



БАЛАНСНАЯ КОМПОНОВКА ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ: МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

КОВАЛЕНКО А.А., ПАНКРАТОВ А.В.,
РОМАНОВА Т.Е., СТЕЦЮК П.И.

Рассматриваются три оптимизационные задачи балансной компоновки цилиндров в контейнере, которые применяются в космическом машиностроении. Учитываются ограничения поведения спутниковой системы (ограничения на центр масс, осевые и центробежные моменты инерции). Для аналитического описания ограничений на размещение объектов применяется метод ϕ -функций Стояна. Строятся три математические модели в виде задач нелинейного программирования с разными видами функции цели, геометрическими формами контейнера, размещением объектов на стеллажах контейнера. Рассматриваются стратегии решения задач балансной компоновки с применением методов дифференцируемой и недифференцируемой оптимизации. Приводятся тестовые примеры.

Введение

Среди множества задач балансной компоновки 3D-объектов, которые применяются в космическом машиностроении [1], особый интерес представляют задачи компоновки цилиндрических объектов. Так, в работах [2-4] рассматриваются задачи компоновки цилиндров в цилиндрическом контейнере с учетом *ограничений поведения (ограничения по статическим и динамическим характеристикам спутниковой системы)*. В данных публикациях приводятся математические модели с различными функциями цели, среди которых: радиус контейнера, отклонение центра масс системы от заданного значения, свертка, учитывающая как радиус контейнера, так и равновесие всей системы. Однако для решения данных задач предлагаются различные эвристические алгоритмы, что приводит к потере локально-оптимальных решений задач.

В статье [5] с помощью метода ϕ -функций [6] строится обобщенная математическая модель задачи балансной компоновки 3D-объектов в виде задачи нелинейного программирования. Данная математическая модель учитывает ограничения поведения (ограничения на центр масс, осевые и центробежные моменты инерции системы).

Целью данной работы является рассмотрение трех конкретных реализаций обобщенной математической модели, приведенной в работе [5], с объектами размещения цилиндрической формы, построение математических моделей данных задач с различными функциями цели, указанными выше, а также разработка алгоритмов решения с применением методов нелинейного программирования [7] и методов недифференцируемой оптимизации [8, 9].

1. Общие понятия и постановки задач

Рассмотрим класс задач балансной компоновки 3D-объектов в следующей постановке: разместить набор одинаково ориентированных прямых круговых цилиндров в контейнере с учетом ограничений поведения так, чтобы функция цели достигала своего экстремального значения. Сформулируем три вида задач балансной компоновки цилиндров.

Задача 1. Балансная компоновка цилиндров в цилиндрическом контейнере минимального радиуса при условии, что высота контейнера совпадает с высотой всех цилиндров.

Задача 2. Балансная компоновка цилиндров в контейнере (цилиндрической, параболической или усеченной конической формы) с круговыми стеллажами при условии, что цилиндры крепятся (сверху или снизу) к стеллажам контейнера. Функция цели – отклонение центра масс системы от заданного значения.

Задача 3. Балансная компоновка цилиндров в цилиндрическом контейнере с круговыми стеллажами при условии, что цилиндры крепятся сверху к круговым стеллажам контейнера. Функция цели учитывает радиус контейнера и равновесие системы.

Следуя работе [5], определим основные понятия, необходимые для построения математических моделей поставленных задач. Пусть Ω – контейнер высоты H , описанный следующим образом:

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 : G(x, y, z) \geq 0\}.$$

В пределах данного исследования Ω рассматривается трех видов: круговой цилиндр с радиусом основания R при $G = \min\{-x^2 - y^2 + R^2, -z + H, z\}$; параболоид вращения с радиусом основания $R = \sqrt{H}$ при $G = \min\{-z - x^2 - y^2 + H, z\}$; усеченный круговой конус с радиусами R_1 и R_2 нижнего и верхнего оснований, соответственно, учитывая, что $G = \min\{-z - H(\sqrt{x^2 + y^2} + R_1)/(R_1 - R_2), -z + H, z\}$. Контейнер Ω задан в собственной неподвижной системе координат $Oxuz$, где Oz – продольная ось симметрии.

Пусть $A = \{C_i, i \in I_n\}$, $I_n = \{1, 2, \dots, n\}$, – семейство однородных цилиндров с метрическими характеристиками (r_i, h_i) , где r_i – радиус основания, h_i – полувысота цилиндра C_i . Каждый цилиндр C_i задан

в собственной системе координат $O_i x_i y_i z_i$, где O_i – центр симметрии C_i , $O_i z_i$ – продольная ось симметрии C_i , $O_i z_i \parallel Oz$. Расположение цилиндра C_i внутри контейнера Ω определяется вектором трансляции $u_i = (v_i, z_i)$ относительно неподвижной системы координат $Oxyz$, где $v_i = (x_i, y_i)$. При этом основным свойством, объединяющим перечисленные выше три задачи, является то, что $z_i = \text{const}$, $i \in I_n$. В общем случае вектор переменных имеет вид $u = (p, v)$, где p – переменная метрическая характеристика контейнера Ω , $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{R}^{2n}$ – вектор переменных параметров размещения цилиндров. Обозначим через Ω_A систему, образованную в результате размещения цилиндров C_i семейства A в контейнере Ω , а через $O_s XYZ$ – систему координат для Ω_A , где $O_s = (x_s(v), y_s(v), z_s)$ – центр масс Ω_A , а оси $O_s X \parallel Ox$, $O_s Y \parallel Oy$, $O_s Z \parallel Oz$,

$$x_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i x_i}{M}, y_s(v) = \frac{\sum_{i=1}^n m_i y_i}{M}, z_s = \frac{\sum_{i=1}^n m_i z_i}{M}, \quad (1)$$

где m_i – масса цилиндра C_i , $i \in I_n$; $M = \sum_{i=1}^n m_i$ – масса системы Ω_A .

Ограничения поведения системы Ω_A описываются системой неравенств вида $\{\mu_1(v) \geq 0, \mu_2(v) \geq 0, \mu_3(v) \geq 0\}$, где $\mu_1(v) \geq 0$ – ограничения на центр масс системы Ω_A , $\mu_2(v) \geq 0$ и $\mu_3(z) \geq 0$ – ограничения на осевые и центробежные моменты инерции системы Ω_A , соответственно. Функции $\mu_1(v)$, $\mu_2(v)$, $\mu_3(v)$ определяются так:

$$\begin{aligned} \mu_1(v) &= \min \{\mu_{11}(v), \mu_{12}(v), \mu_{13}\}, \\ \mu_{11}(v) &= \min \{-(x_s(v) - x_0) + \Delta x_0, (x_s(v) - x_0) + \Delta x_0\}, \\ \mu_{12}(v) &= \min \{-(y_s(v) - y_0) + \Delta y_0, (y_s(v) - y_0) + \Delta y_0\}, \\ \mu_{13} &= \min \{-(z_s - z_0) + \Delta z_0, (z_s - z_0) + \Delta z_0\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где (x_0, y_0, z_0) – некоторая заданная точка, отклонение центра масс O_s от которой не должно превышать допустимого значения, а $\Delta x_0, \Delta y_0, \Delta z_0$ – заданные допустимые отклонения от точки (x_0, y_0, z_0) . Полагем, что $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbf{R}^n$ таковой, что $\mu_{13}(z) = \mu_{13} = \text{const} \geq 0$ (в противном случае задача не имеет решения);

$$\begin{aligned} \mu_2(v) &= \min \{-J_X(v) + \Delta J_X, -J_Y(v) + \Delta J_Y, \\ &\quad -J_Z(v) + \Delta J_Z\}, \end{aligned} \quad (4)$$

здесь $J_X(v), J_Y(v), J_Z(v)$ – моменты инерции системы Ω_A относительно осей системы координат $O_s XYZ$; $\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z$ – допустимые значения для величин $J_X(v), J_Y(v), J_Z(v)$;

$$\begin{aligned} J_X(v) &= \sum_{i=1}^n J_{x_i} + \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i - M([y_s(v)]^2 + z_s^2), \\ J_Y(v) &= \sum_{i=1}^n J_{y_i} + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i - M([x_s(v)]^2 + z_s^2), \\ J_Z(v) &= \sum_{i=1}^n J_{z_i} + \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i - M([x_s(v)]^2 + [y_s(v)]^2), \end{aligned} \quad (5)$$

где $J_{x_i} = J_{y_i} = m_i(3r_i^2 + 4h_i^2)/12$, $J_{z_i} = m_i r_i^2/2$ – моменты инерции цилиндров C_i , $i \in I_n$, относительно осей системы координат $O_i x_i y_i z_i$;

$$\mu_3(v) = \min \{\mu_{31}(v), \mu_{32}(v), \mu_{33}(v)\}, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \mu_{31}(v) &= \min \{-J_{XY}(v) + \Delta J_{XY}, J_{XY}(v) + \Delta J_{XY}\}, \\ \mu_{32}(v) &= \min \{-J_{XZ}(v) + \Delta J_{XZ}, J_{XZ}(v) + \Delta J_{XZ}\}, \\ \mu_{33}(v) &= \min \{-J_{YZ}(v) + \Delta J_{YZ}, J_{YZ}(v) + \Delta J_{YZ}\}, \end{aligned} \quad (7)$$

здесь $J_{XY}(v), J_{XZ}(v), J_{YZ}(v)$ – центробежные моменты инерции системы Ω_A относительно осей системы координат $O_s XYZ$; $\Delta J_{XY}, \Delta J_{XZ}, \Delta J_{YZ}$ – заданные допустимые значения,

$$\begin{aligned} J_{XY}(v) &= \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - M x_s(v) y_s(v), \\ J_{XZ}(v) &= \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - M x_s(v) z_s, \\ J_{YZ}(v) &= \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - M y_s(v) z_s. \end{aligned} \quad (8)$$

Ограничения размещения цилиндров семейства A в контейнере Ω описываются системой неравенств $\{\Upsilon_1(u) \geq 0, \Upsilon_2(u) \geq 0\}$, где $\Upsilon_1(u) \geq 0$ и $\Upsilon_2(u) \geq 0$ – ограничения, описывающие непересечение и включение цилиндров в контейнер, соответственно,

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(u) &= \min \{\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j), i > j \in I_n\}, \\ \Upsilon_2(u) &= \min \{\Phi_i^{C\Omega^*}(p, u_i), i \in I_n\}, \end{aligned} \quad (9)$$

$\Phi_{ij}^{CC}(u_i, u_j)$ – *phi*-функция для цилиндров C_i и C_j [6], $\Phi_i^{C\Omega^*}(p, u_i)$ – *phi*-функция для цилиндра C_i и объекта $\Omega^* = \mathbf{R}^3 / \text{int } \Omega$ [10].

Поскольку $z_i = \text{const}$, $i \in I_n$, то функции $\Upsilon_1(u)$ и $\Upsilon_2(u)$ в (9) можно представить в эквивалентном виде с использованием *phi*-функций для двумерных объектов, а именно:

$$\begin{aligned} \Upsilon_1(v) &= \min \{ \Phi_{ij}(v_i, v_j), (i, j) \in \Xi \}, \\ \Upsilon_2(R, v) &= \min \{ \Phi_i(R, v_i), i \in I_n \}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $\Phi_{ij}(v_i, v_j)$ – *phi*-функция для кругов C_i и C_j радиусов r_i и r_j с центрами в точках $v_i = (x_i, y_i)$ и $v_j = (x_j, y_j)$,

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(v_i, v_j) &= (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2, \\ \Xi &= \{ (i, j) : |z_i - z_j| < h_i + h_j, i < j \in I_n \}, \end{aligned} \quad (11)$$

$\Phi_i(R, v_i)$ – *phi*-функция для круга C_i радиуса r_i с центром в точке $v_i = (x_i, y_i)$ и объекта $C^* = \mathbf{R}^2 / \text{int } C^z$ радиуса R_i^z с центром в точке $(0, 0)$ вида

$$\Phi_i(R, v_i) = -x_i^2 - y_i^2 + (R_i^z(R) - r_i)^2, \quad (12)$$

здесь $R_i^z(R)$ – радиус круга C^z (сечение контейнера Ω плоскостью, параллельной Oxy , на высоте $z_i + h_i$), $R_i^z(R) \geq r_i$. Для каждого вида задач конкретное значение радиуса R_i^z определяется в последующих разделах.

2. Математическая модель задачи 1

В задаче 1 размещается семейство A цилиндров одинаковой высоты $2h_i$ и различных радиусов r_i в цилиндрическом контейнере Ω высоты $H = 2h_i$ ми-

нимального радиуса так, чтобы выполнялись ограничения поведения $\mu_1(v) \geq 0$, $\mu_2(v) \geq 0$, $\mu_3(v) \geq 0$.

Поскольку $h_i = 0.5H$, $i \in I_n$ (рис.1) и $z_i = 0$, $i \in I_n$, то $O_s = (x_s(u), y_s(u), 0)$. Начало собственной системы координат $Oxyz$ контейнера Ω расположено в центре его симметрии. Для задачи 1 полагаем $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$.

С учетом перечисленных особенностей математическую модель задачи 1 можно представить следующим образом:

$$\min R \quad \text{s.t.} \quad u \in W,$$

где $u = (R, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n) \in \mathbf{R}^{2n+1}$, а W описывается системой неравенств вида

$$(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2 \geq 0, i < j \in I_n,$$

$$-x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2 \geq 0, i \in I_n,$$

$$-\sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta x_0 \geq 0, \sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta x_0 \geq 0,$$

$$-\sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta y_0 \geq 0, \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta y_0 \geq 0,$$

$$\alpha_1 - \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i + M \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + \Delta J_X \geq 0,$$

$$\alpha_1 - \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i + M \left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \Delta J_Y \geq 0,$$

$$\alpha_2 - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \right.$$

$$\left. + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 \right) + \Delta J_Z \geq 0,$$

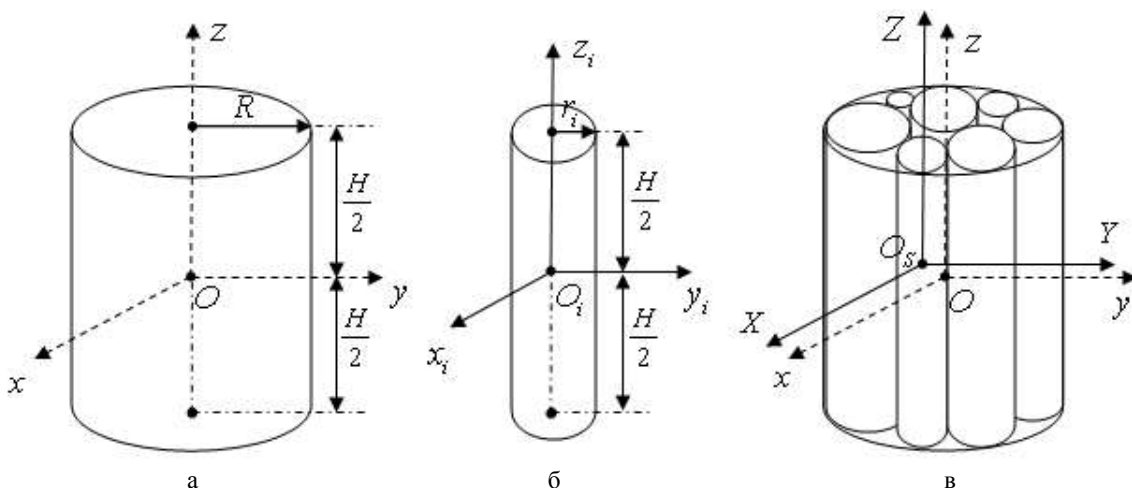


Рис. 1. Контейнер Ω (а); объект C_i (б); система Ω_A (в)

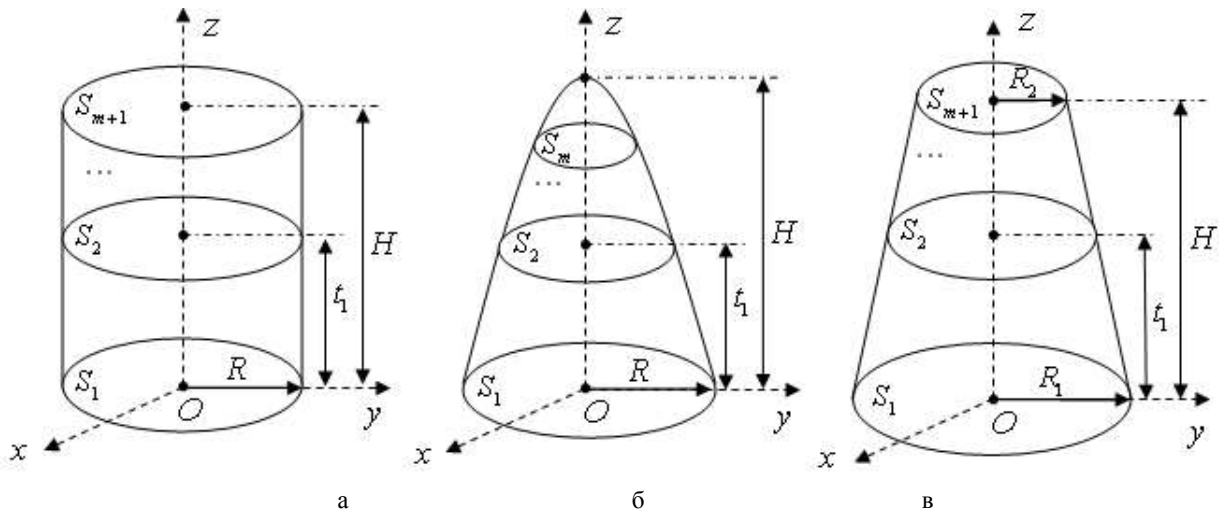


Рис. 2. Виды контейнеров: а – цилиндр; б – параболоид вращения; в – усеченный конус

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{i=1}^n x_i y_i m_i + M \sum_{i=1}^n m'_i x_i \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{XY} \geq 0, \\
 & \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - M \sum_{i=1}^n m'_i x_i \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{XY} \geq 0, \\
 & R - R_{low} \geq 0,
 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
 m'_i &= \frac{m_i}{M} = \text{const}, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i = \text{const}, \\
 \Delta x_0, \Delta y_0 &= \text{const}, \quad \Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z = \text{const}, \\
 \alpha_1 &= -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n m_i (3r_i^2 + H^2) = \text{const}, \quad R_{low} = \max_{i=1, \dots, n} r_i, \\
 \alpha_2 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \text{const}, \quad \Delta J_{XY} = \text{const}.
 \end{aligned}$$

3. Математическая модель задачи 2

Для данной задачи рассмотрим три вида контейнера Ω , описанных выше. Метрические характеристики Ω – постоянные величины. Полагаем, что начало собственной системы координат $Oxuz$ расположено в центре нижнего основания контейнера. Пусть контейнер Ω разделен круговыми стеллажами S_k на отсеки Ω^k , $k=1, \dots, m$ (рис.2). Расстояния между стеллажами S_k и S_{k+1} обозначим через t_k ,

$$k=1, \dots, m, \quad \sum_{k=1}^m t_k = H.$$

Осуществим разбиение семейства A на группы $A^k = \{C_i, i \in I_k\}$, $k=1, \dots, m$, в зависимости от принадлежности цилиндра C_i подконтейнеру Ω^k ($I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_k \cup \dots \cup I_m = I_n$). На размещение C_i , внутри Ω^k накладываются ограничения по z вида:

случай 1) если цилиндры C_i , $i \in I_k^+$, крепятся сверху к стеллажам S_k подконтейнера Ω^k , тогда $z_i = \sum_{l=1}^k t_{l-1} + h_i$, полагая $t_0 = 0$; *случай 2*) если цилиндры C_i , $i \in I_k^-$, крепятся снизу к стеллажу S_{k+1}

подконтейнера Ω^k , тогда $z_i = \sum_{l=1}^k t_l - h_i$. Заметим, что $I_k = I_k^+ \cup I_k^-$ и $I_k^+ \cap I_k^- = \emptyset$, $k=1, \dots, m$, при этом в случае, когда Ω – параболоид вращения $I_m^- = \emptyset$.

Функция $Y_1(v)$ в (10) определена при $\Xi = \bigcup_{k=1}^m \Xi_k$, $\Xi_k = \{(i, j) : |z_i - z_j| < h_i + h_j, i < j \in I_k\}$, и функция $Y_2(v)$ в (10) задана при следующих значениях R_i^z :

случай 1) $R_i^z = \sqrt{H - 2h_i - \sum_{l=1}^k t_{l-1}}$, $i \in I_k^+$, для параболического контейнера; $R_i^z = R$, $i \in I_k^+$, для цилиндрического контейнера;

$$R_i^z = R_1 - \frac{R_1 - R_2}{H} (2h_i + \sum_{l=1}^k t_{l-1}), \quad i \in I_k^+,$$

для контейнера формы усеченного конуса; *случай 2*)

$R_i^z = \sqrt{H - \sum_{l=1}^k t_l}$, $i \in I_k^-$, для параболического контейнера; $R_i^z = R$, $i \in I_k^-$, для цилиндрического контейнера;

$R_i^z = R_1 - \frac{R_1 - R_2}{H} \sum_{l=1}^k t_l$, $i \in I_k^-$, для контейнера формы усеченного конуса. Центр масс, осевые и центробежные моменты инерции системы Ω_A опре-

деляются по формулам (1), (5) и (8), соответственно. Для задачи 2 полагаем $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_0)$.

Математическая модель задачи 2 имеет вид:

$$\min \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i z_i - z_0 \right]^2 \right), \text{ s.t. } v \in W,$$

где $v = (x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$, а область W описывается системой неравенств вида

$$\begin{aligned} (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2 &\geq 0, (i, j) \in \Xi, \\ -x_i^2 - y_i^2 + (R_i^z - r_i)^2 &\geq 0, i \in I_n, \\ \alpha_1 - \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + z_s^2 \right) + \Delta J_X &\geq 0, \\ \alpha_1 - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + z_s^2 \right) + \Delta J_Y &\geq 0, \\ \alpha_2 - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 \right) + \Delta J_Z &\geq 0, \\ -\sum_{i=1}^n x_i y_i m_i + M \sum_{i=1}^n m'_i x_i \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{XY} &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - M \sum_{i=1}^n m'_i x_i \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{XY} &\geq 0, \\ -\sum_{i=1}^n x_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta J_{XZ} &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta J_{XZ} &\geq 0 \\ -\sum_{i=1}^n y_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{YZ} &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{YZ} &\geq 0 \end{aligned}$$

Заметим, что

$$z_0 = \text{const}, \quad m'_i = \frac{m_i}{M} = \text{const}, \quad M = \sum_{i=1}^n m_i = \text{const},$$

$$z_i = \text{const}, \quad i \in I_n, \quad z_s = \sum_{i=1}^n m'_i z_i = \text{const},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \text{const},$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n m_i (3r_i^2 + 4h_i^2) = \text{const},$$

$$\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z = \text{const}, \quad \Delta J_{XY}, \Delta J_{XZ}, \Delta J_{YZ} = \text{const}.$$

Если в задаче 2 положить $z_0 = z_s$, то при нулевом значении функции цели будет получено оптимальное решение данной задачи.

4. Математическая модель задачи 3

Пусть Ω – цилиндрический контейнер высоты H и переменного радиуса R (см.рис.2,а). Цилиндры размещаются на стеллажах контейнера Ω при $I_k = I_k^+$, $k = 1, \dots, m$.

Математическую модель задачи 3 можно представить так:

$$\min f, \text{ s.t. } u \in W,$$

где $u = (R, x_1, y_1, \dots, x_n, y_n)$,

$$f = \alpha R + \beta \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i z_i - z_0 \right]^2 \right),$$

область W описывается системой неравенств вида

$$\begin{aligned} (x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 - (r_i + r_j)^2 &\geq 0, (i, j) \in \Xi, \\ -x_i^2 - y_i^2 + (R - r_i)^2 &\geq 0, i \in I_n, \\ \alpha_1 - \sum_{i=1}^n (y_i^2 + z_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 + z_s^2 \right) + \Delta J_X &\geq 0, \\ \alpha_1 - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + z_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + z_s^2 \right) + \Delta J_Y &\geq 0, \\ \alpha_2 - \sum_{i=1}^n (x_i^2 + y_i^2) m_i + M \left(\left[\sum_{i=1}^n m'_i x_i \right]^2 + \left[\sum_{i=1}^n m'_i y_i \right]^2 \right) + \Delta J_Z &\geq 0, \\ -\sum_{i=1}^n x_i y_i m_i + M \sum_{i=1}^n m'_i x_i \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{XY} &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i m_i - M \sum_{i=1}^n m'_i x_i \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{XY} &\geq 0, \\ -\sum_{i=1}^n x_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta J_{XZ} &\geq 0, \\ \sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta J_{XZ} &\geq 0 \\ -\sum_{i=1}^n y_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{YZ} &\geq 0 \\ \sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{YZ} &\geq 0 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n x_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^n m'_i x_i + \Delta J_{XZ} \geq 0,$$

$$-\sum_{i=1}^n y_i z_i m_i + M z_s \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{YZ} \geq 0,$$

$$\sum_{i=1}^n y_i z_i m_i - M z_s \sum_{i=1}^n m'_i y_i + \Delta J_{YZ} \geq 0,$$

$$R - R_{\text{low}} \geq 0.$$

Заметим, что

$$R_{\text{low}} = \max_{i=1, \dots, n} r_i, \quad m'_i = \frac{m_i}{M} = \text{const},$$

$$M = \sum_{i=1}^n m_i = \text{const},$$

$$z_i = \text{const}, z_s = \sum_{i=1}^n m'_i z_i = \text{const},$$

$$\alpha_1 = -\frac{1}{12} \sum_{i=1}^n m_i (3r_i^2 + 4h_i^2) = \text{const},$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 = \text{const},$$

$$\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z = \text{const}, \Delta J_{XY}, \Delta J_{XZ}, \Delta J_{YZ} = \text{const}.$$

5. Алгоритмы решения

Для решения рассматриваемого класса задач балансной компоновки цилиндров предлагаются эффективные алгоритмы с использованием методов *нелинейного программирования* и *негладкой оптимизации*.

Суть алгоритмов с использованием методов *нелинейного программирования* заключается в следующем: строится множество стартовых точек u_0^s , $s = 1, 2, \dots, \eta$, из области допустимых решений W ; производится поиск локального экстремума *задач 1-3* для каждой стартовой точки $u_0^s \in W$; лучший из полученных локальных экстремумов выбирается в качестве локально-оптимального решения. Приведенные ниже алгоритмы используют ПРОРТ [7] для локальной оптимизации. Такой подход к поиску локальных экстремумов *задач 1-3* позволяет улучшить сходимость методов локальной оптимизации и сократить время решения.

В целях упрощения нетривиальной процедуры поиска допустимой стартовой точки для описанных выше задач осуществляется переход к решению вспомогательных задач, основанных на гомотетических преобразованиях кругов. Таким образом, в дальнейшем полагаем, что коэффициенты гомотетии λ_i переменные, при этом $\lambda_i = \lambda$, $0 \leq \lambda \leq 1$, $i \in I_n$.

Рассмотрим подробнее алгоритмы поиска стартовых точек из области допустимых решений для *задач 1-3*.

Алгоритм 1.1 предназначен для поиска стартовых точек из области допустимых решений *задачи 1* и заключается в следующем.

Шаг 1. Задаем стартовое значение радиуса контейнера $R^0 = R_{\text{up}}$, R_{up} – верхняя оценка радиуса R .

Шаг 2. Генерируем множество точек $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0) \in \Omega^0$, $i \in I_n$, случайным образом. Полагаем $\lambda^0 = 0$.

Шаг 3. Используем точку $u'^0 = (R^0, v^0, \lambda^0)$, $v^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$ в качестве допустимой стартовой точки для следующей вспомогательной задачи:

$$\lambda^* = \max \lambda, \quad \text{s.t.} \quad u' \in W_\lambda, \quad (13)$$

$$W_\lambda = \{u' \in \mathbf{R}^{2n+2} : Y_1(v') \geq 0, Y_2(u') \geq 0, \zeta \geq 0, \\ 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0, R_{\text{up}} - R \geq 0\}, \quad (14)$$

где $u' = (R, v')$, $v' = (v, \lambda)$, функции $Y_1(v')$, $Y_2(u')$ задаются аналогично функциям $Y_1(v)$, $Y_2(u)$ в математической модели *задачи 1* с учетом коэффициента гомотетии λ . Обозначим точку локального максимума $u'^* = (R^*, v'^*) = (R^*, v^*, \lambda^*)$. Заметим, что если $\lambda^* = 1$, то u'^* является точкой глобального максимума задачи (13)-(14).

Следует отметить, что $u'^0 \in W_\lambda$ по способу построения.

Шаг 4. Стартуя из точки $u''^0 = (R^0, v^0, \mu^0) = (R^*/\lambda^*, v^*/\lambda^*, -\eta)$, где $\eta > 0$ – заведомо большое число, решаем вспомогательную задачу:

$$\mu^* = \max \mu, \quad \text{s.t.} \quad u'' \in W_\mu, \quad (15)$$

$$W_\mu = \{u'' \in \mathbf{R}^{2n+2} : Y_1(v) \geq 0, Y_2(u) \geq 0, \mu_1(v) - \mu \geq 0, \\ \mu_2(v) - \mu \geq 0, \mu_3(v) - \mu \geq 0, \zeta \geq 0, R_{\text{up}} - R \geq 0\}, \quad (16)$$

где $u'' = (u, \mu) = (R, v, \mu)$. Следует отметить, что $u''^0 \in W_\mu$ по способу построения.

Если в результате решения задачи (15)-(16) получено значение $\mu^* < 0$, это означает, что при заданной оценке R_{up} для сгенерированной стартовой точки u''^0 не удалось получить точку u''^* , принадлежащую области допустимых решений *задачи 1*, поскольку нарушаются условия поведения системы. В этом случае следует увеличить значение верхней оценки R_{up} и перейти к первому шагу алгоритма. Если в результате решения задачи (15)-(16) $\mu^* \geq 0$, то обозначаем полученную точку локального максимума через $u''^* = (R''^*, v''^*, \mu^*)$.

Шаг 5. Формируем точку $u^0 = (R''^*, v''^*)$, полученную из точки u''^* локального максимума задачи (13)-(14). Точка u^0 служит стартовой точкой, принадлежащей области W *задачи 1*.

Алгоритм 1.2 предназначен для поиска стартовых точек из области допустимых решений *задачи 2* и заключается в следующем.

Шаг 1. Генерируем случайным образом множество точек $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0)$, принадлежащих кругам радиуса R_i^z , $i \in I_n$. Полагаем $\lambda^0 = 0$.

Шаг 2. Используем точку $u'^0 = (v^0, \lambda^0)$, где $v^0 = (x_1^0, y_1^0, \dots, x_n^0, y_n^0)$, в качестве стартовой точки для следующей вспомогательной задачи:

$$\lambda^* = \max \lambda, \quad \text{s.t.} \quad v' \in W_\lambda, \quad (17)$$

$$W_\lambda = \{v' : \Upsilon_1(v') \geq 0, \Upsilon_2(v') \geq 0, 1 - \lambda \geq 0, \lambda \geq 0\}, \quad (18)$$

где $v' = (v, \lambda) \in \mathbf{R}^{2n+1}$, функции $\Upsilon_1(v')$, $\Upsilon_2(v')$ задаются аналогично функциям $\Upsilon_1(v)$, $\Upsilon_2(v)$ в математической модели задачи 2 с учетом коэффициента гомотетии λ . Обозначим точку локального максимума $u'^* = (v'^*) = (v^*, \lambda^*)$. Если в результате решения вспомогательной задачи (17)-(18) получено $\lambda^* < 1$, то для данной стартовой точки для задачи 2 не удалось получить допустимого размещения объектов. В этом случае осуществляется переход к первому шагу алгоритма. Следует отметить, что $u'^0 \in W_\lambda$ по способу построения.

Шаг 3. Полагаем $u''^0 = (v^0, \mu^0) = (v^*, -\eta)$, где $\eta > 0$ – заведомо большое число.

Стартуя из точки u''^0 , решаем вспомогательную задачу:

$$\mu^* = \max \mu, \quad \text{s.t.} \quad u' \in W_\mu, \quad (19)$$

$$W_\mu = \{u'' \in \mathbf{R}^{2n+1} : \Upsilon_1(v) \geq 0, \Upsilon_2(v) \geq 0, \mu_2(v) - \mu \geq 0, \mu_3(v) - \mu \geq 0\}, \quad (20)$$

где $u'' = (v, \mu)$. Следует отметить, что $u''^0 \in W_\mu$ по способу построения.

Если в результате решения вспомогательной задачи (19)-(20) получено значение μ^* меньшее нуля, то это означает, что для задачи 2 не удалось получить решение, удовлетворяющее условиям поведения системы. В этом случае следует перейти к шагу 1 алгоритма. Обозначим точку локального максимума задачи (19)-(20) через $u''^* = (v^*, \mu^*)$.

Точка $v^0 = v^*$, полученная из точки локального экстремума u''^* задачи (19)-(20), служит стартовой точкой, принадлежащей области допустимых решений W для задачи 2.

Для поиска стартовых точек из области W задачи 3 используется алгоритм 1.1, при условии, что в задаче (15)-(16) область W_μ имеет вид

$$W_\mu = \{u'' \in \mathbf{R}^{2n+2} : \Upsilon_1(v) \geq 0, \Upsilon_2(u) \geq 0, \mu_2(v) - \mu \geq 0, \mu_3(v) - \mu \geq 0, \zeta \geq 0, R_{\text{up}} - R \geq 0\}.$$

Такой подход к поиску локальных экстремумов задач 1-3 позволяет улучшить сходимость методов локальной оптимизации и сократить время решения.

Суть алгоритма с использованием методов не дифференцируемой оптимизации заключается в следующем.

Алгоритм 2 основан на применении r -алгоритма Шора, который позволяет с помощью негладких штрафных свести:

– задачу 1 условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации вида

$$\min f_1(u),$$

$$f_1(u) = R + P_1 \sum_{k=1}^{N_1} \max\{0, -\Phi'_k\} + P_2 \sum_{j=1}^3 \max\{0, -\mu_j\} + P_3 \max\{0, -\zeta\}, \quad (21)$$

– задачу 2 условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации вида

$$\min f_2(v),$$

$$f_2(v) = F(v) + P_1 \sum_{k=1}^{N_2} \max\{0, -\Phi'_k\} + P_2 \sum_{j=2}^3 \max\{0, -\mu_j\}, \quad (22)$$

– задачу 3 условной оптимизации к задаче безусловной оптимизации вида

$$\min f_3(u),$$

$$f_3(u) = \alpha R + \beta F(v) + P_1 \sum_{k=1}^{N_3} \max\{0, -\Phi'_k\} + P_2 \sum_{j=2}^3 \max\{0, -\mu_j\} + P_3 \max\{0, -\zeta\}, \quad (23)$$

где $F(v) = (x_s(v))^2 + (y_s(v))^2 + (z_s - z_0)^2$, P_1, P_2, P_3 – штрафные коэффициенты [9]; N_1, N_2, N_3 – число ϕ -неравенств в ограничениях размещения для соответствующих задач, где $N_1 = n(n+1)/2$, $N_2 = N_3 = \text{card}(\Xi) + n$, Φ'_k – ϕ -функции вида

(11), (12) из соотношений (10); μ_1, μ_2, μ_3 – функции вида (2), (4), (6), $\zeta = R - \max_{i=1, \dots, n} r_i$.

Этот алгоритм предполагает также использование мультистарта и состоит в нахождении локальных минимумов функции вида (21), (22) или (23) для заданного набора стартовых точек. Стартовые точки генерируются случайным образом.

6. Тестовые примеры

Пример 1. Рассмотрим задачу 2 для контейнера, имеющего форму усеченного конуса. Пусть $A = \{C_i, i \in I_8\}$, $m = 2$, $H = 0.6$, $R_1 = 0.5$, $R_2 = 0.3$, $t_1 = H/2$,

$\{r_i, i \in I_8\} = \{0.1, 0.1, 0.1, 0.075, 0.075, 0.06, 0.05, 0.045\}$, $\{h_i, i \in I_8\} = \{0.12, 0.09, 0.1, 0.1, 0.1, 0.075, 0.1, 0.08\}$, $\{m_i, i \in I_8\} = \{26.62, 16.97, 18.85, 10.6, 10.6, 5.09, 4.71, 3.05\}$,

$$A^1 = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}, A^2 = \{C_5, C_6, C_7, C_8\},$$

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0.275),$$

$$(\Delta J_X, \Delta J_Y, \Delta J_Z) = (5, 5, 5), (\Delta J_{XY}, \Delta J_{YZ}, \Delta J_{XZ}) = (0, 0, 0).$$

Наилучшее решение с учетом всех ограничений поведения, полученное с помощью алгоритма 1 (рис. 3): $u^* = v^*$, $F(u^*) = 0.000819642$. Заметим, что u^* является точкой глобального минимума.

Пример 2. Рассмотрим задачу 2 для контейнера параболической формы. Пусть $A = \{C_i, i \in I_{45}\}$, $m = 3$, $H = 70$, $t_1 = 18.5$, $t_2 = 14$, $h_i = 1.85$, $i \in I_{45}$, радиусы r_i и массы m_i цилиндров $C_i, i \in I_{45}$, задаются следующим образом: $\{r_i, i \in I_{45}\} = \{2.0, 2.4, 0.8, 1.1, 1.3, 0.7, 0.7, 1.5, 2.4, 1.8, 1.5, 1.7, 1.7, 1.4, 1.6, 1.8, 0.5, 2.1, 2.1, 1.3, 0.8, 1.4, 0.8, 1.5, 1.1, 1.7, 2.1, 1.6, 0.6, 1.8, 2.4, 1.3, 2.0, 1.0, 1.5, 2.0, 2.2, 1.7, 1.7, 0.7, 2.1, 1.1, 0.5,$

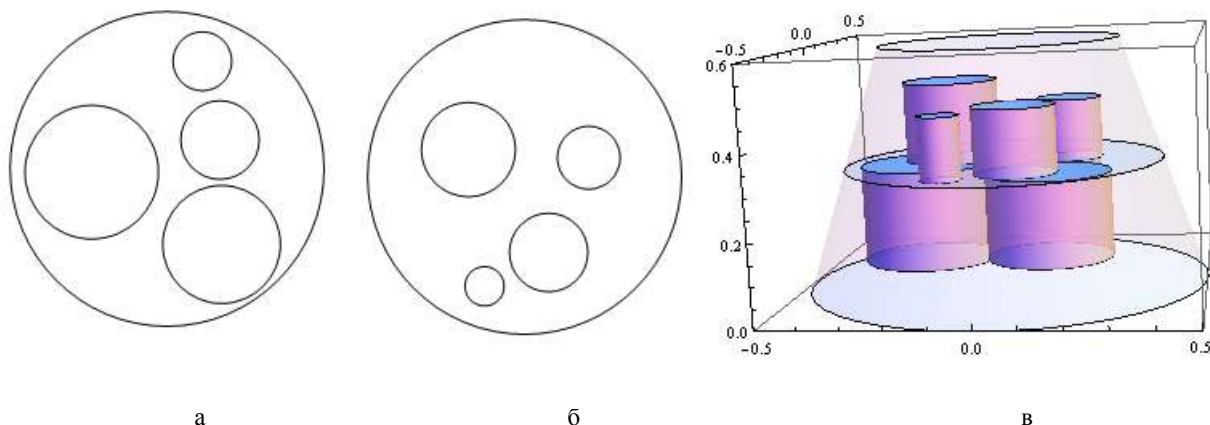


Рис. 3. Размещение объектов, соответствующее точке локального минимума u^* , с учетом всех ограничений поведения: а – размещение цилиндров подмножества A^1 снизу стеллажа S_2 ; б – размещение цилиндров подмножества A^2 сверху стеллажа S_2 ; в – вид системы Ω_A

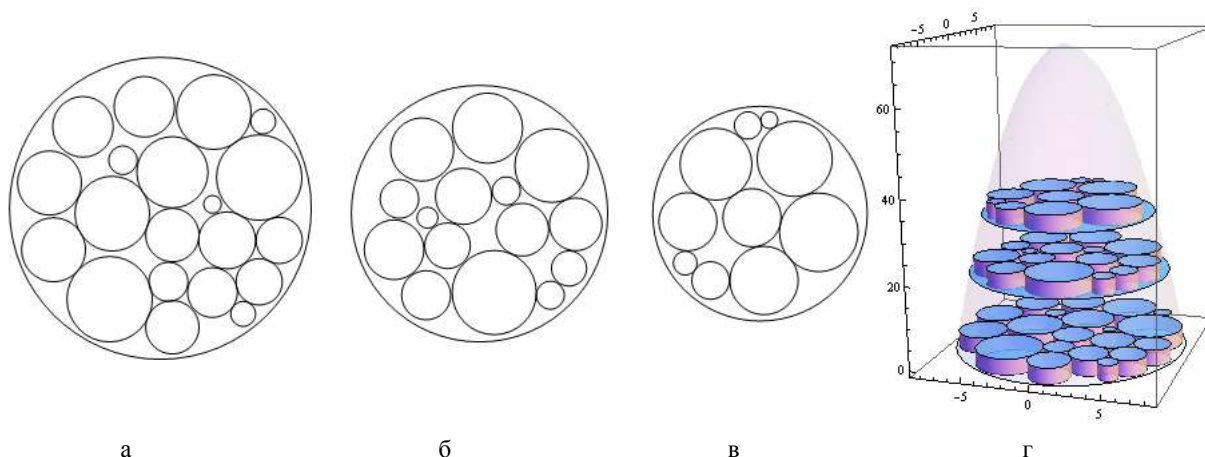


Рис. 4. Размещение цилиндров, соответствующее точке глобального минимума u^* : а – подмножество A^1 цилиндров на стеллаже S_1 ; б – подмножество A^2 цилиндров на стеллаже S_2 ; в – подмножество A^3 цилиндров на стеллаже S_3 ; г – вид системы Ω_A

2.3, 0.8}, $\{m_i, i \in I_{45}\} = \{86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20, 75, 29, 36, 58, 75, 32, 98, 52, 76, 85, 59, 18, 85, 36, 12, 35, 61, 49, 89, 68, 80, 93, 82, 70, 20\}$,

$$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_S), \quad A^1 = \{C_1, \dots, C_{20}\},$$

$$A^2 = \{C_{21}, \dots, C_{35}\}, \quad A^3 = \{C_{36}, \dots, C_{45}\}.$$

Наилучшее локально-оптимальное решение без учета ограничений $\mu_2(v) \geq 0$ и $\mu_3(v) \geq 0$, найденное с помощью алгоритма 1 (рис. 4): $u^* = v^*$, $F(u^*) = 0$. Заметим, что u^* является точкой глобального минимума.

Пример 3. Рассмотрим задачу 3. Пусть $A = \{C_i, i \in I_{21}\}$, $m = 3$, $N = 9$, $t_1 = 3$, $t_2 = 3$, $h_i = 0,88$, $i \in I_{21}$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_S)$. Радиусы r_i и массы m_i цилиндров C_i , $i \in I_{21}$, задаются так: $r_i = 0,45$, $m_i = 3,1416$, для $i = 1, \dots, 7$; $r_i = 0,5$, $m_i = 3,8013$, для $i = 8, \dots, 14$; $r_i = 0,54$, $m_i = 4,5239$, для $i = 15, \dots, 21$.

$$A^1 = \{C_1, C_8, C_9, C_{15}, C_{16}, C_{17}, C_{18}\},$$

$$A^2 = \{C_2, C_3, C_4, C_{10}, C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{19}, C_{20}\},$$

$$A^3 = \{C_5, C_6, C_7, C_{14}, C_{21}\}.$$

Наилучшее решение без учета ограничений $\mu_2(v) \geq 0$ и $\mu_3(v) \geq 0$, найденное с помощью IPOPT (рис. 5): $u^* = (R^*, v^*)$, $R^* = 1,7554$, $F(u^*) = 1,7555 + 0,0$. Точка u^* является точкой локального минимума.

Пример 4. Рассмотрим задачу 3. Пусть $A = \{C_i, i \in I_{35}\}$, $m = 2$, $N = 9$, $t_1 = 4$, $h_i = 1,85$, $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, z_S)$. Радиусы r_i и массы m_i цилиндров C_i , $i \in I_{35}$, задаются так: $\{r_i, i \in I_{35}\} = \{20, 24, 8, 11, 13, 7, 7, 15, 24, 18, 15, 17, 17, 14, 16, 18, 5, 21, 21, 13, 8, 14, 8, 15, 11, 17, 21, 16, 6, 18, 24, 13, 20, 10, 15\}$, $\{m_i, i \in I_{35}\} = \{86, 72, 81, 54, 29, 94, 92, 41, 57, 77, 40, 67, 31, 47, 39, 61, 73, 83, 11, 20, 75, 29, 36,$

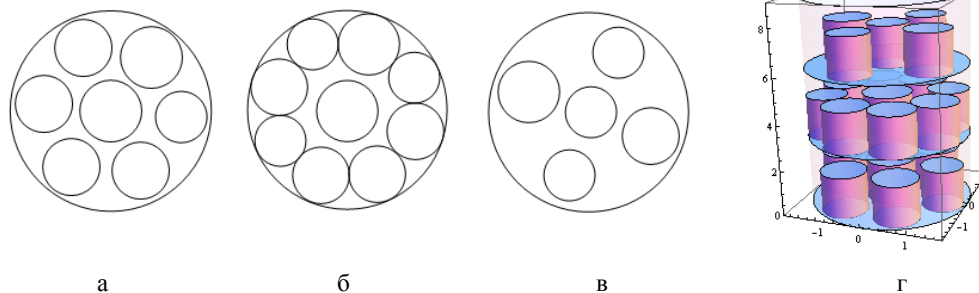


Рис. 5. Размещение цилиндров, соответствующее точке локального минимума u^* : а – подмножество A^1 цилиндров на стеллаже S_1 ; б – подмножество A^2 цилиндров на стеллаже S_2 ; в – подмножество A^3 цилиндров на стеллаже S_3 ; г – вид системы Ω_A

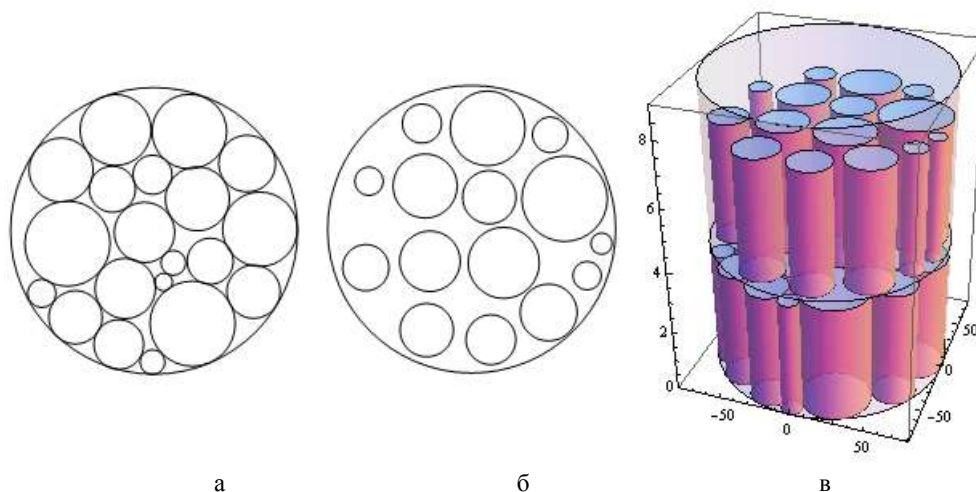


Рис. 6. Локально-оптимальное размещение цилиндров без учета ограничений поведения: а – подмножество A^1 цилиндров на стеллаже S_1 ; б – подмножество A^2 цилиндров на стеллаже S_2 ; в – вид системы Ω_A

58, 75, 32, 98, 52, 76, 85, 59, 18, 85, 36, 12},
 $A^1 = \{C_1, C_2, \dots, C_{20}\}$, $A^2 = \{C_{21}, C_{22}, \dots, C_{35}\}$.

Наилучшее локально-оптимальное решение без учета ограничений $\mu_2(v) \geq 0$ и $\mu_3(v) \geq 0$, найденное с помощью IPOPT (рис. 6): $u^* = (R^*, v^*)$, $R^* = 80,716254$, $F(u^*) = 80,716254 + 0,0$. Точка u^* является точкой локального минимума.

Выводы

Рассмотрены три класса задач балансной компоновки цилиндров: в зависимости от вида функции цели, формы контейнера, наличия стеллажей в контейнере, метрических характеристик цилиндров и особенностей их размещения внутри контейнера. Основным свойством, объединяющим перечисленные выше три задачи, является то, что параметры размещения цилиндров по оси z – фиксированы. Для каждой задачи построены математические модели в виде задач нелинейного программирования. Рассмотренные задачи могут быть сведены к задачам квадратичного программирования. Для их решения задач используются два подхода: 1) метод локальной оптимизации с применением алгоритмов построения стартовых точек из области допустимых решений и программы IPOPT; 2) метод негладкой оптимизации, основанный на r -алгоритме Шора с применением программы `ralgb5`. Данные подходы используют принцип «мультистарта» для поиска «хороших» локальных, а в некоторых случаях и глобальных, решений. Приведенные результаты для тестовых примеров показали эффективность предложенных подходов для рассмотренных классов задач балансной компоновки цилиндрических объектов. Получены рекорды для некоторых известных тестовых примеров benchmark instances.

Литература: 1. *Fasano G, Pinte'r J.D.* Modeling and Optimization in Space Engineering. Series: Springer Optimization and Its Applications. New York: Publisher Springer New York, 404 p. 2. *Che C., Wang Y., Teng H.* Test problems for quasi-satellite packing: Cylinders packing with behavior constraints and all the optimal solutions known // Optimization Online. 2008. Electronic source: http://www.optimizationonline.org/DB_HTML/2008/09/2093.html. 3. *Sun Z., Teng H.* Optimal layout design of a satellite module // Engineering optimization. 2003. Vol. 35, № 5. P. 513-530. 4. *Lei K.* Constrained Layout Optimization Based on Adaptive Particle Swarm Optimizer // Advances in Computation and Intelligence. Series: Springer-Verlag Berlin Heidelberg. 2009. № 1. P. 434-442. 5. *Коваленко А.А., Стецюк П.И., Романова*

Т.Е. Задача балансной компоновки 3D-объектов: математическая модель и методы решения // Кибернетика и системный анализ. 2015. Т. № 4. 6. *Stoyan Yu., Romanova T.* Mathematical Models of Placement Optimization: Two- and Three-Dimensional Problems and Applications // Modeling and optimization in space engineering. Series: Springer optimization and its applications / Fasano G, Pinte'r J.D. (Eds.), XII. 2013. Vol. 73. P. 363-388. 7. *Wachter A., Biegler L.T.* On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming // Mathematical Programming. 2006. Vol. 106, № 1, P. 25-57. 8. *Shor N.Z.* Nondifferentiable optimization and polynomial problems. Kluwer Academic Publishers, 394 p. 9. *Shor N.Z., Stetsyuk P.I.* Modified r -algorithm to find the global minimum of polynomial functions // Cybernetics and Systems Analysis. 1997. Vol. 33, № 4. P. 482-497. 10. *Романова Т.Е., Коваленко А.А.* Phi-функции для моделирования ограничений включения в оптимизационных задачах компоновки // Системи обробки інформації. 2013. Т. 1, № 117. С. 228-133.

Поступила в редколлегию 23.11.2014

Рецензент: д-р техн. наук, проф. Шляхов В.В.

Коваленко Анна Андреевна, аспирант Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Научные интересы: исследование операций, математическое моделирование, геометрическое проектирование. Адрес: Украина, 61013, Харьков, ул. Матюшенко, 3а, кв. 43, тел.: 098 0005125.

Панкратов Александр Викторович, д-р техн. наук, научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Научные интересы: исследование операций, математическое моделирование, геометрическое проектирование. Адрес: Украина, 61103, Харьков, ул. Деревянка, д. 14, кв. 26, тел.: 0572941578.

Романова Татьяна Евгеньевна, д-р техн. наук, ведущий научный сотрудник отдела математического моделирования и оптимального проектирования Института проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины. Научные интересы: исследование операций, математическое моделирование, геометрическое проектирование. Адрес: Украина, 61084, Харьков, ул. Новгородская, д. 6а, кв. 31, тел.: 057 7013477.

Стецюк Петр Иванович, д-р физ./-мат/ наук, заведующий отделом методов негладкой оптимизации Института кибернетики им. В.М.Глушкова НАН Украины. Научные интересы: методы оптимизации, исследование операций, математическое моделирование. Адрес: Украина, 02090, Киев, ул. Новаторов, 22В, кв. 269, тел.: 044 2961059.