

**МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ ТЕПЛОПЕРЕНОСУ  
В ПІДЗЕМНИХ ВОДАХ**

Процеси передачі теплової енергії поширені в природі і охоплюють весь комплекс явищ переносу теплоти в просторі, що обумовлено різницею температур окремих елементів системи. Вони пов'язані з різноманітними фізичними явищами, які існують у геотехнічних системах будь-якого рівня, і потребують докладного дослідження.

*Ключові слова:* тепла енергія, геотехнічна система, теплопередача, конвекція.

Процессы передачи тепловой энергии распространены в природе и охватывают весь комплекс явлений переноса теплоты в пространстве, что обусловлено разницей температур отдельных элементов системы. Они связаны с различными физическими явлениями, существующими в геотехнических системах любого уровня, и требуют подробного изучения.

*Ключевые слова:* тепловая энергия, геотехническая система, теплопередача, конвекция.

Processes of transfer of thermal energy are widespread in the nature and cover all complex of the phenomena of carry of heat in space that is caused by a difference of temperatures of separate elements of system. They are connected with the various physical phenomena existing in geotechnical systems of any level, and demand detailed studying.

Keywords: thermal energy, geotechnical system, a heat transfer, convection.

Дослідження переносу тепла потоком рідини в пористому середовищі почалися в 20-30-х роках минулого століття. Вивчався вплив швидкості фільтрації, розміру часток і властивостей рідкої фази на ефективний коефіцієнт теплопровідності, було експериментально встановлено, що в окремих випадках, обумовлених розміром часток пористого середовища, у стаціонарних умовах ефективна теплопровідність може залежати від швидкості руху води, а так само з'явилися залежності між тепловими параметрами гірських порід і їхньою вологістю [1].

Рівняння теплопереносу при фільтрації рідини в пористому середовищі в математичному відношенні мають вигляд, аналогічний рівнянням масопереносу. Для одномірного випадку при стаціонарному режимі фільтрації в ізолюваному водоносному шарі, кривля і підшва якого водонепроникні та не проводять тепла, рівняння теплопереносу має вигляд [2]

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V C_p \frac{\partial T}{\partial x} = C_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

де  $T$  - температура;

$V$  - швидкість фільтрації;

$C_p$  і  $C_n$  — об'ємні теплоємності рідини й шару;

$\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;

$t$  - час.

Звичайно використовується передумова про миттєве вирівнювання температури між кістяком породи й рідиною. Об'ємні теплоємності шару  $C_n$ , рідини

$C_p$  і кістяка  $C_{kc}$  і відповідні ним питомі теплоємності  $C'_n$ ,  $C'_p$ ,  $C'_{kc}$  зв'язані між собою співвідношенням

$$n_0 \rho_p C'_p + (1 - n_0) \rho_{kc} C'_{kc} = \rho_n C'_n, \quad (2)$$

$$C_n = \rho_n C'_n; C_p = \rho_p C'_p; C_{kc} = \rho_{kc} C'_{kc}, \quad (3)$$

де  $n_0$  - пористість шару;

$\rho_n, \rho_p, \rho_{kc}$  - щільності шару, рідини й кістяка.

Коефіцієнт температуропровідності  $a = \lambda/C_n$  приводить рівняння (1) до виду

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V \bar{C}_p \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (4)$$

де  $\bar{C}_p = C_p / C_n$ .

Перший член лівої частини рівняння (4) характеризує кондуктивний теплоперенос (молекулярний рух тепла); другий - конвективний перенос тепла, що залежить від швидкості фільтрації; права частина рівняння (4) відбиває зміну кількості тепла в шарі в часі. Якщо в тепловому відношенні водоносний шар не ізольований і можлива віддача тепла в кривлю та підшову шару, у праву частину рівняння (1) уводять додатковий член  $2\alpha (T-T_0)$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V C_p \frac{\partial T}{\partial x} = C_n \frac{\partial T}{\partial t} + 2\alpha (T-T_0), \quad (5)$$

де  $\alpha$  - коефіцієнт теплообміну;

$T_0$  - початкова температура водоносного шару і його порід, що вміщують.

Якщо теплоперенос у породах кривлі та підшови має тільки кондуктивний характер, другий член у правій частині рівняння (5) здобуває вид  $2 \frac{\lambda}{m} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=m/2}$ ,

де  $m$  - потужність водоносного шару; вісь  $x$  проходить уздовж середини шару; вісь  $z$  - вертикальна.

Рішення фундаментального одномірного завдання конвективного теплопереносу у водоносному шарі при кондуктивній віддачі тепла у шар породи необмеженої потужності має такий вигляд системи рівнянь (6) і (7), кондуктивний теплоперенос при цьому не враховується

$$- V C_p \frac{\partial T}{\partial x} = C_n \frac{\partial T}{\partial t} + 2 \frac{\lambda}{m} \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=m/2}, \quad (6)$$

$$\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = C_n \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (7)$$

при початкових і граничних умовах

$$T(x, 0) = T_0; T(0, t) = T_{\text{вх}}; \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (8)$$

отримано у вигляді

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_{\text{вх}} - T_0} = \operatorname{erfc} \frac{x \sqrt{\lambda / C_n}}{2m \sqrt{VC_p (VC_p t - x)}}, \quad (9)$$

Рівняння (9) використовується в теорії тепло- і масопереносу, а також для рішення різних практичних завдань прогнозу поширення речовин і тепла в підземних водах [3]. Одномірне рівняння теплопереносу в ізольованому водоносному шарі при умовах змінної температури води на вході в шар, якщо температура на вході  $T_{\text{вх}}$  змінюється періодично по синусоїді

$$T_{\text{вх}} = T_0 + \Delta T \sin \frac{2\pi t}{\tau_j}, \quad (10)$$

де  $\Delta T$  - амплітуда;

$\tau$  - частота коливання;

$T_0$  - початкова температура шару.

Рішення рівняння (10) має вигляд

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{\Delta T} = \exp(-a'x) \sin\left(\frac{2\pi t}{\tau} - b'x\right), \quad (11)$$

де

$$a' = [(K^2 + 0,25) \tilde{V}^4]^{\frac{1}{2}} + 0,5 \tilde{V}^2]^{\frac{1}{2}} - \tilde{V}$$

$$b' = [(K^2 + 0,25) \tilde{V}^4]^{\frac{1}{2}} + 0,5 \tilde{V}^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$K = \pi C_n / \tau \lambda; \tilde{V} = VC_p / 2\lambda$$

Дане рішення застосовне для прогнозу температури підземних вод при вертикальній фільтрації поверхневих вод, температура яких періодично змінюється внаслідок добових і сезонних коливань температури повітря.

Використання спостережень за розподілом температури підземних вод у межах поділяючого слабопроникного шару для визначення швидкості вертикального перетікання води через нього розглядає рівняння стаціонарного теплопереносу вертикальним фільтраційним потоком з постійною швидкістю фільтрації  $V$

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + V C_p \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (12)$$

при умовах на кривлі шару  $T(z = m) = T_m$  і на підшві шару  $T(z = 0) = T_0$  рішення, отримане у вигляді

$$\bar{T} = \frac{T - T_0}{T_m - T_0} = \frac{\exp(VC_p z/\lambda) - 1}{\exp(VC_p m/\lambda) - 1}, \quad (13)$$

дає розподіл температури залежно від  $V$ ,  $z$  і теплових параметрів шару. Вимірювання в декількох точках  $z_i$  температури шару  $T_i$ , з (13) може визначити швидкість вертикальної фільтрації  $V$ .

Двовимірний теплоперенос при фільтрації з постійною швидкістю досліджувався в лабораторних експериментах [2]. Вода, нагріта до температури  $T_0$ , фільтрувалася через стовпчики ґрунтів, які були поміщені в циліндричний посуд з радіусом  $r_0$ . Диференціальне рівняння стаціонарного теплопереносу для розглянутого випадку має вигляд

$$\lambda_r \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial^2 r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right] + \lambda_z \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - V C_p \frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad (14)$$

де  $\lambda_r$  і  $\lambda_z$  - ефективні теплопровідності в радіальному та осьовому напрямках.

Температура навколишнього середовища поза стовпчиком дорівнює  $T_\infty$  і зберігається незмінною. Граничні умови формулюються в наступному виді:

$$\begin{aligned} T &= T_0; z = 0; 0 \leq r \leq r_0, \\ T &= T_\infty; z \rightarrow 0; 0 \leq r \leq r_0, \\ \frac{\partial T}{\partial r} &= 0; r = 0; 0 < z \leq \infty, \\ \lambda_r \frac{\partial T}{\partial r} &= -\alpha (T - T_\infty); 0 < z \leq \infty; \end{aligned} \quad (15)$$

де  $\lambda$  - коефіцієнт теплообміну з навколишнім середовищем через стінку циліндра, у якому перебуває зразок породи.

Рішення рівняння (14) при умовах (15), має вигляд

$$\bar{T} = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_1(\bar{\alpha}_n) J_0(\bar{\alpha}_n \bar{r})}{\bar{\alpha}_n [J_1^2(\bar{\alpha}_n) + J_0^2(\bar{\alpha}_n)]} \exp [(\delta \beta^2 - \beta \sqrt{\delta^2 \beta^2 + \bar{\alpha}_n^2}) \bar{z}], \quad (16)$$

де  $J_1, J_0$  - функції Беселя першого роду першого і нульового порядку;

$\bar{\alpha}_n$  - корінь рівняння (17)

$$\bar{\alpha}_n J_1(\bar{\alpha}_n) = P J_1(\bar{\alpha}_n), \quad (17)$$

де  $P = \alpha r_0 / \lambda_r$ ;  $\bar{r} = r/r_0$ ,  $\bar{z} = z/l$  (де  $l$  — частина довжини стовпчика)

$$\beta = \sqrt{\lambda_r l^2 / \lambda_z r_0^2}; \delta = VC_p r_0^2 / 2\lambda_r l, \quad (18)$$

У результаті досліджень із ґрунтами з пористістю 0,34 — 0,66, при швидкості фільтрації  $V = 0,05$  — 0,19 см/хв., були встановлені значення  $\lambda_r = 2500$  -

5000 Вт/м К. При цьому співвідношення  $(\lambda_z / \lambda_r) \sim 1,1$ . Для більшості досліджень одночасно зі зростанням швидкості фільтрації  $V$  відзначене деяке збільшення  $\lambda_r$ .

Зміна температури води, що надходить з ріки або водоймища у водоносний шар, відбувається по декількох схемах одномірного нестационарного теплопереносу в напірному водоносному шарі між двома водоймами із заданими постійними рівнями. У зв'язку зі зміною потужності шару  $m(x)$  і коефіцієнта фільтрації  $k(x)$  швидкість фільтрації в шарі розглядається як змінна по напрямку плину величина. При слабопроникній кривлі, крім того, ураховують вплив інфільтрації поверхневих вод. Температурні зміни в шарі описані рівнянням (6) без члену  $\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ , тобто

враховуються тільки конвективний теплоперенос фільтраційним потоком і відвід тепла в що підстиляють і перекривають породи. Величини  $m(x)$  і  $k(x)$  задані у вигляді лінійної або безперервної функції. Температура порід кривлі і підшви, а також початкова температура шару вважаються постійними  $T_0$  або мають заданий початковий розподіл  $T(x)$ . Температура води, яка надходить до горизонту, постійна або змінюється в часі за законом ламаної лінії або тригонометричної функції. Для всіх перерахованих схем отримані аналітичні рішення.

Значне число досліджень теплопереносу виконано у зв'язку із проблемою накачування в шар використаних в енергетичних цілях термальних підземних вод або холодних підземних вод після охолодження ними промислових агрегатів. У цих випадках температура подаваної в шар води відрізняється від початкової температури шару і поширення теплового фронту може вплинути на температуру води в найближчі місяці накачування. У зв'язку з цим необхідний прогноз теплопереносу у водоносному горизонті.

Основні дослідження з теплопереносу при скиданні нагрітих (або охолоджених) вод у шар проведені стосовно до дублетної схеми, тобто при роботі однієї нагнітальної і однієї водовідбірної свердловини. Експлуатація нагнітальних і водовідбірних свердловин у водоносному шарі з природним потоком підземних вод ускладнює схему руху. Причому залежно від дебіту свердловин, їхнього розташування і напрямки природного потоку, до водовідбірної свердловини може повернутися вся або тільки деяка частина води, яка була закачана у нагнітальні. Аналітичні рішення завдань теплопереносу можливі для обмеженого числа найбільш простих дублетних схем, наприклад, коли шар є однорідним, дебити свердловин однакові, природний потік підземних вод не враховується, тощо.

Для більш складних схем (неоднорідний шар, система водовідбірних і нагнітальних свердловин, їхні різні дебіти) гідродинамічний і тепловий розрахунок здійснюється послідовно. Спочатку за допомогою моделювання фільтрації на аналоговій або математичній моделі одержують гідродинамічну сітку фільтрації, на якій виділяють лінії струму, що йдуть до водовідбірних свердловин від окремих нагнітальних та з природного потоку. Потім розглядається теплоперенос по окремих трубках - смуги потоку, які обмежені обраними лініями струму [4]. Рівняння (6) застосоване до кожної трубки струму, що йде між свердловинами. Розглянуто систему із двох рівнянь:

- для основного водоносного шару враховують конвективний теплоперенос і віддачу тепла у водонепроникні породи кривлі і підшви

$$h C_n \frac{\partial T_p^\phi(\Delta S, t)}{\partial t} + \Delta\phi C_p \frac{\partial T_p^\phi(\Delta S, t)}{\partial S} = 2 \lambda_{kc} \frac{\partial T_p^\phi(\Delta S, z, t)}{\partial z}, \quad (19)$$

- для порід кривлі і підшви враховується кондуктивний тепло перенос

$$\lambda_{kc} \frac{\partial^2 T_{kc}}{\partial z^2} = C_{kc} \frac{\partial T_{kc}}{\partial t}, \quad (20)$$

де  $h$  - потужність шару;

$\Delta S$  - площа трубки струму від точки нагнітання до розрахункової при початкових і граничних умовах

$$T(\Delta S, t = 0) = T_0; T(\Delta S = 0, t) = T_n;$$

$$T_{kc}(\Delta S, z, t) = T_0; z \geq h/2; T_{kc}(\Delta S, h/2, t) = T_p(\Delta S, h/2, t), \quad (21)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T_{kc}(\Delta S, z, t) = T_0$$

рішення системи (19) - (20) для будь-якої смуги струму від лінії струму  $\phi$  до  $\phi + \Delta\phi$  отримано у вигляді

$$\frac{T_{kc}^\phi(t) - T_0}{T_n - T_0} = \operatorname{erfc} \left\{ \left[ \frac{C_p^2}{\lambda_{kc} C_{kc}} \left( \frac{d\phi}{dS} \right)^2 \left( t - \frac{C_n}{C_p} h \frac{dS}{d\phi} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \right\}, \quad (22)$$

де  $T_{kc}^\phi(t)$  - температура води, що надходить до водовідбірної свердловини по розглянутій смугі струму.

Температуру води, яка відкачується, визначають із урахуванням змішання води, що надходить до свердловини по різних трубках струму.

Натурних спостережень за теплопереносом у водоносних шарах проведено мало. Відомі результати досліджень з нагнітання нагрітої води в безнапірний водоносний шар і наступну відкачку, зроблених для оцінки ефективності акумуляції тепла у водоносних шарах. Експеримент був проведений в алювіальних відкладеннях, потужність водоносного шару, який представлений трьома піщано-гравійними прошарками, становив 10 м [2]. На ділянці пробурені 2 центральні і 12 свердловин спостереження. Ухил природного потоку 0,0001—0,0006. У центральну свердловину протягом 223 год. було закачано 494 м<sup>3</sup> гарячої води при температурі 51 °С и в плин чотирьох місяців спостерігався розподіл температури води в шарі. Потім протягом 28 днів було відібрано 16370 м<sup>3</sup>. Побудовані геотермічні профілі показали нерівномірний розподіл нагрітої води в шарі після накачування, що було пов'язане з його неоднорідністю. При відкачці води швидше охолоджувалися більше проникні прошарки порід, сама вода мала температуру нижче 51 °С. За спостереженнями за температурою і кількістю ін'єкцірованої і витягнутої води був складений тепловий баланс і визначені витрати тепла у водоносному шарі. Встановлено, що в зоні аерації 2/3 тепла розсіюється в результаті теплообміну з атмосферою. У водоносному шарі втрати тепла переважно пов'язані з дисперсією. Кількість тепла в 16370 м<sup>3</sup> води, яка була отримані зі свердловини, становило близько 40% від вхідної кількості. При відборі 494 м<sup>3</sup> води було отримано тільки 7% вхідного тепла.

При інтенсивній експлуатації глибокого водоносного шару відбувається значне зниження рівня підземних вод, і з метою штучного поповнення їхніх запасів проводиться накачування нагрітих до 43° С промислових стічних вод, використаних для охолодження в різних технологічних процесах. По даним [2], нагріта вода від нагнітальних свердловин поширилася на відстань не більше 300 м при витраті нагнітання, що змінювалось від 0,4 - 2 м<sup>3</sup>/хв. протягом перших п'яти років до 1,2 м<sup>3</sup>/хв. у наступні чотири роки.

Такі самі дані спостереження за підвищенням температури водоносних шарів при накачуванні в них нагрітих вод з установок кондиціонування повітря і технологічного охолодження. Відпрацьована тепла вода 20 °С подавалася в алювіальні гравійно-галечникових відкладення заплавної тераси. Вимір температури по системі свердловин спостереження показав, що нагріті води поширилися долілиць по потоці на відстань більше 220 м [2].

Дослідження міграції речовини і тепла в підземних водах дотепер зв'язані в основному із завданнями гідротехнічного і іригаційного будівництва, водопостачання, інтенсифікації вугле- та нафтовидобутку, тощо. Разом з тим слід зазначити, що чисельні методи рішення рівнянь теплопереносу, а також аналогові і математичне моделювання використовуються ще недостатньо, хоча вони необхідні при рішенні багатьох практичних завдань, не тільки по захисту підземних вод від забруднення, прогнозу якості підземних вод і т.п., але й, що особливо актуально останнім часом, з різними аспектами оптимізації, стійкості і керування геотехнічними системами. Для обґрунтування моделювання та ефективного використання аналітичних методів розрахунку необхідні відповідні міграційні параметри водоносних і слабопроникних шарів. Тому важливим завданням подальших досліджень повинне з'явитися накопичення експериментальних даних про процеси і параметри фізико-хімічної взаємодії, особливо за даними польового випробувань. Необхідна також подальша розробка та апробація фізико-хімічних моделей теплопереносу стосовно до реальних водоносних шарів з різними видами неоднорідності.

### Бібліографічні посилання

1. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. – М.: Недра, 1972. – 288 с.
2. Орадовская А. Е. Миграция вещества и тепла в подземных водах /Гидрогеологические исследования за рубежом /Под ред. Н. А. Маринова. – М.: Недра, 1982. – с. 33 – 74.
3. Гидродинамика и теплообмен в одно- и двухфазных потоках/ Под. ред. Щукина Л. Н./Труды Московского энергетического института, №132. – М.: Изд. МЭИ, 1987. – 132 с.
4. Буляндра О. Ф. Технічна термодинаміка/ Підр. для енерг. спец. ВНЗів. – К.: Техніка, 2001. – 320 с.

*Надійшла до редколегії 21.02.13*