

МОДЕЛЮВАННЯ ЛОГІСТИЧНИХ ПРОЦЕСІВ ВИКОНАННЯ ЗАМОВЛЕНЬ ІНТЕРНЕТ-МАГАЗИНОМ ЯК МЕРЕЖІ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ

© 2015 СКИЦЬКО В. І., ІГНАТОВА Ю. В.

УДК 004.942: 519.872:658.8

Скицько В. І., Ігнатова Ю. В. Моделювання логістичних процесів виконання замовлень Інтернет-магазином як мережі масового обслуговування

У статті охарактеризовано ключові моменти функціонування Інтернет-магазину. Розглянуто основні кроки діяльності типового Інтернет-магазину та розроблено схему його функціонування. Окремо виділено завдання роботи двох фаз Інтернет-магазину: відділів складу та власної служби доставки. На основі теорії масового обслуговування запропоновано стохастичну модель функціонування зазначених фаз. Розроблена стохастична модель двофазової мережі масового обслуговування з пуассонівським вхідним потоком наведена в динаміці та стаціонарному режимі роботи. За допомогою використання умови збереження потоку виведено аналітичні вирази основних операційних характеристик процесів виконання замовлень Інтернет-магазином як мережі масового обслуговування в стаціонарному режимі роботи. Зокрема, виведено аналітичні вирази для ймовірностей станів системи, частки простоїв мережі та середньої кількості вимог у системі. На основі запропонованої моделі визначено необхідність розроблення керованої системи масового обслуговування в подальших дослідженнях.

Ключові слова: Інтернет-магазин, логістика, склад, доставка, мережа масового обслуговування, пуассонівський потік.

Рис.: 2. **Формул.:** 8. **Бібл.:** 16.

Скицько Володимир Іванович – кандидат економічних наук, доцент, докторант кафедри економіко-математичного моделювання, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана (пр. Перемоги, 54/1, Київ, 03068, Україна)

E-mail: skitsko.kneu@gmail.com

Ігнатова Юлія Володимирівна – кандидат економічних наук, доцент кафедри економіко-математичного моделювання, Київський національний економічний університет ім. В. Гетьмана (пр. Перемоги, 54/1, Київ, 03068, Україна)

E-mail: u1@ukr.net

УДК 004.942: 519.872:658.8

Скицько В. І., Ігнатова Ю. В. Моделирование логистических процессов выполнения заказов Интернет-магазином как сети массового обслуживания

В статье охарактеризованы ключевые моменты функционирования Интернет-магазина. Рассмотрены основные шаги деятельности типового Интернет-магазина и разработана схема его функционирования. Отдельно выделена задача работы двух фаз Интернет-магазина: отделов склада и собственной службы доставки. На основе теории массового обслуживания предложена стохастическая модель функционирования указанных фаз. Разработанная стохастическая модель двухфазной сети массового обслуживания с пуассоновским входным потоком приведена в динамике и стационарном режиме работы. С помощью использования условия сохранения потока выведены аналитические выражения основных операционных характеристик процессов выполнения заказов Интернет-магазином как сети массового обслуживания в стационарном режиме работы. В частности, выведены аналитические выражения для вероятностей состояний системы, доли простоев сети и среднего количества требований в системе. На основе предложенной модели определена необходимость разработки управляемой системы массового обслуживания в дальнейших исследованиях.

Ключевые слова: Интернет-магазин, логистика, склад, доставка, сеть массового обслуживания, пуассоновский поток.

Рис.: 2. **Формул.:** 8. **Библ.:** 16.

Скицько Владимир Иванович – кандидат экономических наук, доцент, докторант кафедры экономико-математического моделирования, Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана (пр. Победы, 54/1, Киев, 03068, Украина)

E-mail: skitsko.kneu@gmail.com

Ігнатова Юлия Владимировна – кандидат экономических наук, доцент кафедры экономико-математического моделирования, Киевский национальный экономический университет им. В. Гетьмана (пр. Победы, 54/1, Киев, 03068, Украина)

E-mail: u1@ukr.net

UDC 004.942: 519.872:658.8

Skitsko V. I., Ignatova Ju. V. Modeling Logistic Processes of Orders Fulfillment by Online Store as a Queueing Network

The article describes the key points of an online store functioning. The basic steps of activity of a typical online store has been considered and a scheme for its functioning has been elaborated. Separately has been allocated the operation task for two phases in the online store activity: depot departments and own delivery service. On the basis of the queueing theory, a stochastic model of functioning of the indicated phases has been proposed. The created stochastic model of a two-phase queueing network with a poisson input has been provided in both dynamics and stationary operating condition. Using the condition of the flow maintaining, analytical expressions of the basic operating characteristics of processes of fulfilling the orders by online store as a queueing network in the stationary mode has been derived. In particular have been derived analytical expressions for the probabilities of the system states, the share of network downtime and the average number of claims in the system. On the basis of the proposed model, the need to develop in further researches a controlled queueing network system has been determined.

Key words: online store, logistics, warehouse, shipping, queueing network, poisson stream.

Pic.: 2. **Formulae:** 8. **Bibl.:** 16.

Skitsko Volodymyr I. – Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor, Candidate on Doctor Degree of the Department of economic and mathematical modeling, Kyiv National Economic University named after V. Getman (pr. Peremogy, 54/1, Kyiv, 03068, Ukraine) E-mail: skitsko.kneu@gmail.com

Ignatova Iuliia V. – Candidate of Sciences (Economics), Associate Professor of the Department of Economic and Mathematical Modeling, Kyiv National Economic University named after V. Getman (pr. Peremogy, 54/1, Kyiv, 03068, Ukraine)

E-mail: u1@ukr.net

Стрімкий розвиток інформаційно-комунікаційних засобів та технологій спричинив появу компаній (фірм, підприємств) нового покоління, діяльність яких зосереджена насамперед в Інтернеті. Такі підприємства відносять до сфери електронного бізнесу,

де одне із основних місць займають Інтернет-магазини, які формують сферу електронної комерції. На сьогодні Інтернет-магазин – це не просто сайт, а повноцінний інноваційний магазин з широким набором товарів та послуг, що здатний конкурувати із традиційними великими

торгівельними мережами. Інтернет-магазин є складною організаційною структурою, в якій співпрацюють традиції та інновації. На нашу думку, найбільше інновацій існує в процесах, що пов'язані зі здійсненням замовлення покупцем за допомогою сайту Інтернет-магазину: вибір товару, оформлення замовлення, оплата. Комплектування замовлення на складі наразі може здійснюватися як людьми (традиційна складова), так і роботами (інноваційна складова). До «традиційних» процесів можна віднести перевезення замовлень автомобільним транспортом. Проте й тут намічаються зміни та використання інновацій. Наприклад, уже зараз здобуває популярності доставка невеликих замовлень дронами, а всевітньвідомий інтернет-магазин «Amazon» має намір запатентувати інноваційний спосіб доставки простих товарів (дитячих іграшок, деяких автозапчастин тощо) за допомогою вантажівок з 3D-принтерами [1].

Застосування інновацій у роботі Інтернет-магазину сприяє ефективнішому його функціонуванню, проте їх впровадження зумовлює й певні зміни, зокрема, у системі управління, де одне з основних місць займає моделювання бізнес-процесів. Таке моделювання може здійснюватися з використанням інструментарію мереж Петрі, мереж масового обслуговування, орієнтованих графів, методології моделювання потоків даних, методології структурного аналізу та проектування тощо.

У даних дослідження зосередимося на проблемі формалізації та моделювання процесів функціонування Інтернет-магазину як дискретної системи за допомогою мереж масового обслуговування.

На сьогодні різні аспекти функціонування Інтернет-магазинів досліджують у своїх роботах, зокрема, такі іноземні та вітчизняні науковці та практики: Апатова Н. В. і Малков С. В. [2, 3], Савенко І. В., Капінус Л. В. і Скригун Н. П. [4], Дюбанов О. С. і Рамазанов С. К. [5], Пурський О. І., Гринюк Б. В. та Жарій І. О. [6], Ремі Г. (Remy G.) [7], Ліао З. (Liao Z. Q.) і Чеунг М. (Cheung M. T.) [8] та інші. Окрім того, існують різні Інтернет-видання, на сторінках яких висвітлюються різноманітні проблеми електронної комерції, наприклад [9–11].

Аналіз зазначених та інших джерел дозволяє дійти висновку про важливість, багатогранність та актуальність даної проблематики, зокрема, через її інноваційність та постійну мінливість. Проте існує низка малодосліджених питань. Так, мало уваги приділено проблемі використання сучасного інструментарію моделювання бізнес-процесів Інтернет-магазину.

Мета статті полягає в розробці математичної моделі логістичних процесів виконання замовлень Інтернет-магазином з використанням інструментарію теорії масового обслуговування.

Дедалі більше покупок здійснюється в Інтернет-магазинах як у світі, так і в Україні. Зокрема, на сьогодні кількість вітчизняних онлайн-покупців приблизно дорівнює 4 млн осіб, і ця кількість у поточному році продовжує зростати [12]. Незважаючи на різноманітність Інтернет-магазинів (зокрема, з аналізом вітчизняного ринку електронної комерції можна ознайомитися в [9, 10, 13]), бізнес-процеси усіх таких магазинів є подібними.

У загальному випадку роботу Інтернет-магазину можна описати такими кроками [13]: 1) вибір покупцем необхідного товару в каталозі Інтернет-магазину та додавання його в кошик замовлення; 2) оформлення покупцем замовлення на сайті Інтернет-магазину (відомості про покупця, контакти дані, адреса та час доставки тощо); 3) здійснення оплати за замовлення зручним для покупця способом (як правило, для Інтернет-магазинів це платіжна картка); 4) підтвердження щодо прийняття до виконання замовлення на електронну пошту покупця; 5) попадання замовлення у відділ продаж Інтернет-магазину; 6) підтвердження складом наявності необхідної кількості товарів у замовленні. У разі фізичної відсутності необхідної кількості товару повідомляється відділ продаж, в якому приймається рішення або щодо зміни замовлення (заміни позицій за згодою покупця), або про замовлення необхідного товару в постачальників (про що покупця може бути й не повідомлено); 7) оформлення замовлення (пакування товару, створення необхідних супровідних документів тощо); 8) відправлення замовлення покупцю за допомогою служби доставки (власної або сторонньої організації); 9) отримання замовлення покупцем. Перевірка наявності товару та відсутність його пошкоджень, у разі їх виникнення виставлення претензій до служби доставки та Інтернет-магазину, оформлення повернення. Здійснення оплати за замовлення, якщо вона не була здійснена раніше. На цьому етапі покупець також може відмовитися від покупки. У разі отримання товару покупцем та повної оплати замовлення вважається повністю виконаним, а покупка здійсненою.

Роботу Інтернет-магазину як взаємодію покупця та продавця для загального випадку схематично представлено на *рис. 1*. Головною метою схеми є представлення руху замовлення від етапу його здійснення (самостійного чи з допомогою оператора Call-центру) до отримання товару покупцем. Деякі процеси на схемі упущені з метою її більш легкого сприйняття. Зокрема, на схемі не вказано процеси оплати за замовлення, яка може відбутися як на етапі самостійного здійснення замовлення покупцем на сайті Інтернет-магазину за допомогою платіжної картки, так і під час отримання замовлення готівкою або платіжною карткою (при наявності терміналу у службі доставки або у поштоматі).

Потік подій в Інтернет-магазині утворюється послідовними надходженнями замовлень у випадкові моменти часу. Потік замовлень характеризується інтенсивністю, тобто частотою появи подій, що надходять у магазин за одиницю часу. А отже, функціонування Інтернет-магазину доцільно представити за допомогою мережі масового обслуговування. До головних операційних показників функціонування такої мережі належать: кількість каналів обслуговування, обсяг черги, ймовірність відмови, ймовірність обслуговування, відносна й абсолютна пропускні спроможності системи, середній час перебування заявки в черзі, середній час очікування та обслуговування. Визначивши оптимальні значення цих показників, можна розрахувати оптимальну кількість обслуговуючого персоналу, оптимальний час обслуговування, розмір черги тощо.

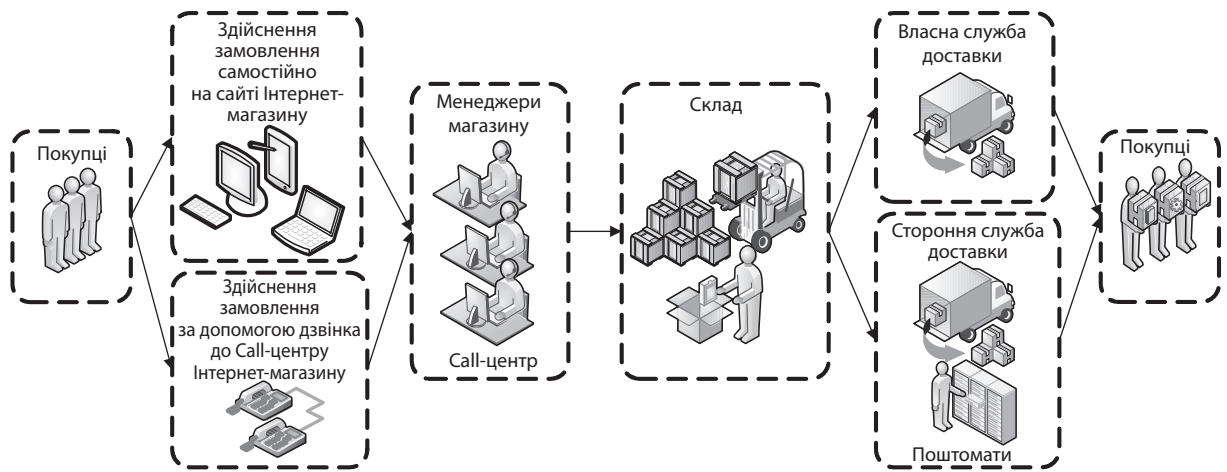


Рис. 1. Структурна схема роботи Інтернет-магазину

Джерело: авторська розробка.

Побудова математичної моделі роботи усіх підрозділів Інтернет-магазину є досить складною і об'ємною задачею, тому пропонується її вирішувати частинами. Зокрема, розглянемо докладніше роботу складу і відділу власної служби доставки Інтернет-магазину (як основних складових елементів логістичних процесів виконання замовлень), з метою визначення основних операційних характеристик їх роботи. Спростимо їх функціонування до такого: на етапі складу працівники збирають та упаковують замовлення від клієнтів і кожне замовлення відправляють на наступний етап – розвезення замовленого товару власною службою доставки до клієнта (покупця).

Для моделювання роботи цих двох підрозділів Інтернет-магазину використаємо двофазну мережу масового обслуговування. Припустимо, що перша фаза (склад) має « M » каналів обслуговування (тобто працівників складу), а друга (власна служба доставки) – « K » каналів обслуговування (тобто працівників служби доставки). За класичним підходом, до такої мережі надходить пуассонівський потік замовлень на обслуговування із параметром λ , тобто, наприклад, на склад поступають окремі замовлення з частотою λ замовлень на годину. При цьому інтенсивність обслуговування кожного замовлення є величиною, яка має експоненціальний закон розподілу ймовірностей із параметром μ_1 на першій фазі та μ_2 на другій фазі. Тобто кожний працівник складу збирає і пакує в середньому μ_1 замовлень на годину. Аналогічно, кожен працівник відділу доставки обробляє в середньому μ_2 замовлень на годину. Дисципліна обслуговування є FIFO (перший прийшов, перший обслужився),

тобто замовлення обслуговуються по мірі надходження на склад за відсутності пріоритету. Докладніше схему роботи зазначених фаз зображено на рис. 2.

Стохастична модель роботи мережі масового обслуговування в динаміці представлена системою однорідних лінійних диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 P'_{0(0)0(0)}(t) &= -\lambda P_{0(0)0(0)}(t) + \mu_2 P_{0(0)0(0)}(t); \\
 P'_{0(0)0(1)}(t) &= -(\lambda + \mu_2) P_{0(0)0(1)}(t) + \\
 &+ \mu_1 P_{0(1)0(0)}(t) + 2\mu_2 P_{0(0)0(2)}(t); \\
 P'_{0(0)0(2)}(t) &= -(\lambda + 2\mu_2) P_{0(0)0(2)}(t) + \\
 &+ \mu_1 P_{0(1)0(1)}(t) + 3\mu_2 P_{0(0)0(3)}(t); \\
 &\dots \\
 P'_{0(0)0(k)}(t) &= -(\lambda + k\mu_2) P_{0(0)0(k)}(t) + \\
 &+ \mu_1 P_{0(1)0(k-1)}(t) + k\mu_2 P_{0(0)0(k)}(t); \\
 P'_{0(0)1(k)}(t) &= -(\lambda + k\mu_2) P_{0(0)1(k)}(t) + \\
 &+ \mu_1 P_{0(1)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{0(0)2(k)}(t); \\
 P'_{0(0)2(k)}(t) &= -(\lambda + k\mu_2) P_{0(0)2(k)}(t) + \\
 &+ \mu_1 P_{0(1)1(k)}(t) + k\mu_2 P_{0(0)3(k)}(t); \\
 &\dots \\
 P'_{0(0)n(k)}(t) &= -(\lambda + k\mu_2) P_{0(0)n(k)}(t) + \\
 &+ \mu_1 P_{0(1)n-1(k)}(t) + k\mu_2 P_{0(0)n+1(k)}(t); \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

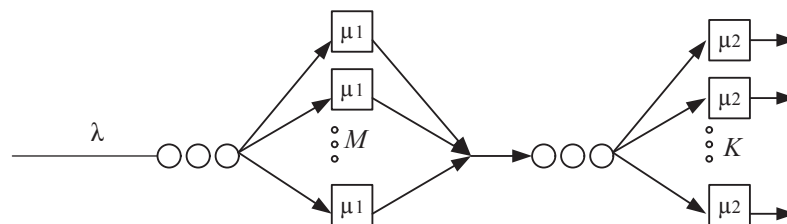


Рис. 2. Структурна схема мережі масового обслуговування на фазах складу та власної служби доставки Інтернет-магазину

Джерело: авторська розробка.

$$P'_{0(1)0(0)}(t) = -(\lambda + k\mu_1)P_{0(0)n(k)}(t) + \lambda P_{0(0)0(0)}(t) + \mu_2 P_{0(1)0(1)}(t);$$

$$P'_{0(2)0(0)}(t) = -(\lambda + 2k\mu_1)P_{0(0)n(k)}(t) + \lambda P_{0(1)0(0)}(t) + \mu_2 P_{0(2)0(1)}(t);$$

...

$$P'_{0(m)0(0)}(t) = -(\lambda + m\mu_1)P_{0(m)0(0)}(t) + \lambda P_{0(m-1)0(0)}(t) + \mu_2 P_{0(m)0(1)}(t);$$

$$P'_{1(m)0(0)}(t) = -(\lambda + m\mu_1)P_{1(m)0(0)}(t) + \lambda P_{0(m)0(0)}(t) + \mu_2 P_{1(m)0(1)}(t);$$

$$P'_{2(m)0(0)}(t) = -(\lambda + m\mu_1)P_{2(m)0(0)}(t) + \lambda P_{1(m)0(0)}(t) + \mu_2 P_{2(m)0(1)}(t);$$

...

$$P'_{i(m)0(0)}(t) = -(\lambda + m\mu_1)P_{i(m)0(0)}(t) + \lambda P_{i-1(m)0(0)}(t) + \mu_2 P_{i(m)0(1)}(t);$$

...

$$P'_{0(1)0(1)}(t) = -(\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{0(1)0(1)}(t) + \lambda P_{0(0)0(1)}(t) + 2\mu_1 P_{0(2)0(0)}(t) + 2\mu_2 P_{0(1)0(2)}(t);$$

$$P'_{0(2)0(1)}(t) = -(\lambda + 2\mu_1 + \mu_2)P_{0(2)0(1)}(t) + \lambda P_{0(1)0(1)}(t) + 2\mu_1 P_{0(3)0(0)}(t) + 2\mu_2 P_{0(2)0(2)}(t);$$

$$P'_{0(1)0(2)}(t) = -(\lambda + \mu_1 + 2\mu_2)P_{0(1)0(2)}(t) + \lambda P_{0(0)0(2)}(t) + 2\mu_1 P_{0(2)0(1)}(t) + 3\mu_2 P_{0(1)0(3)}(t);$$

$$P'_{0(2)0(2)}(t) = -(\lambda + 2\mu_1 + 2\mu_2)P_{0(2)0(2)}(t) + \lambda P_{0(1)0(2)}(t) + 3\mu_1 P_{0(3)0(1)}(t) + 3\mu_2 P_{0(2)0(3)}(t);$$

...

$$P'_{0(m)0(1)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + \mu_2)P_{0(m)0(1)}(t) + \lambda P_{0(m-1)0(1)}(t) + m\mu_1 P_{0(m)0(1)}(t) + 2\mu_2 P_{0(m)0(2)}(t);$$

$$P'_{0(1)0(k)}(t) = -(\lambda + \mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)0(1)}(t) + \lambda P_{0(0)0(k)}(t) + 2\mu_1 P_{0(2)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{0(1)1(k)}(t);$$

$$P'_{0(m)0(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)0(k)}(t) + \lambda P_{0(m-1)0(k)}(t) + m\mu_1 P_{1(m)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{0(m)1(k)}(t);$$

$$P'_{1(m)0(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{1(m)0(k)}(t) + \lambda P_{0(m)0(k)}(t) + m\mu_1 P_{2(m)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{1(m)1(k)}(t);$$

$$P'_{2(m)0(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)0(k)}(t) + \lambda P_{1(m)0(k)}(t) + m\mu_1 P_{3(m)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{2(m)1(k)}(t);$$

...

$$P'_{i(m)0(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{i(m)1(k)}(t) + \lambda P_{i-1(m)0(k)}(t) + m\mu_1 P_{i+1(m)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{i(m)1(k)}(t);$$

...

$$P'_{0(m)j(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)j(k)}(t) + \lambda P_{0(m-1)j(k)}(t) + m\mu_1 P_{1(m)j-1(k)}(t) + k\mu_2 P_{0(m)j+1(k)}(t);$$

...

$$P'_{i(m)1(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{i(m)1(k)}(t) + \lambda P_{i-1(m)1(k)}(t) + m\mu_1 P_{i+1(m)0(k)}(t) + k\mu_2 P_{i(m)2(k)}(t);$$

$$P'_{1(m)j(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{1(m)j(k)}(t) + \lambda P_{0(m)j(k)}(t) + m\mu_1 P_{2(m)j-1(k)}(t) + k\mu_2 P_{1(m)j+1(k)}(t);$$

...

$$P'_{i(m)j(k)}(t) = -(\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{i(m)j(k)}(t) + \lambda P_{i-1(m)j(k)}(t) + m\mu_1 P_{i+1(m)j-1(k)}(t) + k\mu_2 P_{i(m)j+1(k)}(t),$$

де $P_{i(m)j(k)}(t)$ – імовірність того, що в момент часу t працівники складу обслуговують m замовлень на першій фазі складу ($m = 1, 2, 3, \dots, M$) та i замовлень очікують на обслуговування на цій самій фазі – перебувають у черзі ($i = 0, 1, 2, \dots$); у момент часу t відділ доставки обслуговує k клієнтів ($k = 1, 2, 3, \dots, K$) на другій фазі та j вимог очікують на обслуговування на цій самій фазі – перебувають у черзі ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$). Розмір кожної черги є необмеженим.

Наприклад, стан $P_{0(0)0(0)}(t)$ характеризує імовірність простою Інтернет-магазину, тобто в момент часу t на фазах складу та власної служби доставки замовлень на оброблення не надійшло; стан $P_{0(1)0(0)}(t)$ характеризує імовірність обробки одного замовлення на фазі складу в момент часу t , причому на другій фазі та в черзі замовлення відсутні; стан $P_{0(1)2(1)}(t)$ характеризує ймовірність обробки в момент часу t одного замовлення на фазі складу та одного на фазі доставки, причому в черзі на доставку знаходиться ще два замовлення і т. д. Система (1) містить усі можливі несумісні між собою стани системи.

Із моделі, представленої системою диференціальних рівнянь, випливає, що черги на обслуговування утворюються в момент часу t , коли всі m або k каналів будуть зайнятими.

Наведемо модель роботи мережі масового обслуговування в стаціонарному режимі:

$$\lambda P_{0(0)0(0)} = \mu_2 P_{0(0)0(1)};$$

$$(\lambda + \mu_2)P_{0(0)0(1)} = \mu_1 P_{0(1)0(0)} + 2\mu_2 P_{0(0)0(2)};$$

$$(\lambda + 2\mu_2)P_{0(0)0(2)} = \mu_1 P_{0(1)0(1)} + 3\mu_2 P_{0(0)0(3)};$$

...

$$(\lambda + k\mu_2)P_{0(0)0(k)} = \mu_1 P_{0(1)0(k-1)} + k\mu_2 P_{0(0)1(k)};$$

$$(\lambda + k\mu_2)P_{0(0)1(k)} = \mu_1 P_{0(1)0(k)} + k\mu_2 P_{0(0)2(k)};$$

$$(\lambda + k\mu_2)P_{0(0)2(k)} = \mu_1 P_{0(1)1(k)} + k\mu_2 P_{0(0)3(k)};$$

...

$$(\lambda + k\mu_2)P_{0(0)n(k)} = \mu_1 P_{0(1)n-1(k)} + k\mu_2 P_{0(0)n+1(k)};$$

...

$$(\lambda + k\mu_1)P_{0(0)n(k)} = \lambda P_{0(0)0(0)} + \mu_2 P_{0(1)0(1)};$$

(2)

$$\begin{aligned}
 (\lambda + 2k\mu_1)P_{0(0)n(k)} &= \lambda P_{0(1)0(0)} + \mu_2 P_{0(2)0(1)}; \\
 &\dots \\
 (\lambda + m\mu_1)P_{0(m)0(0)} &= \lambda P_{0(m-1)0(0)} + \mu_2 P_{0(m)0(1)}; \\
 (\lambda + m\mu_1)P_{1(m)0(0)} &= \lambda P_{0(m)0(0)} + \mu_2 P_{1(m)0(1)}; \\
 (\lambda + m\mu_1)P_{2(m)0(0)} &= \lambda P_{1(m)0(0)} + \mu_2 P_{2(m)0(1)}; \\
 &\dots \\
 (\lambda + m\mu_1)P_{i(m)0(0)} &= \lambda P_{i-1(m)0(0)} + \mu_2 P_{i(m)0(1)}; \\
 &\dots \\
 (\lambda + \mu_1 + \mu_2)P_{0(1)0(1)} &= \lambda P_{0(0)0(1)} + \\
 &+ 2\mu_1 P_{0(2)0(0)} + 2\mu_2 P_{0(1)0(2)}; \\
 (\lambda + 2\mu_1 + \mu_2)P_{0(2)0(1)} &= \lambda P_{0(1)0(1)} + \\
 &+ 2\mu_1 P_{0(3)0(0)} + 2\mu_2 P_{0(2)0(2)}; \\
 (\lambda + \mu_1 + 2\mu_2)P_{0(1)0(2)} &= \lambda P_{0(0)0(2)} + \\
 &+ 2\mu_1 P_{0(2)0(1)} + 3\mu_2 P_{0(1)0(3)}; \\
 (\lambda + 2\mu_1 + 2\mu_2)P_{0(2)0(2)} &= \lambda P_{0(1)0(2)} + \\
 &+ 3\mu_1 P_{0(3)0(1)} + 3\mu_2 P_{0(2)0(3)}; \\
 &\dots \\
 (\lambda + m\mu_1 + \mu_2)P_{0(m)0(1)} &= \lambda P_{0(m-1)0(1)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{0(m)0(1)} + 2\mu_2 P_{0(m)0(2)}; \\
 (\lambda + \mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)0(1)} &= \lambda P_{0(0)0(k)} + \\
 &+ 2\mu_1 P_{0(2)0(k)} + k\mu_2 P_{0(1)0(k)}; \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)0(k)} &= \lambda P_{0(m-1)0(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{1(m)0(k)} + k\mu_2 P_{0(m)0(k)}; \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{1(m)0(k)} &= \lambda P_{0(m)0(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{2(m)0(k)} + k\mu_2 P_{1(m)0(k)}; \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)0(k)} &= \lambda P_{1(m)0(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{3(m)0(k)} + k\mu_2 P_{2(m)0(k)}; \\
 &\dots \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{i(m)0(k)} &= \lambda P_{i-1(m)0(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{i+1(m)0(k)} + k\mu_2 P_{i(m)0(k)}; \\
 &\dots \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{0(m)j(k)} &= \lambda P_{0(m-1)j(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{1(m)j-1(k)} + k\mu_2 P_{0(m)j+1(k)}; \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{i(m)1(k)} &= \lambda P_{i-1(m)1(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{i+1(m)0(k)} + k\mu_2 P_{i(m)2(k)}; \\
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{1(m)j(k)} &= \lambda P_{0(m)j(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{2(m)j-1(k)} + k\mu_2 P_{1(m)j+1(k)}; \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (\lambda + m\mu_1 + k\mu_2)P_{i(m)j(k)} &= \lambda P_{i-1(m)j(k)} + \\
 &+ m\mu_1 P_{i+1(m)j-1(k)} + k\mu_2 P_{i(m)j+1(k)}.
 \end{aligned}$$

Розглянемо роботу системи (2) у стаціонарному режимі. Основним завданням є визначення аналітичних виразів для ймовірностей станів системи і середньої кількості замовлень в системі.

Нехай $\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1}$, $\rho_2 = \frac{\lambda}{\mu_2}$, $\rho_{12} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$. Визначимо

ймовірності станів із системи (2) з точністю до $P_{0(0)0(0)}$. Для цього використаємо так звану умову збереження потоку, яка детально описана в [14–16].

Так, наприклад, використовуючи умову збереження потоку, з першого рівняння системи (2), отримаємо аналітичний вираз для стану $P_{0(0)0(1)}$ з точністю до:

$$P_{0(0)0(0)} : P_{0(0)0(1)} = \frac{\lambda}{\mu_2} P_{0(0)0(0)} = \rho_2 P_{0(0)0(0)}.$$

Аналогічно з другого рівняння системи (2), використовуючи умову збереження потоку, визначимо аналітичний вираз для стану $P_{0(0)0(2)}$ з точністю до $P_{0(0)0(0)}$. Отримаємо:

$$\begin{aligned}
 \lambda P_{0(0)0(1)} &= 2\mu_2 P_{0(0)0(2)} \rightarrow \lambda \frac{\lambda}{\mu_2} P_{0(0)0(0)} = 2\mu_2 P_{0(0)0(2)} \rightarrow \\
 \rightarrow P_{0(0)0(2)} &= \frac{\lambda^2}{2\mu_2^2} P_{0(0)0(0)} \rightarrow P_{0(0)0(2)} = \frac{\rho_2^2}{2!} P_{0(0)0(0)}.
 \end{aligned}$$

Аналогічно одержимо ймовірність обробки k замовлень на фазі власної служби доставки, причому фаза оброблення замовлень складу є вільною, у черзі замовлення відсутні:

$$P_{0(0)0(k)} = \frac{\rho_2^k}{k!} P_{0(0)0(0)}. \quad (3)$$

Далі розглянемо рівняння

$$(\lambda + \mu_1)P_{0(1)0(0)} = \lambda P_{0(0)0(0)} + \mu_2 P_{0(1)0(1)}.$$

Застосовуючи до нього умову збереження потоку, одержимо:

$$P_{0(1)0(0)} = \frac{\lambda}{\mu_1} P_{0(0)0(0)} = \rho_1 P_{0(0)0(0)}.$$

А значить, аналогічно (3) отримаємо ймовірність обробки m замовлень на фазі складу, причому фаза власної служби доставки є вільною, а в черзі замовлення відсутні:

$$P_{0(m)0(0)} = \frac{\rho_1^m}{m!} P_{0(0)0(0)}. \quad (4)$$

Розглянемо рівняння

$$(\lambda + m\mu_1)P_{1(m)0(0)} = \lambda P_{0(m)0(0)} + \mu_2 P_{1(m)0(1)}.$$

З нього отримаємо:

$$P_{1(m)0(0)} = \frac{\lambda}{m\mu_1} P_{0(m)0(0)} = \frac{\rho_1^{m+1}}{m \cdot m!} P_{0(0)0(0)}. \quad (5)$$

Аналогічно визначимо аналітичні вирази для ймовірностей станів мережі з точністю до $P_{0(0)0(0)}$:

$$\begin{aligned}
 P_{i(m)0(0)} &= \frac{\rho_1^{m+i}}{m^i \cdot m!} P_{0(0)0(0)}; \\
 P_{0(0)j(k)} &= \frac{\rho_2^{k+j}}{k^j \cdot k!} P_{0(0)0(0)}; \\
 P_{0(m)0(k)} &= \frac{\rho_1^m \rho_2^k}{m! \cdot k!} P_{0(0)0(0)}; \\
 P_{0(m)j(k)} &= \frac{\rho_1^m \rho_2^{k+j}}{m! \cdot k! \cdot k^j} P_{0(0)0(0)} = \\
 &= \frac{\rho_1^m \rho_2^{k+j}}{m! \cdot k! \cdot k \cdot (k - \rho_2)} P_{0(0)0(0)}; \quad (6) \\
 P_{i(m)0(k)} &= \frac{\rho_1^m \cdot \rho_2^k \cdot \rho_1^i}{m! \cdot k! \cdot m^i} P_{0(0)0(0)} = \\
 &= \frac{\rho_1^{m+i} \cdot \rho_2^k}{m! \cdot k! \cdot m^i \cdot (m - \rho_1)} P_{0(0)0(0)}; \\
 P_{i(m)j(k)} &= \frac{\rho_1^{m+i} \cdot \rho_2^{k+j}}{m! \cdot k! \cdot m^i \cdot k^j} P_{0(0)0(0)} = \\
 &= \frac{\rho_1^{m+i} \cdot \rho_2^{k+j}}{m! \cdot k! \cdot (m - \rho_1) \cdot (k - \rho_2)} P_{0(0)0(0)}.
 \end{aligned}$$

Тоді, використовуючи умову нормування отримаємо частку простоїв мережі:

$$\begin{aligned}
 P_{0(0)0(0)} &= \frac{m! \cdot k! \cdot (m - \rho_1) \cdot (k - \rho_2)}{m! \cdot k! \cdot (m - \rho_1) \cdot (k - \rho_2) \cdot e^{\rho_1 + \rho_2} +} \quad (7) \\
 &+ (k! + \rho_2^k)(k - \rho_2) \cdot \rho_1^{m+1} + \\
 &+ (m! + \rho_1^m)(m - \rho_1) \cdot \rho_2^{k+1} + \rho_1^{m+1} \cdot \rho_2^{k+1}
 \end{aligned}$$

Отже, можна легко визначити середню кількість замовлень в мережі, яка дорівнюватиме:

$$\begin{aligned}
 Z &= \left[\sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_{i(m)0(0)} + \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_{0(0)j(k)} + \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot P_{i(m)0(k)} + \right. \\
 &+ \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_{0(m)j(k)} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} j \cdot P_{i(m)j(k)} + \\
 &+ m \cdot P_{0(m)0(0)} + k \cdot P_{0(0)0(k)} \left. \right] P_{0(0)0(0)} = \\
 &= \left(m \cdot \frac{\rho_1^m}{m!} + k \cdot \frac{\rho_2^k}{k!} + \frac{\rho_1^m \rho_2^k}{m! k!} \times \right. \quad (8) \\
 &\times \left(m \cdot k + \frac{\rho_1 \rho_2}{m \cdot k \cdot (m - \rho_1)^2 (k - \rho_2)^2} \right) + \\
 &+ \frac{\rho_1^m}{m!} \cdot \left(1 + \frac{\rho_2^k}{k!} \right) \cdot \frac{\rho_1}{m \cdot (m - \rho_1)^2} + \\
 &+ \frac{\rho_2^k}{k!} \cdot \left(1 + \frac{\rho_1^m}{m!} \right) \cdot \frac{\rho_2}{k \cdot (k - \rho_2)^2} \left. \right) \cdot P_{0(0)0(0)}.
 \end{aligned}$$

Застосуємо отримані результати на умовному прикладі. Встановимо такі початкові умови для деякого Інтернет-магазину: нехай інтенсивність надходження замовлень в мережу складає 3 замовлення на годину.

Інтенсивність обслуговування на першій фазі складу дорівнює 5 замовлень на годину одним працівником, інтенсивність обслуговування на другій фазі доставки – 8 замовлень на годину одним працівником. Тоді $\lambda = 3$, $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 8$. Припустимо, що на кожній фазі працює по 2 працівника, тобто $M = 2$, $K = 2$, і в черзі, як правило, може перебувати не більше чотирьох замовлень. Використовуючи (7), імовірність простою Інтернет-магазину на зазначених фазах становитиме $P_{0(0)0(0)} = 0,363$, або 36,3%, а середня кількість замовлень, що знаходяться в мережі, становитиме, за (8), $Z = 12,6 \approx 13$ замовлень. Отже, кількість працівників на зазначених фазах є надлишковою, оскільки 36,3% робочого часу вони не зайняті. Якщо замовлення надходять з інтенсивністю три на годину, то в мережі (на фазах складу, доставки та в чергах) у середньому перебуватиме 13 замовлень незалежно від часу t , причому середня тривалість перебування одного замовлення в мережі становитиме

$$T = \frac{Z}{\lambda} = \frac{13}{3} = 4,3 \text{ год.}$$

Використовуючи знайдені показники, можна розрахувати такі операційні характеристики роботи Інтернет-магазину: довжина черги замовлень та час їх перебування в черзі, кількість працівників, вільних від обслуговування, кількість працівників, зайнятих в обслуговуванні, збитки від простоїв, прибуток від функціонування та ін.

ВИСНОВКИ

Незважаючи на кризові явища в економіці України, вітчизняні Інтернет-магазини продовжують розвиватися: розширюється асортимент товарів та послуг; впроваджуються нові форми доставки та оплати замовлень; покращуються інтерфейси сайтів; впроваджуються мобільні додатки як альтернатива традиційним сайтам тощо. Інтернет-магазин є унікальним сучасним господарським утворенням, яке поєднує традиційні та інноваційні засоби та технології господарювання. Окрім того, ринок електронної комерції є досить мінливим, що зумовлює необхідність в ефективному управлінні Інтернет-магазином, зокрема, з використанням різних економіко-математичних методів та моделей.

У роботі запропонована математична модель логістичних процесів виконання замовлень Інтернет-магазином (складу та відділу власної служби доставки) з використанням інструментарію теорії масового обслуговування. За допомогою даної моделі легко знайти оптимальну кількість обслуговуючого персоналу зазначених структурних підрозділів Інтернет-магазину, а також оптимальний час обслуговування одного замовлення. За цим самим принципом можна охопити роботу й інших підрозділів Інтернет-магазину. За продемонстрованим алгоритмом використання умови збереження потоку можна вивести аналітичні вирази для всіх ключових операційних характеристик бізнес-процесів Інтернет-магазину та визначити їх оптимальне значення, використовуючи, наприклад, метод імітаційного моделювання.

У подальших дослідженнях проблем моделювання логістичних процесів виконання замовлень Інтернет-

магазином вбачається за доцільне зосередитися на створенні керованої системи масового обслуговування, яка б дозволила оптимізувати роботу такого магазину за низкою його вищезазначених операційних характеристик. Зокрема, одним із важливих завдань є оптимізація функціонування Інтернет-магазину за кількістю обслуговуючого персоналу. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Компания Amazon запатентовала инновационный способ доставки [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://new-retail.ru/novosti/kompaniya_amazon_zapatentovala_innovatsionnyy_sposob_dostavki4454/
2. **Апатова Н. В.** Рискология виртуального предпринимательства : монография / Н. В. Апатова, С. В. Малков. – Симферополь : ДИАЙПИ, 2013. – 353 с.
3. **Апатова Н. В.** Предпринимательство в Интернет / Н. В. Апатова, С. В. Малков // Учёные записки Таврического национального университета им. В. И. Вернадского. Серия «Экономика и управление». – 2012. – Т. 25 (64), № 3. – С. 20 – 27.
4. **Капінус Л. В.** Використання інструментів мерчандайзингу в діяльності інтернет-магазинів / Л. В. Капінус, Н. П. Скригун, І. В. Савенко // Актуальні проблеми економіки. – 2013. – № 5 (143). – С. 125 – 131.
5. **Дюбанов О. С.** Моделі поведінки суб'єктів ринку електронної торгівлі в сучасних умовах / О. С. Дюбанов, С. К. Рамазанов // Бізнес Інформ. – 2011. – № 6. – С. 104 – 105.
6. **Пурський О. І.** Концептуальна модель електронного торговельного ринку / О. І. Пурський, Б. В. Гринюк, І. О. Жарій // Бізнес Інформ. – 2015. – № 6. – С. 164 – 169.
7. **Remy G.** Five Signs of an Advanced E-Commerce Site / G. Remy // UX Magazine. – Article No. 920. – December 13, 2012 [Electronic resource]. – Mode of access : <http://uxmag.com/articles/five-signs-of-an-advanced-e-commerce-site>
8. **Liao Z. Q.** Internet-based e-shopping and consumer attitudes: an empirical study / Z. Q. Liao, M. T. Cheung // Information and Management. – Vol. 38, No. 5. – P. 299 – 306 [Electronic resource]. – Mode of access : <http://www.ugr.es/~focana/dclasif/artiRegre.pdf>
9. Офіційний сайт інформаційного та освітнього ресурсу «e-Commerce.com.ua» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://e-commerce.com.ua>
10. Офіційний сайт Інтернет-журналу «AIN.UA» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://ain.ua/>
11. Офіційна сайт Інтернет-журналу «New Retail» [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <http://new-retail.ru/>
12. **Костенко В.** Количество онлайн-покупателей в Украине продолжает расти / В. Костенко. – 7 квітня, 2015 [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://e-commerce.com.ua/2015/04/количество-онлайн-покупателей-в-укра/>
13. **Скіцько В. І.** Інтернет-магазин як логістична система / В. І. Скіцько // Моделювання та інформаційні системи в економіці : 36. наук. праць. – К. : КНЕУ, 2013. – Вип. 88. – С. 218 – 234.
14. **Жлуктенко В. І.** Стохастичні моделі в економіці : монографія / В. І. Жлуктенко, А. В. Бегун. – К. : КНЕУ, 2005. – 352 с.
15. **Клейнрок Л.** Теория массового обслуживания / Л. Клейнрок / Пер. с англ. И. И. Грушко ; ред. В. И. Нейман. – М. : Машиностроение, 1979. – 432 с.
16. **Саати Т. Л.** Элементы теории массового обслуживания и ее приложения. – М. : Советское радио, 1965. – 510 с.

REFERENCES

Apatova, N. V., and Malkov, S. V. *Riskologiya virtualnogo predprinimatelstva* [Riskology of virtual enterprise]. Simferopol: DIAIPI, 2013.

Apatova, N. V., and Malkov, S. V. "Predprinimatelstvo v Internet" [Business on the Internet]. *Uchenye zapiski Tavricheskogo natsionalnogo universiteta im. V. I. Vernadskogo. Seriya «Ekonomika i upravlenie»*, vol. 25 (64), no. 3 (2012): 20-27.

AIN.UA. <http://ain.ua/>

e-Commerce.com.ua. <http://e-commerce.com.ua>

Diubanov, O. S., and Ramazanov, S. K. "Modeli povedinky sub'iektiv rynku elektronnoi torhivli v suchasnykh umovakh" [Models of behavior of the market of electronic commerce in the modern world]. *Biznes Inform*, no. 6 (2011): 104-105.

Kapinus, L. V., Skryhun, N. P., and Savenko, I. V. "Vykorystannia instrumentiv merchandaizynhu v diialnosti internet-mahazyniv" [The use of merchandising activity in online stores]. *Aktualni problemy ekonomiky*, no. 5 (143) (2013): 125-131.

"Kompaniia Amazon zapatentovala innovatsionnyy sposob dostavki" [Amazon has patented an innovative delivery method]. http://new-retail.ru/novosti/kompaniya_amazon_zapatentovala_innovatsionnyy_sposob_dostavki4454/

Kostenko, V. "Kolichestvo onlayn-pokupateley v Ukraine prodolzhaet rasti" [The number of online shoppers in Ukraine continues to grow]. <http://e-commerce.com.ua/2015/04/количество-онлайн-покупателей-в-укра/>

Kleynrok, L. *Teoriia massovogo obsluzhivaniia* [Queueing Theory]. Moscow: Mashinostroenie, 1979.

Liao, Z. Q., and Cheung, M. T. "Internet-based e-shopping and consumer attitudes: an empirical study". <http://www.ugr.es/~focana/dclasif/artiRegre.pdf>

New Retail. <http://new-retail.ru/>

Purskyi, O. I., Hryniuk, B. V., and Zharii, I. O. "Kontseptualna model elektronnoho torhovelnoho rynku" [Conceptual model of the electronic trading market]. *Biznes Inform*, no. 6 (2015): 164-169.

Remy, G. "Five Signs of an Advanced E-Commerce Site" <http://uxmag.com/articles/five-signs-of-an-advanced-e-commerce-site>

Skitsko, V. I. "Internet-mahazyn iak lohystychna systema" [Internet store as a logistics system]. *Modeliuvannia ta informatsiini systemy v ekonomitsi*, no. 88 (2013): 218-234.

Saati, T. L. *Elementy teorii massovogo obsluzhivaniia i ee prilozheniia* [Elements of queueing theory and its applications]. Moscow: Sovetskoe radio, 1965.

Zhluktenko, V. I., and Biehun, A. V. *Stokhastychni modeli v ekonomitsi* [Stochastic models in economics]. Kyiv: KNEU, 2005.