilihat dari perbedaan *standard error* dan harga opsi yang diperoleh. Jika Monte Carlo-Control Variate menghasilkan *standard error* sebesar 0.01 dan harga opsi yang konvergen pada Rp.152.00. Sedangkan Monte Carlo Standar menghasilkan *standard error* sebesar 0.06 dan harga opsi yang konvergen pada Rp.160.00.

Sedangkan saran yang dapat diberikan pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk pengembangan penelitian selanjutnya, diharapkan menentukan harga opsi menggunakan multiple *control variates*.
2. Penentuan harga opsi akan memberikan hasil yang lebih baik dengan memasukan faktor-faktor lain yang memengaruhi harga opsi seperti pembagian dividen serta pembayaran komisi dan pajak.

DAFTAR PUSTAKA

- Bodie, Kane dan Marcus. 2006. *Investasi*. Buku 2 Edisi 6. Jakarta: Salemba Empat.
- Cresswell, John W. 2008. *Educational Research*. Third Edition. New Jersey: Pearson Education, Inc.
- Glasseman, Paul. 2004. *Monte Carlo Method in Financial Engineering*. New York: Springer.
- Linetsky, Vadim. 2004. Spectral Expansions for Asian (Average Price) Options. *Operation Research*, vol. 52 (6), 856-867.
- Rahmi, E. 2011. Penentuan Harga Opsi Asia dengan Model Binomial yang Dimodifikasi. *Tesis*. Program Magister, Institut Teknologi Bandung.
- Tandelilin, Eduardus. 2001. *Analisis Investasi dan Manajemen Portofolio*. Edisi Pertama. BPFE. Yogyakarta,