

УДК 004.94

© Карвацький А.Я.¹, Педченко А.Ю.²**РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНОЇ НЕСТАЦІОНАРНОЇ ЗАДАЧІ ТЕПЛО-ЕЛЕКТРОПРОВІДНОСТІ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ**

Наведено числову методику й ефективний алгоритм розв'язання нелінійних нестационарних задач тепло-електропровідності методом скінченних елементів. На базі програмного забезпечення Mathcad розроблено авторський програмний код для розв'язання поставленої задачі, за результатами виконання якого проведено порівняльний аналіз з даними точних аналітичних розв'язків та з результатами числових розв'язків, отриманими за допомогою програмних продуктів Matlab.

Ключові слова: моделювання теплоелектричних процесів, метод скінченних елементів, метод Гальоркіна, апроксимація, Mathcad, лінеаризація.

Карвацький А.Я., Педченко А.Ю. Решение нелинейной нестационарной задачи тепло-электропроводности методом конечных элементов. Приведена численная методика и эффективный алгоритм решения нелинейных нестационарных задач тепло-электропроводности методом конечных элементов. На базе программного обеспечения Mathcad разработан авторский программный код для решения поставленной задачи, по результатам выполнения которого проведен сравнительный анализ с данными точных аналитических решений и результатам численных решений, полученными с помощью программных продуктов Matlab.

Ключевые слова: моделирование теплоэлектрических процессов, метод конечных элементов, метод Галеркина, аппроксимация, Mathcad, линейаризация.

A.Ya. Karvatskii, A.Yu. Pedchenko. Solving nonlinear nonstationary problem of heat-conductivity by finite element method. Methodology and effective solving algorithm of non-linear dynamic problems of thermal and electric conductivity with significant temperature dependence of thermal and physical properties are given on the basis of finite element method (FEM) and Newton linearization method. Discrete equations system FEM was obtained with the use of Galerkin method, where the main function is the finite element form function. The methodology based on successive solving problems of thermal and electrical conductivity has been examined in the work in order to minimize the requirements for calculating resources (RAM. in particular). Having used Mathcad software original programming code was developed to solve the given problem. After investigation of the received results, comparative analyses of accurate solution data and results of numerical solutions, obtained with the use of Matlab programming products, was held. The geometry of one fourth part of the finite sized cylinder was used to test the given numerical model. The discretization of the calculation part was fulfilled using the open programming software for automated Gmsh nets with tetrahedral units, while ParaView, which is an open programming code as well, was used to visualize the calculation results. It was found out that the maximum value violation of potential and temperature determination doesn't exceed 0,2-0,83% in the given work according to the problem conditions.

Keywords: modelling of thermoelectric processes, finite elements method, Galerkin method, approximation, Mathcad, linearization.

Постановка проблеми. Дослідження динаміки теплоелектричних процесів відіграє важливу роль у задачах проектування більшості сучасних технічних об'єктів, оскільки їх надійність та ефективність функціонування в значній мірі залежить від правильності визначення електричних та температурних режимів експлуатації. Для розрахунків складних теплоелектричних технічних систем набули особливого поширення методи із застосуванням потужної об-

¹ д-р техн. наук, професор, НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, anton@rst.kpi.ua

² аспірант, НТУУ «Київський політехнічний інститут», м. Київ, anatolek@ukr.net

числовальної техніки, що використовують спеціальне програмне забезпечення. Такий спосіб для розв'язання поставленої задачі є найбільш раціональним, оскільки дозволяє заощадити матеріальні та часові ресурси. Сучасні програмні продукти для проведення інженерних розрахунків базуються на різних числових методах і алгоритмах розв'язання диференціальних рівнянь. Тому розробка раціональних методик та алгоритмів числового розв'язання нестационарних задач тепло-електропровідності зі значною температурною залежністю теплофізичних властивостей є надзвичайно важливою та актуальною для проектування сучасних промислових об'єктів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Питанню розробки методики та ефективного алгоритму розв'язання задач тепло-електропровідності присвячено ряд вітчизняних та зарубіжних робіт [1-4]. В даних роботах наведено результати розв'язання числових задач засобами комп'ютерного інжинірингу із застосуванням методу скінченних елементів, скінченних об'ємів, скінченних різниць та ін.

Так, у роботі [5] виконано комп'ютерне моделювання вісесиметричної нестационарної задачі тепло-електропровідності силової електричної системи із температурною залежністю матеріалів. Числові розрахунки виконано із застосуванням програмного пакету Comsol, використовуючи дискретизацію вихідної області на скінченні елементи. За отриманими даними приведено результати розподілу електричного та температурного полів у силовому кабелі з полімерною ізоляцією. Аналогічні дані для силової електричної системи отримано в [6], але з використанням числового методу скінченних різниць.

У роботі [7] приведено числове розв'язання нестационарної тепло-електричної задачі математичної моделі електродугового електрода, який складається з декількох матеріалів. Внутрішнє джерело теплоти утворюється за рахунок джоулевого нагрівання. Математична модель представлена системою нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Використано неявний метод дискретизації за часом і стандартний метод скінченних елементів для дискретизації розрахункової області.

Аналіз досліджень та публікацій показує, що в розглянутих роботах наведено лише постановку тепло-електричної задачі, а опис числової методики та алгоритму її розв'язання або відсутній взагалі, або привидиться частково.

Ціль статті – розробка ефективного алгоритму та програмного коду для розв'язання нестационарної задачі теплопровідності з температурною залежністю теплофізичних властивостей.

Виклад основного матеріалу. Систему рівнянь зв'язаної нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності ізотропного середовища можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial \tau} = \nabla \cdot [\lambda(T) \nabla T(\mathbf{x})] + \chi(T) |\nabla U|^2 + q_v(T), \tau > 0; \mathbf{x} \in \Omega, \\ \nabla \cdot [\chi(T) \nabla U] = 0, \end{cases} \quad (1)$$

де $h(T) = \int_{T_{ref}}^T c_p(T) \rho(T) dT$ – об'ємна ентальпія, Дж/м³; T_{ref} – абсолютна температура відліку, К; c_p – масова ізобарна теплоємність, Дж/(кг·К); ρ – густина, кг/м³; T – абсолютна температура, К; τ – час, с; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, 3$ – оператор Гамільтона, м⁻¹; x_i , $i = 1, 2, 3$ – декартові координати, м; λ – коефіцієнт теплопровідності, Вт/(м·К); \mathbf{x} – радіус-вектор декартової системи координат, м; χ – коефіцієнт електропровідності, См/м; U – електричний потенціал, В; q_v – об'ємна густина внутрішнього джерела теплоти неелектричної природи, Вт/м³; $\Omega \in R^3$ – тривимірний розрахунковий об'єкт.

Початкові умови для (1) в момент часу $\tau = 0$ задаються тільки для нестационарного рівняння теплопровідності (1):

$$T(\mathbf{x})|_{\Omega} = T_0, \quad (2)$$

де T_0 – початкова температура, К.

Граничні умови (ГУ) для рівняння теплопровідності (1) в момент часу $\tau > 0$ можуть включати ГУ трьох родів:

– I роду або Дирихле – задана температура T_b на границі Γ_{T_I} частини поверхні Ω

$$T(\mathbf{x})|_{\Gamma_{T_I}} = T_b; \quad (3)$$

– II роду або Неймана – задана нормальна складова вектора густини теплового потоку на границі $\Gamma_{T_{II}}$ частини поверхні Ω

$$q_n|_{\Gamma_{T_{II}}} = \mathbf{n} \cdot [-\lambda(T)\nabla T], \quad (4)$$

– де q_n – нормальна складова вектора густини теплового потоку $\mathbf{q} = -\lambda(T)\nabla T$, Вт/м²; \mathbf{n} – вектор зовнішньої нормалі до Ω ;

– III роду – задані конвективні умови теплообміну на границі $\Gamma_{T_{III}}$ частини поверхні Ω

$$\mathbf{n} \cdot [-\lambda(T)\nabla T]|_{\Gamma_{T_{III}}} = \alpha(T)(T - T_p), \quad (5)$$

де α – коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_p – температура оточуючого середовища, К.

ГУ квазістаціонарного рівняння електропровідності (1) в момент часу $\tau > 0$ можуть включати ГУ двох типів:

– Дирихле – задано нульовий електричний потенціал на границі Γ_{U_I} частини поверхні Ω

$$U(\mathbf{x})|_{\Gamma_{U_I}} = 0; \quad (6)$$

– Неймана – задана нормальна складова вектора густини електричного струму на границі $\Gamma_{U_{II}}$ частини поверхні Ω

$$j_n|_{\Gamma_{U_{II}}} = \mathbf{n} \cdot [-\chi(T)\nabla U], \quad (7)$$

де j_n – нормальна складова вектора густини електричного струму, А/м².

Система рівнянь (1)-(7) є повним формулюванням зв'язаної нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності ізотропного середовища.

Методика числового розв'язання. Розглянемо числову методику розв'язання задачі (1)-(7) з використанням методу скінченних елементів (МСЕ) [8-10]. Систему дискретних рівнянь МСЕ можна отримати методом Гальоркіна. При цьому за вагову функцію обирається функція форми скінченного елемента (СЕ). Отже, для задачі (1)-(7) після дискретизації Ω на скінченні елементи і використання першого порядку апроксимації $O(\Delta\tau)$ для скінченно-різницевого аналога похідної за часом [11] отримуємо таку систему дискретних рівнянь МСЕ у разі її формування по СЕ:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left\{ -[C^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}\} - \{h^{(e)}\}}{\Delta\tau} - ([K_\lambda^{(e)}(\hat{T})] + [K_\alpha^{(e)}(\hat{T})])\{\hat{T}^{(e)}\} + \right. \\ & \left. + \left\{ \chi^{(e)}(\hat{T}) \|\nabla \hat{U}^{(e)}\|^2 \right\} + \left\{ f_{q_v}^{(e)}(\hat{T}) \right\} + \left\{ f_\alpha^{(e)}(\hat{T}) \right\} - \left\{ f_q^{(e)} \right\} \right\} = 0; \\ & \sum_{e=1}^M \left\{ [K_\chi^{(e)}(\hat{T})] \{\hat{U}^{(e)}\} + \left\{ f_j^{(e)} \right\} \right\} = 0, \end{aligned} \right. \quad (8)$$

де (e) – індекс СЕ; M – кількість СЕ; $\{\hat{h}^{(e)}\}$, $\{h^{(e)}\}$ – вектори об'ємної ентальпії СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, Дж/м³; $\{\hat{T}^{(e)}\}$, $\{T^{(e)}\}$ – вектори абсолютної температури СЕ на верхньому та нижньому часових рівнях, відповідно, К; $[C^{(e)}]$, $[K_\lambda^{(e)}(\hat{T})]$, $[K_\alpha^{(e)}(\hat{T})]$ – матриці СЕ, що пов'язані з демпфіруванням, теплопровідністю (Вт/(м³·К)) та зовнішнім конвективним теплообміном (Вт/(м³·К)), відповідно; $\{\chi^{(e)}(\hat{T}) \|\nabla \hat{U}^{(e)}\|^2\}$, $\{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_\alpha^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_q^{(e)}\}$ – вектори навантаження СЕ, що пов'язані з внутрішнім джерелом теплоти за рахунок Джоулевої теплоти та джерелом неелектричної природи, зовнішнім конвективним теплообміном на границі $\Gamma_{T_{III}}$ частини поверхні Ω і густиною теплового потоку на границі $\Gamma_{T_{II}}$ частини поверхні Ω , відповідно, Вт/м³; $\{\nabla \hat{U}^{(e)}\} = [B] \{\hat{U}^{(e)}\}$ – граді-

ент електричного потенціалу СЕ, В/м; $\{\hat{U}^{(e)}\}$ – вектор електричного потенціалу СЕ на верхньому часовому рівні, В; $[K_{\chi}^{(e)}(\hat{T})]$ – матриця СЕ, що пов’язана з електропровідністю, См/м³; $\{f_j^{(e)}\}$ – вектор навантаження СЕ за рахунок заданої густини електричного струму на границі $\Gamma_{U\Pi}$ частини поверхні Ω , А/м³.

Систему дискретних рівнянь (8) можна розв’язувати за допомогою побудови теплоелектричного СЕ з двома ступенями свободи (T і U), як це, наприклад, використовується для задач напружено-деформованого стану [8-10]. Основним недоліком такого способу є підвищені вимоги до обчислювальних ресурсів (зокрема, до оперативної пам’яті). Тому з метою мінімізації цих вимог у даній роботі розглядається методика, що побудована на послідовному розв’язанні рівнянь теплопровідності та електропровідності.

Вирази у вигляді інтегральних співвідношень для визначення матриць $[C^{(e)}]$, $[K_{\lambda}^{(e)}]$, $[K_{\alpha}^{(e)}]$ і векторів $\{f_{q_v}^{(e)}\}$, $\{f_{\alpha}^{(e)}\}$, $\{f_q^{(e)}\}$ СЕ для лінійних задач теплопровідності можна знайти в [8-10]. Співвідношення для матриці $[K_{\chi}^{(e)}]$ і вектору $\{f_j^{(e)}\}$ рівняння електропровідності нескладно отримати за аналогією з теплопровідністю. Для нелінійної задачі (1)-(7) ці вирази за виключенням матриці $[C^{(e)}]$ є залежними від температури і, тому в процесі її розв’язання ітераційними методами потребують перерахування на кожному кроці виконання ітерацій, що є неефективним, особливо для нестационарних задач. Враховуючи ізотропність фізичних властивостей середовища, цього можна уникнути за допомогою деяких перетворень основних співвідношень СЕ. Наприклад, для матриці СЕ, пов’язаної з теплопровідністю, будемо мати

$$[K_{\lambda}^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} \lambda(T) [B]^T [B] dV \approx \lambda(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV = \lambda(T_m^{(e)}) [k_{\lambda}^{(e)}]; \quad (9)$$

для матриці СЕ, пов’язаної із зовнішнім конвективним теплообміном

$$[K_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})] = \int_{S^{(e)}} \alpha(T) [N]^T [N] dS \approx \alpha(T_m^{(e)}) \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS = \alpha(T_m^{(e)}) [k_{\alpha}^{(e)}]; \quad (10)$$

для матриці СЕ, пов’язаної з електропровідністю

$$[K_{\chi}^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} \chi(T) [B]^T [B] dV \approx \chi(T_m^{(e)}) \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV = \chi(T_m^{(e)}) [k_{\chi}^{(e)}], \quad (11)$$

де $V^{(e)}$ – об’єм СЕ; $S^{(e)}$ – поверхня грані СЕ; $[N]$ – матриця-рядок коефіцієнтів форми

СЕ; $[B] = \nabla[N]$ – матриця градієнтів СЕ; $T_m^{(e)} = \frac{\sum_{i=1}^M T_i}{M}$ – середня температура СЕ; $[k_{\lambda}^{(e)}] = [k_{\chi}^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [B]^T [B] dV$, $[k_{\alpha}^{(e)}] = \int_{S^{(e)}} [N]^T [N] dS$.

Матриця демпфірування не перетворюється, оскільки за рахунок використання h замість T у (8) вона стає незалежною від температури і виражається таким співвідношенням

$$[C^{(e)}(\hat{T})] = \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV = [c^{(e)}], \quad (12)$$

де $[c^{(e)}] = \int_{V^{(e)}} [N]^T [N] dV$.

Аналогічні перетворення також нескладно виконати і для векторів навантаження СЕ $\{f_{q_v}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_{\alpha}^{(e)}(\hat{T})\}$, $\{f_q^{(e)}\}$, $\{f_j^{(e)}\}$. Тепер матриці $[k_{\lambda}^{(e)}]$, $[k_{\alpha}^{(e)}]$, $[c^{(e)}]$, $[k_{\chi}^{(e)}]$ та вектори $\{f_{q_v}^{(e)}\}$, $\{f_{\alpha}^{(e)}\}$, $\{f_j^{(e)}\}$ СЕ вимагають тільки одноразового обчислення на початку ітераційного циклу розв’язання задачі. В результаті виконаних перетворень (9)-(12) система дискретних рів-

нянь МСЕ (8) набуває вигляду

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{e=1}^M \left\{ -[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}\} - \{h^{(e)}\}}{\Delta \tau} - ([k_{\lambda}^{(e)}] \lambda(\hat{T}_m^{(e)}) + [k_{\alpha}^{(e)}] \alpha(\hat{T}_m^{(e)})) \{\hat{T}^{(e)}\} + \right. \\ & \left. + \left\{ \chi(\hat{T}_m^{(e)}) \left\{ \nabla \hat{U}^{(e)} \right\}^2 \right\} + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v(\hat{T}_m^{(e)}) + \{f_{\alpha}^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^{(e)}) T_p - \{f_q^{(e)}\} q_n \right\} = 0, \\ & \sum_{e=1}^M \left\{ [k_{\chi}^{(e)}] \chi(\hat{T}_m^{(e)}) \{\hat{U}^{(e)}\} + \{f_j^{(e)}\} j_n \right\} = 0, \end{aligned} \right. \quad (13)$$

де q_n – нормальна густина теплового потоку на грані СЕ, Вт/м²; j_n – нормальна густина сили електричного струму на грані СЕ, А/м²; $\{f_{q_v}^{(e)}\} = \int_{V^{(e)}} [N]^T dV$; $\{f_{\alpha}^{(e)}\} = \{f_q^{(e)}\} = \{f_j^{(e)}\} = \int_{S^{(e)}} [N]^T dS$.

Після часткової лінеаризації за методом Ньютона [11] система дискретних рівнянь (13) набуває вигляду:

– для рівняння теплопровідності

$$\sum_{e=1}^M \left\{ [k_{\lambda}^{(e)}] \left[\frac{\partial \lambda^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \lambda^{(e)}(\hat{T}^k) \right] + [k_{\alpha}^{(e)}] \left[\frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \hat{T}^k + \alpha^{(e)}(\hat{T}^k) \right] + [c^{(e)}] \frac{c_p^{(e)}(\hat{T}^k) \rho^{(e)}(\hat{T}^k)}{\Delta \tau} - \right. \\ \left. - \{f_{\alpha}^{(e)}\} \left\{ \frac{\partial \alpha^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right\}^T T_p - \{f_{q_v}^{(e)}\} \left\{ \frac{\partial q_v^{(e)}(\hat{T}^k)}{\partial T} \right\}^T \right\} \{\delta \hat{T}^{k+1}\} = \sum_{e=1}^M \{f_{\lambda}^{(e)}\}; \quad (14)$$

– для рівняння електропровідності

$$\sum_{e=1}^M [k_{\chi}^{(e)}] \chi(\hat{T}^k) \{\delta \hat{U}^{k+1}\} = \sum_{e=1}^M \{f_{\chi}^{(e)}\}, \quad (15)$$

де $\{f_{\lambda}^{(e)}\} = -[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}(T^k)\} - \{h^{(e)}(T)\}}{\Delta \tau} - ([k_{\lambda}^{(e)}] \lambda(\hat{T}^k) + [k_{\alpha}^{(e)}] \alpha(\hat{T}^k)) \{\hat{T}^k\} + \left\{ \chi(\hat{T}_m^k) \left\{ \nabla \hat{U}^{(e)} \right\}^2 \right\} + \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v(\hat{T}_m^k) + \{f_{\alpha}^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^k) T_p - \{f_q^{(e)}\} q_n$ – вільний член системи дискретних рівнянь (14); $\{\delta \hat{T}^{k+1}\}$ – вектор неув'язки за температурою; k – номер ітерації на кожному кроці інтегрування за часом; $\{f_{\chi}^{(e)}\} = \sum_{e=1}^M \left\{ [k_{\chi}^{(e)}] \chi(\hat{T}_m^k) \{\hat{U}^{(e)}\} + \{f_j^{(e)}\} j_n \right\}$ – вільний член системи дискретних рівнянь (15); $\{\delta \hat{U}^{k+1}\}$ – вектор неув'язки за електричним потенціалом.

Тут лінеаризація (15) є необов'язковою, але її виконання пояснюється отриманням однокорової форми запису систем дискретних рівнянь.

Системи лінеаризованих рівнянь (14) і (15) можна також переписати відносно вузлових невідомих $\delta \hat{T}$ і $\delta \hat{U}$, відповідно. Наприклад, у разі нелінійності, що викликана температурною залежністю c_p , ρ , λ , α , χ , будемо мати такі системи лінеаризованих рівнянь:

– для рівняння теплопровідності

$$[A_{ij}^{\lambda}] \{\delta T_j\} = \{B_i^{\lambda}\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (16)$$

де $[A_{ij}^{\lambda}] = [k_{\lambda ij}] \left(\frac{\partial \lambda(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \lambda(\hat{T}_j^k) \right) + [k_{\alpha ij}] \left(\frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \hat{T}_j^k + \alpha(\hat{T}_j^k) \right) + [c_{ij}] \frac{c_p(\hat{T}_j^k) \rho(\hat{T}_j^k)}{\Delta \tau} - \{f_{\alpha i}\} \left\{ \frac{\partial \alpha(\hat{T}_j^k)}{\partial T} \right\} T_p$ – матриця системи, що відповідає глобальним номерам вузлів;

$\{B_i^\lambda\} = \sum_{e=1}^M \left[-[c^{(e)}] \frac{\{\hat{h}^{(e)}(T^k)\} - \{h^{(e)}(T)\}}{\Delta\tau} - \left([k_\lambda^{(e)}] \lambda(\hat{T}^k) + [k_\alpha^{(e)}] \alpha(\hat{T}^k) \right) \{\hat{T}^k\} + \left\{ \chi(\hat{T}_m^k) \left\{ \nabla \hat{U}^{(e)} \right\} \right\}^2 \right] +$
 $+ \{f_{q_v}^{(e)}\} q_v + \{f_\alpha^{(e)}\} \alpha(\hat{T}_m^k) \Gamma_p - \{f_q^{(e)}\} q_n$ – вектор вільних членів відносно глобальних номерам вузлів;

– для рівняння електропровідності

$$[A_{ij}^\lambda] \{\delta U_j\} = \{B_i^\lambda\}, \quad i, j = \overline{1, N}, \quad (17)$$

де $[A_{ij}^\lambda] = [k_{\chi ij}^{(e)}] \chi(\hat{T}_j^k)$ – матриця системи, що відповідає глобальним номерам вузлів;

$\{B_i^\lambda\} = \sum_{e=1}^M \left\{ [k_\chi^{(e)}] \chi(\hat{T}_m^k) \{\hat{U}^{(e)}\} + \{f_j^{(e)}\} j_n \right\}$ – вектор вільних членів відносно глобальних номерів вузлів.

Матриці $[A_{ij}^\lambda]$ і $[A_{ij}^\chi]$ є розрідженими, тому для їх формування та подальшого розв’язання систем лінійних алгебричних рівнянь (16) і (17) зазвичай використовується, наприклад, стрічкова їх форма [12], що також значно мінімізує вимоги до обчислювальних ресурсів.

Системи лінеаризованих рівнянь (16) і (17) на кожному кроці ітерацій розв’язуються послідовно відносно $\{\delta \hat{T}_j^{k+1}\}$ і $\{\delta \hat{U}_j^{k+1}\}$, відповідно, а шукана температура і потенціал у вузлах розрахункової сітки визначається за формулами

$$\begin{cases} \{\hat{T}_i^{k+1}\} = \{\hat{T}_i^k\} + \{\delta \hat{T}_i^{k+1}\}, & i = \overline{1, N}; \\ \{\hat{U}_i^{k+1}\} = \{\hat{U}_i^k\} + \{\delta \hat{U}_i^{k+1}\}, & i = \overline{1, N}, \end{cases} \quad (18)$$

де N – кількість вузлів у розрахунковій області.

При цьому система рівнянь (17) для електропровідності розв’язується першою в ітераційному циклі розв’язання задачі тепло-електропровідності.

Критерієм отримання числового розв’язку вихідної задачі на кожному часовому кроці є виконання умови

$$|\delta \hat{T}_i^{k+1}| \leq \varepsilon_T, \quad i = \overline{1, N}, \quad (19)$$

де ε_T – задана точність розрахунку поля температури, К.

При цьому точність визначення електричного потенціалу, яка є не гіршою за температуру, встановлюється автоматично.

Програмна реалізація числової методики та тести. Дискретизацію області Ω можна здійснювати чотиригранними або шестигранними лінійними СЕ з вісьмома та чотирма вузлами, відповідно. Для виконання тестування викладеної у роботі числової методики використано тетраедри СЕ. Дискретизація розрахункової області проведена за допомогою вільно відкритого програмного забезпечення для автоматизованої генерації сіток Gmsh [13], а для візуалізації результатів розрахунків застосовано – ParaView [14], який також є вільно відкритим програмним кодом.

Програмна реалізація числової методики виконана на мові програмування системи Mathcad [15]. Оцінка точності розрахунків проведена за допомогою порівняння з точними (аналітичними) та числовими розв’язками задач, отриманими за допомогою іншого програмного забезпечення. У якості геометричного об’єкта обрано циліндр за різних комбінацій задання граничних умов конвективного типу для рівняння теплопровідності та умов Дирихле та Неймана для рівняння електропровідності за умов стаціонарного та нестаціонарного розподілу полів температури, для яких існують точні розв’язки у разі лінійних задач [16].

Числова модель тепло-електропровідності являє собою четверту частину циліндра, яку побудовано за допомогою спеціального geo-файлу у програмі Gmsh, та виконано її дискретизацію на тетраедри СЕ.

Тестування розробленого у середовищі Mathcad програмного забезпечення для розв’язання зв’язаної нестаціонарної задачі тепло-електропровідності (1)-(7) ізотропного середовища проведено за декількома тестами, що включають лінійні та нелінійні задачі.

Тест 1. Стационарна лінійна задача тепло-електропровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,1 м з коефіцієнтом теплопровідності 12 Вт/(м·К), електропровідності 500 См/м за граничних умов для I, II і III роду на торцях та бічній стороні для рівнянь електропровідності та теплопровідності, відповідно: нижній торець $U = 0$ В; верхній торець $j_n = 2500/5000/10000$ А/м²; бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С (табл. 1).

Таблиця 1

Результати порівняння за тестом 1

| Тип розв'язку | $t_{cm.} - t_{ц.},$ $j_n = 2500$ А/м ² | $t_{cm.} - t_{ц.},$ $j_n = 5000$ А/м ² | $t_{cm.} - t_{ц.},$ $j_n = 10000$ А/м ² |
|--|--|--|---|
| Точний розв'язок [16] | 55,827–56,478 | 118,309–120,912 | 368,235–378,649 |
| Mathcad – авторський код, вузлів 1218, СЕ – 4804 | 55,795–56,451 | 118,18–120,804 | 367,721–378,214 |
| $q_v, \text{Вт/м}^3$ | $1,25 \cdot 10^4$ | $5,0 \cdot 10^4$ | $2,0 \cdot 10^5$ |
| Похибка, % | 0,068–0,058 | 0,11–0,09 | 0,14–0,11 |

Примітка. $t_{cm.}, t_{ц.}$ – температура стінки та центру циліндра, відповідно, °С.

Тест 2. Стационарна нелінійна задача тепло-електропровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,1 м теплопровідністю $\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t}$ Вт/(м·К), електропровідністю $\chi(t) = 73086,2 - 7,032 \cdot 10^{-9}t^4 + 5,188 \cdot 10^{-5}t^3 - 1,381 \cdot 10^{-1}t^2 + 136,36t$ См/м за граничних умов для I, II і III роду на торцях та бічній стороні для рівнянь електропровідності і теплопровідності, відповідно: нижній торець $U = 0$ В; верхній торець $j_n = 0,5 \cdot 10^5 / 0,1 \cdot 10^6 / 0,2 \cdot 10^6$ А/м²; бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С (табл. 2).

Таблиця 2

Результати порівняння за тестом 2

| Тип розв'язку | $j_n = 0,5 \cdot 10^5$ А/м ² | | $j_n = 0,1 \cdot 10^6$ А/м ² | | $j_n = 0,2 \cdot 10^6$ А/м ² | |
|--|---|-----------------|---|-----------------|---|-----------------|
| | $t_{cm.} - t_{ц.},$ °С | $U_{max},$ В | $t_{cm.} - t_{ц.},$ °С | $U_{max},$ В | $t_{cm.} - t_{ц.},$ °С | $U_{max},$ В |
| Matlab [17] | 85,23– 85,35 | 0,0602 | 207,04– 207,46 | 0,1032 | 612,71– 614,27 | 0,1732 |
| Mathcad – авторський код, вузлів 1218, СЕ – 4804 | 84,71– 84,85 | 0,0597 | 208,36– 209,04 | 0,1042 | 610,07– 618,7 | 0,1729 |
| Похибка, % | 0,61–0,59 | 0,83 | 0,64–0,77 | 0,97 | 0,43–0,72 | 0,17 |

Тест 3. Нестационарна нелінійна задача тепло-електропровідності циліндра радіусом 0,05 м та висотою 0,1 м з коефіцієнтом теплопровідності $\lambda(t) = 159,218e^{-1,116 \times 10^{-3}t}$ Вт/(м·К), масовою ізобарною теплоємністю $c_p(t) = 712,2 + 2,933 \times 10^{-7}t^3 - 1,444 \times 10^{-3}t^2 + 2,406t$ Дж/(кг·К), густиною $\rho(t) = 1853 - 5,453 \times 10^{-5}t^2 - 0,127t$ кг/м³ та електропровідністю $\chi(t) = 73086,2 - 7,032 \cdot 10^{-9}t^4 + 5,188 \cdot 10^{-5}t^3 - 1,381 \cdot 10^{-1}t^2 + 136,36t$ См/м за граничних умов для I, II і III родів на торцях та бічній стороні для рівнянь електропровідності та теплопровідності, відповідно: нижній торець $U = 0$ В; верхній торець $j_n = 10^5$ А/м²; торці та бічна сторона $\alpha = 15$ Вт/(м²·К), $t_{p1} = 35$ °С. Початкова температура $t_0 = 35$ °С. (табл. 3).

Таблиця 3

Результати порівняння за тестом 3

| Час, год | $(t_{cm.} - t_{y.})/U_{max}, \text{ } ^\circ\text{C}/\text{В}$ | | | | |
|--|--|--------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| | 0,5 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Matlab [17] | (115,96–116,39)/0,1148 | (141,22–141,80)/0,1114 | (154,17–154,84)/0,1098 | (156,16–156,84)/0,1096 | (156,47–157,15)/0,1096 |
| Mathcad – МСЕ, авторський код, 120 кроків за часом, вузлів 1218, СЕ – 4804 | (116,71 – 117,22)/0,1147 | (141,58 – 142,28)/0,1114 | (154,13–154,94)/0,1099 | (156,05–156,87)/0,1096 | (156,35–157,18)/0,1096 |
| Похибка, % | (0,65–0,71)/0,087 | (0,26–0,34)/0,0 | (0,03–0,07)/0,08 | (0,07–0,02)/0,0 | (0,08–0,02)/0,0 |

Результати числового моделювання за тестом 3 з використанням розробленого програмного забезпечення наведено на рисунку.

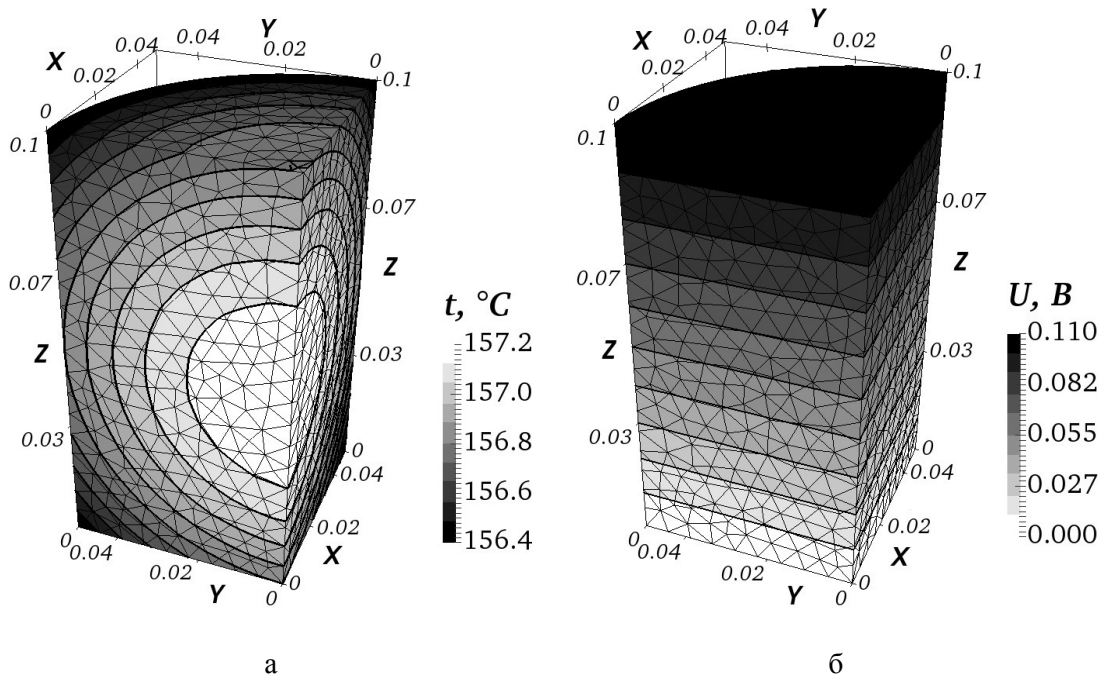


Рисунок – Результати числового моделювання за тестом 3 на 4 год: а – поле температури; б – поле електричного потенціалу

Аналіз порівняння результатів показує, що дані моделювання за розробленим програмним забезпеченням збігаються з аналітичними та числовими розв’язками, що отримані з використанням програмного забезпечення Matlab. При цьому максимальне значення похибки визначення температури і електричного потенціалу не перевищує 0,2-0,83% залежно від умов задачі.

Висновки

На базі методу скінченних елементів та лінеаризації за методом Ньютона розроблено числову методику та програмне забезпечення для розв’язання нелінійної нестационарної задачі тепло-електропровідності та виконано зіставлення результатів числових експериментів за тестами, для яких існують точні розв’язки, та з даними, отриманими за допомогою програмних продуктів Matlab. Встановлено, що максимальне значення похибки визначення температури і електричного потенціалу не перевищує 0,2-0,83% залежно від умов задачі.

Подальші дослідження доцільно продовжити у напрямку розробки методики та алгоритмів розв'язання контактних задач тепло-електропровідності з врахуванням стрічкової форми запису матриці системи лінеаризованих дискретних рівнянь та мінімізації ширини стрічки.

Список використаних джерел:

1. Моделирование термоэлектрической системы генерирования тепловой и электрической энергии / В.Я. Михайловский, Л.Т. Струтинская, Е.В. Чайковская // Технология и конструирование в электронной аппаратуре. – 2005. – № 4. – С. 27-30.
2. Ярымбаш Д.С. Идентификация электрических параметров печной петли мощных печей графитизации / Д.С. Ярымбаш // Электротехника и электромеханика. – 2012. – № 1. – С. 49-54.
3. Yune Y.G. Transient Nonlinear Thermal Runaway Effects in Carbon Graphite Electrical Brushes / Y.G. Yune, M.D. Bryant // IEEE Transactions on Components Hybrids and Manufacturing Technology. – 1988. – Vol. 11, № 1. – P. 91-100.
4. Temperature evolution during field activated sintering / A. Zavaliangos, J. Zhang, M. Krammer, J.R. Groza // Materials Science and Engineering. – 2004. – Vol. 379, Iss. 1-2. – P. 218-228.
5. Кучерявая И.Н. Компьютерное моделирование электротепловых процессов в полимерной изоляции кабеля с воздушным включением при возникновении единичного частичного разряда / И.Н. Кучерявая // Технічна електродинаміка. – 2011. – № 5. – С. 18-24.
6. Study by simulation of the effect of temperature on the appearance of partial discharges in gaseous cavities contained in the insulator of high voltage cable / T. Seghir, A. Nouar, K. Lefkaier, D. Mahi // Power Tech Conference Proceedings. – Bologna, 2003. – P. 718-721.
7. A numerical method for transient simulation of metallurgical compound electrodes / A. Bermudez, J. Bullon, F. Pena, P. Salgado // Finite Elements in Analysis and Design. – 2003. – Vol. 39, Iss. 4. – P. 283-299.
8. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич ; пер. с англ. ; под ред. Б.Е. Победри. – М. : Мир, 1975. – 541 с.
9. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд ; пер. с англ. А.А. Шестакова ; под ред. Б.Е. Победри. – М. : Мир, 1979. – 392 с.
10. Карвацький А.Я. Метод скінченних елементів у задачах механіки суцільних середовищ. Програмна реалізація та візуалізація результатів : навчальний посібник. – К. : НТУУ «КПІ» ВПІ ВПК «Політехніка», 2015. – 392 с.
11. Самарский А.А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А.А. Самарский, Ю.П. Попов. – М. : Наука, 1980. – 352 с.
12. Джордж А. Численное решение больших разреженных систем уравнений / А. Джордж, Дж. Лю ; пер. с англ. Х.Д. Икрамова. – М. : Мир, 1984. – 334 с.
13. Gmsh. a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities [Электронный ресурс]. – (<http://geuz.org/gmsh/>).
14. ParaView. An open-source, multi-platform data analysis and visualization application [Электронный ресурс]. – (<http://www.paraview.org/>).
15. Mathcad. Engineering math software that allows perform, analyze, and share your most vital calculations [Электронный ресурс]. – (<http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/>).
16. Исаченко В.П. Теплопередача : учебник для вузов / В.П. Исаченко, В.А. Осипова, А.С. Сукомел. – М. : Энергоиздат, 1981. – 416 с.
17. Matlab. The Language of Technical Computing [Электронный ресурс]. – (<http://www.mathworks.com/products/matlab/>).

Bibliography:

1. Simulation of the thermoelectric system for generating heat and electricity / V.Ya. Mykhaylovskiy, L.T. Strutyinskaya, E.V. Chaykovskaya // Technology and design in electronic equipment. – 2005. – № 4. – P. 27-30. (Rus.)
2. Yarymbash D.S. Identification of the electrical parameters of the circuit loop of powerful furnaces graphitization / D.S. Yarymbash // Electrical engineering & electromechanics. – 2012. – № 1. – P. 49-54. (Rus.)
3. Yune Y.G. Transient Nonlinear Thermal Runaway Effects in Carbon Graphite Electrical Brushes / Y.G. Yune, M.D. Bryant // IEEE Transactions on Components Hybrids and Manufacturing Tech-

- nology. – 1988. – Vol. 11, № 1. – P. 91-100.
4. Temperature evolution during field activated sintering / A. Zavaliangos, J. Zhang, M. Krammer, J.R. Groza // *Materials Science and Engineering*. – 2004. – Vol. 379, Iss. 1-2. – P. 218-228.
 5. Kucheryavaya I.N. Computer modeling of electrothermal processes in polyethylene insulation of cable with air inclusion at single partial discharge / I.N. Kucheryavaya // *Technical electrodynamic*. – 2011. – №5. – P. 18-24. (Rus.)
 6. Study by simulation of the effect of temperature on the appearance of partial discharges in gaseous cavities contained in the insulator of high voltage cable / T. Seghir, A. Nouar, K. Lefkaier, D. Mahi // *Power Tech Conference Proceedings*. – Bologna, 2003. – P. 718-721.
 7. A numerical method for transient simulation of metallurgical compound electrodes / A. Bermudez, J. Bullon, F. Pena, P. Salgado // *Finite Elements in Analysis and Design*. – 2003. – Vol. 39, Iss. 4. – P. 283-299.
 8. Zenkevich A. The method of finite elements in technique / A. Zenkevich ; translation with eng. ; under the edit. B.E. Pobedy. – M. : Myr, 1975. – 541 p. (Rus.)
 9. Seherlynd L. Application of the method of finite elements / L. Seherlynd ; translation with eng. A.A. Shestakova ; under the edit. B.E. Pobedy. – M. : Myr, 1979. – 392 p. (Rus.)
 10. Karvatskii A.Ya. Finite element method in problems of continuum mechanics. Software implementation and results visualization : education guidance. – K. : NTUU «KPI» PPI PPC «Politehnika», 2015. – 392 p. (Ukr.)
 11. Samarskyj A.A. Difference methods for solving problems of gas dynamics / A.A. Samarskyj, Yu.P. Popov. – M. : Nauka, 1980. – 352 p. (Rus.)
 12. George A. The numerical solution of large sparse systems of equations / A. George, J. Liu ; translation with eng. H.D. Ykramova. – M. : Myr, 1984. – 334 p. (Rus.)
 13. Gmsh. a three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities. – Access mode: <http://geuz.org/gmsh/>.
 14. ParaView. An open-source, multi-platform data analysis and visualization application [Electronic resource]. – (<http://www.paraview.org/>).
 15. Mathcad. Engineering math software that allows perform, analyze, and share your most vital calculations [Electronic resource]. – (<http://www.ptc.com/engineering-math-software/mathcad/>).
 16. Ysachenko V.P. Heat transfer : tutorial for high schools / V.P. Ysachenko, V.A. Osypova, A.S. Sukomel. – M. : Enerhoizdat, 1981. – 416 p. (Rus.)
 17. Matlab. The Language of Technical Computing [Electronic resource]. – (<http://www.mathworks.com/products/matlab/>).

Рецензент: І.О. Мікульонок
д-р техн. наук, проф., НТУУ «КПІ»

Стаття надійшла 25.05.2016