

Copyright © 2016 by Academic Publishing House *Researcher*

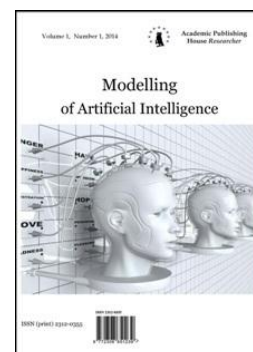
Published in the Russian Federation
Modeling of Artificial Intelligence
Has been issued since 2014.

ISSN: 2312-0355

E-ISSN: 2413-7200

Vol. 11, Is. 3, pp. 158-165, 2016

DOI: 10.13187/mai.2016.11.158

www.ejournal11.com

UDC 330.43

Towards the Issue of Correctness of Technical Efficiency Estimates based on the Stochastic Frontier Model *

Victoria A. Rudenko ^{a, *}, Sergey A. Aivazyan ^a, Mikhail Y. Afanasyev ^a

^aCEMI RAS, Russian Federation

Abstract

The objective of the research is to expand the application area for the methodology of estimation of a production technical efficiency based on the stochastic frontier model. Some preliminary results show that the use of a precondition regarding the independence of random components of an error can lead to the estimates of technical efficiency that are (ranked) almost contrary to the true values under the condition that the true correlation coefficient for the components is close to 1.

In this article we consider a weaker degree of dependence between the random components of an error. In this situation correlation coefficient between the estimates obtained under assumption of independent random components (e.g. by using standard software) and the estimates obtained under assumption of dependent components increases from -1 to 1 . At the same time the estimates of technical efficiency provided by using of normal copula model are directly correlated with the true values. Thus the theory of copula functions can be adequately applied for the purpose of estimation of a production technical efficiency. The use of standard statistical software requires a verification of an assumption regarding independence of random components of an error. The absence of such an argumentation can lead to significant deviations between the estimated technical efficiencies and their true values.

It is also demonstrated that a confirmation of the hypothesis regarding the absence of inefficiency during the model's parameters estimation then can be an evidence of a weak correlation between the true values of technical efficiencies and the estimates of technical efficiency obtained both by using standard software and by using theory of copula functions.

Keywords: technical efficiency, dependence of random values, copulas, stochastic production function.

1. Введение

В работе будет исследован класс моделей трехфакторной производственной функции компании, имеющих вид

* This research was supported by RFBR grant № 16-06-00361 A

* Corresponding author

E-mail addresses: vika57vika@yandex.ru (V.A. Rudenko); aivazian@cemi.rssi.ru (S.A. Aivazyan); miafan@cemi.rssi.ru (M.Y. Afanasyev)

$$R_i = \beta_0 \cdot (x_i^1)^{\beta_1} \cdot (x_i^2)^{\beta_2} \cdot (x_i^3)^{\beta_3} \cdot e^{V_i - U_i},$$

где R_i - объем производства i -ой компании, $i = 1, \dots, n$; x_i^1, \dots, x_i^3 - объемы факторов производства i -ой компании (труд L, физический капитал K, интеллектуальный капитал I (см. Rudenko, 2013)); n - число компаний.

Пусть $y_i = \ln R_i$, $\varepsilon_i = V_i - U_i$,

$$y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln x_i^1 + \dots + \beta_3 \ln x_i^3 + \varepsilon_i, \quad (*)$$

$V_i \sim N(0; \sigma_V^2)$, $U_i \sim N^+(\mu; \sigma_U^2)$, причем, случайные величины V_i и U_i могут быть статистически зависимы.

В соответствии с концепцией стохастической границы, мерой технической эффективности производства является величина $TE_i = E(\exp\{-U_i\} | \varepsilon_i)$ (Battese, Coelli, 1988).

2. Обсуждение

В работе (Айвазян и др., 2014) был предложен способ проверки статистической гипотезы о независимости случайных компонент V_i и U_i (точнее о равенстве нулю их коэффициента корреляции). Для его обоснования были смоделированы зависимые величины $U_i \sim N^+(\mu; \sigma_U^2)$ и $V_i \sim N(0; \sigma_V^2)$ с коэффициентом корреляции Спирмена 0.94. На основе полученных величин, наборов реальных данных (x_i^1, x_i^2, x_i^3) и некоторых численных значений $(\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \sigma_V^2, \mu, \sigma_U^2)$ были построены y_i по формуле:

$$y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 x_i^1 + \beta_2 x_i^2 + \beta_3 x_i^3 + V_i - U_i.$$

Построение оценок в модели (*) проводилось двумя способами:

- в предположении независимости компонент ошибки*,
- в предположении возможной зависимости с использованием аппарата копул[†].

Для каждого из указанных способов рассчитывались оценки технической эффективности TE_1 и TE_r соответственно. В таблице 1 приведены коэффициенты корреляции полученных оценок с истинными значениями технической эффективности e^{-U} , а также их рангов.

Таблица 1. Коэффициенты корреляции технических эффективностей. Коэффициенты корреляции рангов технических эффективностей.

	TE_1	TE_r	e^{-U}		$rk(TE_1)$	$rk(TE_r)$	$rk(e^{-U})$
TE_1	1			$rk(TE_1)$	1		
TE_r	-0.9930	1		$rk(TE_r)$	-0.9985	1	
e^{-U}	-0.9179	0.9283	1	$rk(e^{-U})$	-0.9874	0.9885	1

В соответствии с приведенными результатами был сделан вывод о необходимости учета возможной зависимости компонент ошибки при решении задач оценивания технической эффективности или ранжирования объектов по уровню эффективности.

* Полученные модели в соответствии с разработанной схемой спецификации, приведенной в (Айвазян и др., 2012; Aivazyan et al., 2013), будут обозначаться M_0 (модель линейной регрессии), M_1 (модель стохастической производственной функции с компонентой $U_i \sim N^+(0, \sigma_U^2)$) и M_2 (модель стохастической производственной функции с компонентой $U_i \sim N^+(\mu, \sigma_U^2)$).

[†] Подробное описание копула-функций можно найти в (Айвазян, Фантаццини, 2014; Благовещенский, 2012)

Выбор высокого коэффициента корреляции при моделировании зависимых компонент V_i и U_i оставляет открытым вопрос о том, будет ли наблюдаться столь же значительное влияние зависимости компонент на оценки эффективности в случаях, когда их истинный коэффициент корреляции меньше 0.94.

Для ответа на этот вопрос следует смоделировать несколько наборов зависимых случайных величин с различными коэффициентами корреляции и провести анализ полученных результатов. В данном исследовании ограничимся использованием только нормальной копулы, так как его целью не является выбор наилучшей модели. Введем дополнительные обозначения:

$\rho = \rho(V_i, U_i)^*$ - истинное значение коэффициента корреляции Спирмена между компонентами ошибки, выбранное при моделировании,

$\hat{\rho} = \hat{\rho}(V_i, U_i)$ - оценка коэффициента корреляции Спирмена между компонентами ошибки,

$\hat{s} = \hat{s}(TE_i, e^{-U_i})$ - оценка коэффициента корреляции между полученными при построении модели техническими эффективностями TE_i и истинными значениями эффективности e^{-U_i} .

3. Результаты

На основе данных, которые были использованы и обоснованы в (Айвазян и др., 2014), проведем дополнительное моделирование случайных величин V_i и U_i с коэффициентами корреляции, близкими к $\rho = 0.8$, $\rho = 0.4$ и $\rho = 0.1$. Для каждого случая приведем оценки, полученные в предположении независимости компонент и в предположении возможной зависимости с использованием нормальной копулы.

1) Подробные **результаты, полученные при моделировании с $\rho = 0.94$** можно найти в работе (Айвазян и др., 2014).

2) Аналогичные **процедуры моделирования и оценивания были выполнены для значения ρ , близкого к 0.8.**

Были выбраны следующие параметры:

$$\beta_0 = 2.44, \quad \beta_1 = 0.69, \quad \beta_2 = 0.21, \quad \beta_3 = 0.1, \quad \sigma_V = 0.4, \quad \mu = 0, \quad \sigma_U = 0.2, \quad \rho = 0.79.$$

Истинные значения технических эффективностей e^{-U_i} меняются в диапазоне от 0.58 до 1.00.

Оценки, полученные по двум рассматриваемым моделям (в предположении независимости и с учетом ее возможного наличия), приведены во втором и третьем столбцах [таблицы 2](#) соответственно. В предположении независимости компонент ошибки отвергается гипотеза об отсутствии неэффективности.

* Выбор коэффициента корреляции Спирмена, а не Пирсона обусловлен тем, что именно он широко используется (см. [Smith, 2008](#); [Amsler et al., 2009](#); [Lai, Huang, 2013](#)) для интерпретации и сравнения результатов, полученных с использованием копула-функций.

Таблица 2. Оценки параметров моделей при $\rho = 0.79$.

	M_1	M_r
<i>Оценки параметров факторов производства</i>		
$\ln K$	0.644	0.656
$\ln L$	0.229	0.222
$\ln I$	0.172	0.166
$const$	1.97	1.99
<i>Оценки параметров компонент ошибки</i>		
$\hat{\mu}$	0	0.082
$\hat{\sigma}_V$	0.196	0.528
$\hat{\sigma}_U$	0.422	0.375
$\hat{\rho}$	0	0.919
P -значение при проверке гипотезы об отсутствии неэффективности	0.012	—
Диапазон изменения эффективностей	(0.33; 0.95)	(0.45; 0.99)
$\hat{s}(TE, e^{-U})$	-0.64	0.66
Число наблюдений	80	80
Логарифм функции правдоподобия	-20.810	-20.493

Аналогично предыдущему случаю оценки технических эффективностей, полученные с использованием нормальной копулы, являются в достаточной степени согласованными с истинными значениями, в отличие от оценок, рассчитанных в предположении независимости компонент ошибки. Модель M_r является также «более правдоподобной», чем M_1 , хотя отличие в логарифмах функций правдоподобия не очень значительное*.

3) Результаты, полученные при моделировании с коэффициентом корреляции ρ , близким к 0.4.

Были выбраны параметры:

$$\beta_0 = 2.44, \quad \beta_1 = 0.69, \quad \beta_2 = 0.21, \quad \beta_3 = 0.1, \quad \sigma_V = 0.4, \quad \mu = 0, \quad \sigma_U = 0.2, \quad \rho = 0.39.$$

Истинные значения технических эффективностей e^{-U_i} меняются в диапазоне от 0.60 до 0.99. Оценки, полученные в предположении независимости компонент ошибки согласно разработанной в (Айвазян и др., 2012) схеме спецификации, приведены во втором столбце Таблицы 3 (модель M_0). Гипотеза об отсутствии неэффективности в модели M_1 (третий столбец) принимается, итоговой моделью в предположении независимости V_i и U_i признается классическая модель линейной регрессии M_0 . Однако так как существующее программное обеспечение позволяет получить значения технических эффективностей и их рангов, а также сравнить их с истинными значениями, в данном случае целесообразно рассмотреть оценки, полученные в модели M_1 .

В четвертом столбце приведены оценки, полученные при использовании нормальной копулы.

* Незначительное отличие в логарифмах функций правдоподобия может привести к тому, что при выборе между этими моделями, лучшей будет признана M_1 , содержащая меньшее число параметров. С целью поиска наилучшей модели следует также рассмотреть другие виды копул.

Таблица 3. Оценки параметров моделей при $\rho = 0.39$.

	M_0	M_1	M_r
<i>Оценки параметров факторов производства</i>			
$\ln K$	0.690	0.690	0.694
$\ln L$	0.216	0.216	0.212
$\ln I$	0.145	0.145	0.144
$const$	1.402	1.427	1.491
<i>Оценки параметров компонент ошибки</i>			
$\hat{\mu}$	0	0	0.062
$\hat{\sigma}_V$	0.356	0.354	0.365
$\hat{\sigma}_U$	—	0.023	0.022
$\hat{\rho}$	—	0	0.472
P -значение при проверке гипотезы об отсутствии неэффективности	—	1.00	—
Диапазон изменения эффективностей	—	(0.981; 0.983)	(0.912; 0.965)
$\hat{s}(T\hat{E}, e^{-U})$	—	-0.15	0.13
Число наблюдений	80	80	80
Логарифм функции правдоподобия	-30.424	-30.424	-29.789

Проделанные в процессе работы вычисления с различными уровнями зависимости компонент ошибки позволяют судить о том, что оценки технической эффективности, полученные с использованием аппарата копула-функций, являются положительно коррелированными с истинными значениями эффективностей. Однако уровень корреляции $s(T\hat{E}, e^{-U})$ зависит от истинного значения $\rho(V_i, U_i)$. Кроме того, как показывают проделанные вычисления, увеличение параметра зависимости в копуле приводит к расширению диапазона изменения значений технических эффективностей, сохраняя их ранги.

4) Моделирование с коэффициентом корреляции ρ , близким к 0.1.

Были выбраны параметры:

$$\beta_0 = 2.44, \quad \beta_1 = 0.69, \quad \beta_2 = 0.21, \quad \beta_3 = 0.1, \quad \sigma_V = 0.5, \quad \mu = 0, \quad \sigma_U = 0.4, \quad \rho = 0.16.$$

Истинные значения эффективностей меняются в диапазоне от 0.66 до 1.00.

В [таблице 4](#) приведены оценки, полученные в предположении независимости компонент ошибки (второй столбец, модель M_1) и с использованием нормальной копулы (третий столбец, модель M_r). Гипотеза об отсутствии неэффективности в предположении независимости V_i и U_i отвергается.

Таблица 4. Оценки параметров моделей при $\rho = 0.16$.

	M_1	M_r
<i>Оценки параметров факторов производства</i>		
$\ln K$	0.806	0.802
$\ln L$	0.123	0.125
$\ln I$	0.137	0.140
<i>const</i>	1.77	1.78
<i>Оценки параметров компонент ошибки</i>		
$\hat{\mu}$	0	0.029
$\hat{\sigma}_V$	0.275	0.267
$\hat{\sigma}_U$	0.644	0.646
$\hat{\rho}$	0	-0.011
P -значение при проверке гипотезы об отсутствии неэффективности	0.052	—
Диапазон изменения эффективностей $\hat{s}(TE, e^{-U})$	(0.23; 0.89)	(0.23; 0.89)
	0.36	0.36
Число наблюдений	80	80
Логарифм функции правдоподобия	-52.111	-52.052

Исходя из приведенной таблицы и проделанных в процессе работы вычислений можно полагать, что в случае, когда истинные компоненты V_i и U_i слабо коррелированы, разработанная в (Айвазян и др., 2012) методика позволяет несколько увеличить значение логарифма функции правдоподобия за счет введения дополнительного параметра зависимости в копуле, практически не изменяя оценки параметров модели, полученные с помощью существующего программного обеспечения в пакете Stata 10.0. При этом важно отметить, что в этом случае, в отличие от всех рассмотренных выше, оценки технических эффективностей, полученные с использованием копулы и без него, являются одинаково согласованными с истинными значениями эффективностей. Кроме того, эта согласованность **сохраняется** даже при поиске оценок максимума правдоподобия в окрестности достаточно больших фиксированных значений ρ .

4. Заключение

1. При решении задачи поиска оценок технической эффективности в случае отсутствия обоснования справедливости предпосылки о независимости случайных составляющих ошибки необходимо учитывать их возможную зависимость. Для ее учета можно использовать аппарат копула-функций.

2. В случае наличия каких-либо теоретических или статистических фактов, свидетельствующих о независимости или о слабой коррелированности компонент ошибки в модели стохастической производственной функции для некоторого набора данных, можно использовать классическое программное обеспечение (такое, как Stata, Frontier, R и др.) как для получения оценок параметров модели, так и для решения задачи ранжирования объектов по уровню эффективности.

3. Использование аппарата копула-функций с целью учета возможной зависимости компонент ошибки позволяет расширить диапазон значений оценок технической эффективности с помощью изменения параметра копулы, сохраняя при этом их ранги.

4. Для получения обоснованных оценок технической эффективности существует необходимость в разработке программного обеспечения, позволяющего находить оценки максимума правдоподобия с использованием различных видов копула-функций.

Литература

Айвазян и др., 2012 – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А. (2012). Некоторые вопросы спецификации трехфакторных моделей производственного потенциала компании, учитывающих интеллектуальный капитал. // *Прикладная эконометрика*, выпуск 27 (3), с. 36–69.

Айвазян и др., 2014 – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А. (2014). Исследование зависимости случайных составляющих остатков в модели стохастической границы. // *Прикладная эконометрика*, выпуск 34 (2), с. 3–18.

Айвазян и др., 2013 – Айвазян С.А., Афанасьев М.Ю., Руденко В.А. (2013). Проблемы моделирования производственного потенциала компании с учетом интеллектуального капитала. // *European researcher*, №48 (5-1), p. 1220-1225.

Айвазян, Фантаццини, 2014 – Айвазян С.А., Фантаццини Д. (2014). *Методы эконометрики*. М.: Магистр

Благовещенский, 2012 – Благовещенский Ю.Н. (2012). Основные элементы теории копул. // *Прикладная эконометрика*, выпуск 26 (2), с. 113-130.

Руденко, 2013 – Руденко В.А. (2013). Эмпирический анализ производственного потенциала американских и российских компаний, работающих в наукоемких отраслях. // *European researcher*, №48 (5-1), p. 1254-1258.

Amsler et al., 2009 – Amsler, Ch., Prokhorov, A., Schmidt, P. (2009). Using copulas to model time dependence in stochastic frontier models. // *Econometric Reviews*, № 33 (5-6), Special Issue in Honor of Les Godfrey.

Battese, Coelli, 1988 – Battese G., T. Coelli. (1988). Prediction of Firm-Level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data. // *Journal of Econometrics*, № 38, p. 387–399.

Lai, Huang, 2013 – Lai, H.P., Huang, C. (2013). Maximum likelihood estimation of seemingly unrelated stochastic frontier regressions. // *Journal of Productivity Analysis*, № 40 (1), с. 1-14.

Smith, 2008 – Smith, M.D. (2008). Stochastic frontier models with dependent error components. // *The Econometrics Journal*, № 11 (1), p. 172–192.

References

Aivasian S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A. (2013). Problems of a company's production potential modeling with consideration of intellectual capital. *European researcher*, №48 (5-1), pp. 1220-1225.

Aivasian S.A., Fantazzini D. (2014). *Metody ekonometriki* / M.: Magistr.

Aivazyan S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A. (2012). Some specification aspects for three-factor models of a company's production potential taking into account intellectual capital. *Applied econometrics*, vol. 27 (3), pp. 36–69.

Aivazyan S.A., Afanasiev M.Y., Rudenko V.A. (2014). Analysis of dependence between the random components of a stochastic production function for the purpose of technical efficiency estimation. *Applied econometrics*, vol. 34 (2), pp. 3–18.

Amsler, Ch., Prokhorov, A., Schmidt, P. (2009). Using copulas to model time dependence in stochastic frontier models. *Econometric Reviews*, № 33 (5-6), Special Issue in Honor of Les Godfrey.

Battese G., T. Coelli. (1988). Prediction of Firm-Level Technical Efficiencies with a Generalized Frontier Production Function and Panel Data *Journal of Econometrics*, № 38, pp. 387–399.

Blagoveschensky Y.N. (2012). Basics of copula's theory. *Applied econometrics*, vol. 26(2), pp. 113-130.

Lai, H.P., Huang, C. (2013). Maximum likelihood estimation of seemingly unrelated stochastic frontier regressions. *Journal of Productivity Analysis*, № 40 (1), pp. 1-14.

Rudenko V.A. (2013). Empirical analysis of the production potential of U.S. and Russian companies operating in knowledge-intensive industries. *European researcher*, №48 (5-1), pp. 1254-1258.

Smith, M.D. (2008). Stochastic frontier models with dependent error components. *The Econometrics Journal*, № 11 (1), pp. 172–192.

УДК 330.43

К вопросу о корректности оценок технической эффективности на основе концепции стохастической границыВиктория Алексеевна Руденко ^{a, *} Сергей Арутюнович Айвазян ^a,
Михаил Юрьевич Афанасьев ^a^a ЦЭМИ РАН, Российская Федерация

Аннотация. Целью работы является расширение сферы корректного применения методологии оценки технической эффективности производства на основе концепции стохастической границы. Предварительные исследования (Айвазян и др., 2014) показали, что использование предпосылки о независимости случайных составляющих остатков модели в условиях, когда коэффициент их корреляции близок к единице, может приводить к оценкам технической эффективности, практически противоположным истинным значениям.

В данной работе показано, что уменьшение степени зависимости случайных составляющих модели приводит к тому, что коэффициент корреляции оценок, полученных с помощью стандартного программного обеспечения в условиях применения предпосылки о независимости случайных составляющих, и оценок, полученных с учетом зависимости, увеличивается от минус единицы до единицы. В то же время, оценки технической эффективности, полученные с помощью нормальной копулы, положительно коррелированы с истинными значениями технической эффективности. Таким образом, аппарат копула функций является адекватным инструментом оценки технической эффективности производства. Использование стандартного программного обеспечения для получения оценок технической эффективности, требует обоснования предпосылки о независимости случайных составляющих остатков и может приводить к существенным ошибкам в случае его отсутствия.

Также показано, что подтверждение гипотезы об отсутствии неэффективности при оценке параметров модели, может свидетельствовать о слабой корреляции истинных значений технической эффективности как с оценками, полученными с помощью стандартного программного обеспечения, так и с оценками, полученными с помощью копулы.

Ключевые слова: техническая эффективность, зависимость случайных величин, копула-функции, стохастическая производственная функция.

* Корреспондирующий автор

Адреса электронной почты: vika57vika@yandex.ru (В.А. Руденко);
aivazian@cemi.rssi.ru (С.А. Айвазян); miafan@cemi.rssi.ru (М.Ю. Афанасьев)