

ПОСТАНОВКА И АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ  
 КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ ТРЕХЛИСТОВОЙ РЕССОРЫ

*М. А. Осипенко*

STATEMENT AND ANALYTICAL SOLUTION OF THE CONTACT PROBLEM  
 OF THREE-LEAF SPRING BENDING

*M. A. Osipenko*

Рассмотрена контактная задача об изгибе трехлистовой рессоры с односторонним контактом листов. Задача состоит в отыскании контактных сил в системе трех консольных балок Бернулли-Эйлера различной длины, нагруженных сосредоточенной силой, расположенной на конце самой длинной балки. В отсутствие этой нагрузки балки прямолинейны и плотно прилегают друг к другу. Трение между балками отсутствует. Сформулирована строгая постановка задачи, доказана единственность решения и построено аналитическое решение для произвольных длин листов, обобщающее известные решения в частных случаях. Этим построением одновременно доказываются существование решения. Показано, что возможны только два варианта расположения контактных сил: силы на концах листов и они же с добавлением силы между длинными листами. При обосновании аналитического решения использованы новые интегральные представления для расстояний между соседними листами. Полученные результаты могут быть применены для проектирования листовых рессор.

The unbonded contact problem of three-leaf spring bending is considered. This problem consists in finding the contact forces in the system of three Bernoulli-Euler cantilever beams. The system is loaded by the force concentrated at the tip of the longest beam. In the absence of loading the beams are straight and fit each other closely. There is no friction between the beams. The rigorous problem statement is formulated, the uniqueness of solution is proved and the analytical solution of the problem for the arbitrary lengths of the leaves is constructed. This construction simultaneously proves the existence of the solution. The obtained solution generalizes the known solutions for the special cases. It is shown that only two contact patterns are possible: the forces at the tips of the leaves and the same with the additional force between the long leaves. The new integral representations for the nearest leaves distances are used for the validation of the analytical solution. The obtained results can be used for the leaf springs design.

**Ключевые слова:** трехлистовая рессора, балка, изгиб, контактная задача, аналитическое решение.

**Keywords:** three-leaf spring, beam, bending, contact problem, analytical solution.

**Введение**

Контактная задача об изгибе трехлистовой рессоры состоит в отыскании контактных сил в системе трех консольных балок различной длины, нагруженных сосредоточенной силой, расположенной на конце самого длинного листа (рис. 1). В отсутствие этой нагрузки балки прямолинейны и плотно прилегают друг к другу. Под нагрузкой балки испытывают слабый совместный изгиб с возможным отставанием. Трение между балками отсутствует; изгиб каждой балки описывается моделью Бернулли-Эйлера [6]. Хотя такие балки относятся к наиболее простым объектам механики деформируемого твердого тела, аналитическое решение рассматриваемой контактной задачи не элементарно и в достаточно общем случае до сих пор не построено. В [1] рассматривается (для многолистовой рессоры) только решение с контактными силами на концах листов. В [5] получено в частном случае ( $L_2/L_1 = 2/3$ ;  $L_3/L_2 = 1/2$ ) решение, содержащее контактную силу не на конце листа; отмечается [5, с. 841], что «расчет рессоры с учетом промежуточных точек контакта между листами является чрезвычайно сложным»; полное обоснование решения (см. ниже) не приведено. Это же решение повторено в [7] также без полного обоснования. Частные решения [5; 7] не были использованы и не получили в дальнейшем развития в теории листовых рессор [4]. В [3] предложен эффективный алгоритм численного решения контактной задачи для многолистовой рессоры, но аналити-

ческого решения, даже для трех листов, этот метод не дает. Полное обоснование решения должно включать доказательства положительности контактных сил, отрицательности контактных расстояний и существования корня алгебраического уравнения (см. ниже), дающего значение координаты точки приложения контактной силы, расположенной не на конце листа. В [5; 7] положительность контактных сил и существование корня установлены (в частном случае) численно, однако неотрицательность контактных расстояний не проверена полностью даже численно. Например, в [7, с. 148] проводится лишь следующее рассуждение об упругих линиях листов (балок): «кривизна второго листа в зоне заземления больше кривизны первого, а кривизна третьего больше кривизны второго. Соответственно упругая линия каждого последующего листа будет располагаться ниже упругой линии предыдущего». Здесь утверждается, что  $y_2''(0) > y_1''(0)$  и  $y_3''(0) > y_2''(0)$ , однако первое неравенство неверно – из установленного ниже равенства (23) следует, что  $y_2''(0) = y_1''(0)$ ; но даже если бы оно было верно, то из него, второго (верного) неравенства и подразумеваемых соотношений:

$$y_1(0) = y_2(0) = y_3(0) = y_1'(0) = y_2'(0) = y_3'(0) = 0,$$

следовало бы только, что неравенства:  $y_2(x) > y_1(x)$  и  $y_3(x) > y_2(x)$  – справедливы в некоторой правой окрестности точки  $x = 0$ , но не обязательно при

всех  $0 < x < L_2$  и  $0 < x < L_3$ , что требуется для обоснования решения.

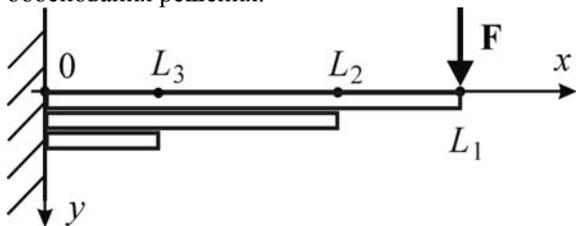


Рис. 1. Модель трехлистовой рессоры

В настоящей работе сформулирована строгая постановка контактной задачи об изгибе трехлистовой рессоры, доказана единственность решения и построено аналитическое решение в достаточно общем случае – для произвольных длин листов. Этим построением одновременно доказываются существование решения.

**Постановка контактной задачи.** Строгая постановка задачи основана на подходе, предложенном в [2; 8]. Рессора представляет собой три консольно закрепленных прямолинейных балки, испытывающих слабый (линейный) изгиб в одной плоскости (рис. 1);  $L_1 > L_2 > L_3 > 0$  – длины листов; внешняя нагрузка – ненулевая сила  $F$ . Сечения балок являются одинаковыми прямоугольниками. Согласно теории Бернулли-Эйлера [6], линии изгиба балок  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  имеют вид:

$$y_1(x) = G(x, L_1)F - \int_0^{L_2} G(x, s)q_{12}(s)ds, \quad (1)$$

$$y_2(x) = \int_0^{L_2} G(x, s)q_{12}(s)ds - \int_0^{L_3} G(x, s)q_{23}(s)ds, \quad (2)$$

$$y_3(x) = \int_0^{L_3} G(x, s)q_{23}(s)ds, \quad (3)$$

где  $q_{12}(x)$ ,  $q_{23}(x)$  – плотности сил взаимодействия соответствующих балок,

$$G(x, s) = \frac{2}{Ewh^3} \cdot \begin{cases} s^2(3x - s) & (x \geq s), \\ x^2(3s - x) & (x < s), \end{cases} \quad (4)$$

где  $E$  – модуль Юнга,  $W$  – ширина сечения,  $h$  – высота сечения (геометрически – при определении функций  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$ ,  $y_3(x)$  – высота сечения считается равной нулю). Задача заключается в отыскании  $q_{12}(x)$ ,  $q_{23}(x)$ . Будем считать, что эти функции имеют вид:

$$\sum_i P_i \delta(x - x_i), \quad (5)$$

где  $P_i > 0$ ,  $x_i > 0$  (все  $x_i$  различны), сумма конечна,  $\delta$  – дельта-функция Дирака. Обозначим  $r_{12}(x) = y_2(x) - y_1(x)$ ,  $r_{23}(x) = y_3(x) - y_2(x)$  (расстояния между соответствующими балками). Из (1 – 3) следует, что

$$r_{12}(x) = -G(x, L_1)F + 2 \int_0^{L_2} G(x, s)q_{12}(s)ds - \int_0^{L_3} G(x, s)q_{23}(s)ds, \quad (6)$$

$$r_{23}(x) = - \int_0^{L_2} G(x, s)q_{12}(s)ds + 2 \int_0^{L_3} G(x, s)q_{23}(s)ds. \quad (7)$$

Условие контакта балок состоит, помимо неотрицательности плотностей сил взаимодействия, в том, что расстояния между балками неотрицательны, а в тех точках, где плотности сил взаимодействия положительны, равны нулю. Окончательно приходим к следующей математической постановке задачи.

**Задача.** Найти функции  $q_{12}(x)$ ,  $q_{23}(x)$  вида (5), такие, что при  $0 \leq x \leq L_2$

$$r_{12}(x) \begin{cases} = 0 & (q_{12}(x) > 0), \\ \geq 0 & (q_{12}(x) = 0), \end{cases} \quad (8)$$

при  $0 \leq x \leq L_3$

$$r_{23}(x) \begin{cases} = 0 & (q_{23}(x) > 0), \\ \geq 0 & (q_{23}(x) = 0), \end{cases} \quad (9)$$

где  $r_{12}(x)$ ,  $r_{23}(x)$  выражаются формулами (6, 7).

**Доказательство единственности решения**

**Утверждение 1.** Поставленная задача может иметь только одно решение.

**Доказательство.** Пусть  $q_{12}(x)$ ,  $q_{23}(x)$  и  $q_{12}^*(x)$ ,  $q_{23}^*(x)$  – два решения задачи. По формулам (6, 7) им соответствуют функции  $r_{12}(x)$ ,  $r_{23}(x)$ ,  $r_{12}^*(x)$ ,  $r_{23}^*(x)$ . Обозначим

$$\begin{aligned} \rho_{12}(x) &= q_{12}(x) - q_{12}^*(x), \\ \rho_{23}(x) &= q_{23}(x) - q_{23}^*(x). \end{aligned} \quad (10)$$

Так как  $q_{12}(x)$ ,  $q_{23}(x)$ ,  $q_{12}^*(x)$ ,  $q_{23}^*(x)$  имеют вид (5), то  $\rho_{12}(x)$ ,  $\rho_{23}(x)$  также имеют вид (5), но  $P_i$  в (5) могут быть неположительными. Обозначим:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \int_0^{L_2} (r_{12}(x) - r_{12}^*(x))\rho_{12}(x)dx + \\ &+ \int_0^{L_3} (r_{23}(x) - r_{23}^*(x))\rho_{23}(x)dx. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (8 – 10) нетрудно установить, что в обоих слагаемых (11) подынтегральные функции неположительны; следовательно,  $\varepsilon \leq 0$ . С другой стороны, подставляя (6, 7) в (11), учитывая (10) и симметрию функции  $G(x, s)$  (4), найдем

$$\begin{aligned} \varepsilon = & 2 \int_0^{L_2} dx \rho_{12}(x) \int_0^{L_2} ds \rho_{12}(s) G(x, s) + \\ & + 2 \int_0^{L_3} dx \rho_{23}(x) \int_0^{L_3} ds \rho_{23}(s) G(x, s) - \\ & - 2 \int_0^{L_3} dx \rho_{23}(x) \int_0^{L_2} ds \rho_{12}(s) G(x, s). \end{aligned} \quad (12)$$

Вводя обозначения:

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \int_x^{L_2} (s-x) \rho_{12}(s) ds, \\ J_2(x) &= \int_x^{L_3} (s-x) \rho_{23}(s) ds, \end{aligned} \quad (13)$$

можно привести (12) к виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon = & \frac{12}{Ewh^3} \left[ \int_0^{L_2} J_1^2(x) dx + \int_{L_3}^{L_2} J_1^2(x) dx + \right. \\ & \left. + \int_0^{L_3} J_2^2(x) dx + \int_0^{L_3} (J_1(x) - J_2(x))^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (14) следует, что  $\varepsilon \geq 0$ . Так как выше было доказано неравенство  $\varepsilon \leq 0$ , то  $\varepsilon = 0$ .

Далее, учитывая (13) и упомянутый выше вид  $\rho_{12}(x)$ ,  $\rho_{23}(x)$ , легко установить, что функция  $J_1(x)$  непрерывна при  $0 \leq x \leq L_2$  и функция  $J_2(x)$  непрерывна при  $0 \leq x \leq L_3$ . Тогда из (14) и равенства  $\varepsilon = 0$  следует, что  $J_1(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L_2$  и  $J_2(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L_3$ . Отсюда вытекает, что  $\rho_{12}(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L_2$  и  $\rho_{23}(x) \equiv 0$  при  $0 \leq x \leq L_3$ . Действительно,  $\rho_{12}(x) = \sum_i F_i \delta(x-x_i)$ ; пусть  $x_* > 0$  – максимальное из чисел  $x_i$ , соответствующих ненулевым значениям  $F_i$ . Тогда из (13) следует, что  $J_1(x) = (x_* - x)F_* \neq 0$  в некоторой левой полуок-

рестности  $x_*$ , что противоречит установленному выше равенству  $J_1(x) \equiv 0$ ; аналогично для  $\rho_{23}(x)$ .

Таким образом, из (10) находим, что

$$q_{12}(x) \equiv q_{12}^*(x) \text{ при } 0 \leq x \leq L_2$$

и  $q_{23}(x) \equiv q_{23}^*(x)$  при  $0 \leq x \leq L_3$ ; тем самым утверждение 1 доказано.

**Аналитическое решение задачи.**

Обозначим  $\lambda = L_2/L_1$ ,  $\mu = L_3/L_2$ ,

$$v = 12 + 3(1-\mu)^2 + (1-\mu)^3,$$

$$\gamma = (3-\lambda)(5+\mu)/v - 1;$$

тогда  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ ,  $v > 0$ .

**Утверждение 2.** Решение поставленной задачи имеет следующий вид:

**а)** если  $\gamma \geq 0$ , то

$$q_{12}(x) = P \delta(x - L_2),$$

$$q_{23}(x) = Q \delta(x - L_3) \quad (15)$$

(контактные силы – на концах листов, рис. 2а), где

$$P/F = 4(3-\lambda)/(\lambda v),$$

$$Q/F = (3-\lambda)(3-\mu)/(\lambda \mu v); \quad (16)$$

**б)** если  $\gamma < 0$ , то

$$q_{12}(x) = P \delta(x - L_2) + R \delta(x - L_*),$$

$$q_{23}(x) = Q \delta(x - L_3) \quad (17)$$

(дополнительная контактная сила не на конце листа, рис. 2б), где

$$\frac{P}{F} = \frac{1-\lambda\mu}{2\lambda(1-\mu)} + \quad (18)$$

$$+ \frac{(1-\lambda)(1-\mu)}{2\lambda(\beta\mu+1-\mu)(\beta\mu+2(1-\mu))},$$

$$\frac{Q}{F} = \frac{(1-\lambda)(\beta\mu+1-\mu)^2}{\lambda\beta\mu(1-\mu)(\beta\mu+2(1-\mu))},$$

$$\frac{R}{F} = \frac{(1-\lambda)(1-\mu)^2}{2\lambda\beta\mu(\beta\mu+1-\mu)(\beta\mu+2(1-\mu))}, \quad (19)$$

$$L_* = (1-\beta)L_3, \quad 0 < \beta < 1 - \text{корень уравнения}$$

$$\Phi(B) = 0, \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Phi(B) = & (1-\lambda)(1-\mu)^2 \left( (1-\mu)(6-B^3) + 6\mu B \right) - \\ & - (3-9\mu+(5+\mu)\mu\lambda)(B\mu+1-\mu)(B\mu+2(1-\mu))B \end{aligned}$$

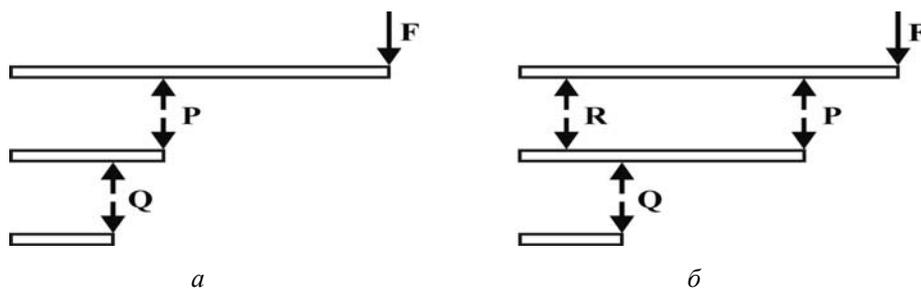


Рис. 2. Варианты силовой схемы рессоры

**Доказательство**

**а)** Данный случай возможен; он имеет место, например, при  $\lambda$ , близком к нулю, и при  $\mu$ , близком к единице. Так как  $P > 0$ ,  $Q > 0$ , то  $q_{12}(x)$ ,  $q_{23}(x)$  имеют вид (5). Подставляя (15, 16) в (6, 7), найдем  $r_{12}(x)$ ,  $r_{23}(x)$ . Можно показать, что соответствующие выражения представляются в следующем виде:

$$\frac{Ewh^3}{6L_1L_2^2F}r_{12}(x) = \xi^2(1-\xi)\gamma + \tag{21}$$

$$+ \xi^3\lambda\mu \frac{Q}{F} \int_{\xi}^1 \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (\tau \leq \mu) \\ (\tau - \mu)^2/\tau^4 & (\tau \geq \mu) \end{array} \right\} d\tau,$$

$$\frac{Ewh^3}{12L_3^3F}r_{23}(x) = \frac{\eta^2(1-\eta)(1-\mu)}{3-\mu} \frac{Q}{F}, \tag{22}$$

где  $\xi = x/L_2$ ,  $\eta = x/L_3$ . Из (21, 22) следует, что  $r_{12}(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L_2$ ,  $r_{23}(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L_3$ . Далее,  $q_{12}(x) > 0$  только при  $x = L_2$ , а  $r_{12}(L_2) = 0$ ;  $q_{23}(x) > 0$  только

$$\frac{Ewh^3}{6L_3^3F}r_{23}(x) = \zeta\eta^2(1-\eta) + (1-\beta)\eta^3 \frac{R}{F} \int_{\eta}^1 \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (\tau \leq 1-\beta) \\ (\tau - (1-\beta))^2/\tau^4 & (\tau \geq 1-\beta) \end{array} \right\} d\tau, \tag{24}$$

где

$$\frac{Ewh^3}{6L_2^3F}\tilde{r}_{12}(x) = (\xi - (1-\beta)\mu)^3\beta\mu \frac{Q}{F} \int_{\xi}^1 \left\{ \begin{array}{ll} 0 & (\tau \leq \mu) \\ \frac{(\tau - \mu)^2}{(\tau - (1-\beta)\mu)^4} & (\tau \geq \mu) \end{array} \right\} d\tau, \tag{25}$$

$$\zeta = \frac{(1-\lambda)(\beta^3(1-\mu)^3 + 3(1-\lambda\mu)(\beta\mu + 1 - \mu)^3)}{2\lambda\beta\mu(1-\mu)(3-\lambda\mu)(\beta\mu + 1 - \mu)(\beta\mu + 2(1-\mu))}. \tag{26}$$

Из (23 – 26) следует, что  $r_{12}(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L_2$ ,  $r_{23}(x) \geq 0$  при  $0 \leq x \leq L_3$ . Далее,  $q_{12}(x) > 0$  только при  $x = L_2$  и  $x = L_*$ , а  $r_{12}(L_2) = r_{12}(L_*) = 0$ ;  $q_{23}(x) > 0$  только при  $x = L_3$ , а  $r_{23}(L_3) = 0$ . Таким образом, (8, 9) выполнены и утверждение 2 доказано.

В итоге получено полное обоснование решения: доказаны положительность контактных сил, неотрицательность контактных расстояний и существование корня уравнения (20).

**Литература**

1. Глух, Б. А. Рессоры листовые / Б. А. Глух, В. Л. Бидерман // Машиностроение. Энциклопедический справочник. – М.: Машгиз, 1948. – Т. 2. – С. 723 – 739.
2. Няшин, Ю. И. К теории изгиба листовой рессоры / Ю. И. Няшин, М. А. Осипенко, Р. Н. Рудаков // Изв. РАН, МТТ. – 2002. – № 6. – С. 134 – 143.
3. Осипенко, М. А. Новый итерационный метод расчета многолистовой рессоры / М. А. Осипенко, Ю. И. Няшин // Вычисл. мех. спл. сред. – 2012. – Т. 5. – № 4. – С. 371 – 376.

при  $x = L_3$ , а  $r_{23}(L_3) = 0$ . Таким образом, (8, 9) выполнены.

**б)** Данный случай возможен; он имеет место, например, при  $\lambda$ , близком к единице, и при  $\mu$ , близком к нулю. Существование корня  $0 < \beta < 1$  следует из непрерывности  $\Phi(B)$  при  $0 \leq B \leq 1$  и значений

$$\Phi(0) = 6(1-\lambda)(1-\mu)^3 > 0,$$

$$\Phi(1) = \gamma\nu < 0$$

(единственность корня следует из утверждения 1).

Так как  $P > 0$ ,  $Q > 0$ ,  $R > 0$ , то  $q_{12}(x)$ ,

$q_{23}(x)$  имеют вид (5). Подставляя (17 – 20) в (6, 7),

найдем  $r_{12}(x)$ ,  $r_{23}(x)$ . Можно показать, что со-

ответствующие выражения представляются в следующем виде:

$$r_{12}(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq L_*), \\ \tilde{r}_{12}(x) & (x \geq L_*), \end{cases} \tag{23}$$

**Выводы.** Получено полностью обоснованное аналитическое решение задачи для произвольных длин листов. Построено доказательство единственности решения (имеющее смысл только при наличии строгой постановки). Для доказательства неотрицательности контактных расстояний применены их новые интегральные представления. Посредством введения вспомогательной переменной интегрирования расстояния представлены в виде, из которого непосредственно следует их неотрицательность. Здесь этот прием следует рассматривать как формальный; установление его физического смысла может быть предметом дальнейших исследований.

4. Пархиловский, И. Г. Автомобильные листовые рессоры / И. Г. Пархиловский. – М.: Машиностроение, 1978. – 232 с.
5. Расчеты на прочность в машиностроении / С. Д. Пономарев [и др.]. – М.: Машгиз, 1956. Т. 1. – 884 с.
6. Работнов, Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела / Ю. Н. Работнов. – М.: Наука, 1988. – 711 с.
7. Феодосьев, В. И. Избранные задачи и вопросы по сопротивлению материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
8. Osipenko, M. A. A contact problem in the theory of leaf spring bending / M. A. Osipenko, Yu. I. Nyashin, R. N. Rudakov // International Journal of Solids and Structures. – 2003. – № 40. – P. 3129 – 3136.

**Информация об авторе:**

*Осипенко Михаил Анатольевич* – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики Пермского национального исследовательского политехнического университета (ПНИПУ), 89097339918, [oma@theormech.pstu.ac.ru](mailto:oma@theormech.pstu.ac.ru).

*Mikhail A. Osipenko* – Candidate of Physics and Mathematics, Assistant Professor at the Department of Theoretical Mechanics, Perm National Research Polytechnic University.