

Fraksiyonel dereceli FitzHugh-Nagumo nöron modelinin devre sentezi için alternatif bir yaklaşım

An alternative approach for the circuit synthesis of the fractional-order FitzHugh-Nagumo neuron model

Nimet KORKMAZ^{1*}, İbrahim Ethem SAÇU²

¹Elektrik-Elektronik Mühendisliği Bölümü, Mühendislik-Mimarlık ve Tasarım Fakültesi, Kayseri Üniversitesi, Kayseri, Türkiye.
nimetkorkmaz@kayseri.edu.tr

²Klinik Mühendisliği Araştırma ve Uygulama Merkezi (ERKAM), Erciyes Üniversitesi, Kayseri, Türkiye.
iesacu@erciyes.edu.tr

Geliş Tarihi/Received: 19.03.2021
Kabul Tarihi/Accepted: 21.09.2021

Düzeltilme Tarihi/Revision: 17.08.2021

doi: 10.5505/pajes.2021.09382
Araştırma Makalesi/Research Article

Öz

Bu çalışmada FitzHugh-Nagumo (FHN) nöron modelinin fraksiyonel versiyonu üzerinde durulmuştur. Öncelikle fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin kararlılık analizleri yapılarak, sistemin dinamik davranış sergileyebileceği minimum fraksiyonel derece belirlenmiştir. Ardından fraksiyonel derece ile temsil edilen sistemlerin nümerik analizlerinde kullanılan yöntemlerden biri olan Grünwald-Letnikov (G-L) fraksiyonel türev yöntemi ile fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin yanıtları elde edilmiştir. Nöron modellerinin donanımsal çözümleri sayesinde matematiksel olarak tanımlanan sistemlerin yanıtları gerçek zamanlı işaretler şeklinde elde edilebilir; nöronların hücre zarı özellikleri elektromekanik olarak tanımlanabilir ve nöronların dinamik davranışlarını etkileyen parametreler, donanım çözümlerinde kullanılan elektronik elemanların karakteristikleri ile ilişkilendirilebilir. Biyolojiden esinlenilerek geliştirilen sistemlerde fraksiyonel dereceli hesaplamaların kullanılabilirliğinin görülmesi amacıyla, bu çalışmada fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre gerçekleştirimi üzerinde durulmuştur. Bu kapsamda, diferansiyel denklemlerin donanım çözümlerinde op-amp, direnç ve kapasitör elemanları kullanılarak tasarlanan integratör devrelerinde; fraksiyonel derecenin karşılanması için klasik kapasitör elemanları yerine R-C taklit devreleri kullanılmıştır. R-C taklit devrelerinin tasarımının ilk aşamasında Matsuda yaklaşıklık metodu ile üçüncü dereceden bir transfer fonksiyonu elde edilmiştir. Elde edilen bu transfer fonksiyonu, FOSTER-I R-C ağına dönüştürülerek tamsayı dereceli FHN nöron modelinin devre gerçekleştirimi için klasik kapasitör elemanı yerine devredeki integratör bloklarında, klasik kapasitör elemanı yerine kullanılmıştır. Böylece fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre çözümü için alternatif bir yaklaşım ortaya konmuştur ve bu yapının doğrulanması SPICE devre simülasyonu ile yapılmıştır.

Anahtar kelimeler: FitzHugh-Nagumo Nöron modeli, Fraksiyonel kapasitör, Devre sentezi, Matsuda yaklaşıklık yöntemi, FOSTER-I ağı.

Abstract

This study focuses on the fractional version of the FitzHugh-Nagumo (FHN) neuron model. Firstly, the stability analysis of the fractional-order FHN neuron model has been performed and the minimum fractional degree, at which the system could exhibit dynamic behavior, has been determined. Then, the responses of the fractional-order FHN neuron model have been obtained using the Grünwald-Letnikov (G-L) fractional derivative method. This method is one of the methods used in the numerical analysis of the systems that are represented by fractional order. Thanks to the hardware solutions of neuron models; the responses of mathematically defined systems can be obtained in the form of real-time signals, the cell membrane properties of the neurons can be described electromechanically, and the parameters that affect the dynamic behavior of neurons can be associated with the characteristics of the electronic components used in hardware solutions. In this study, the circuit implementation of the fractional-order FHN neuron model is emphasized in order to see the usability of fractional-order calculations in systems that are inspired by biology. In this context, the R-C mimetic circuits have been used instead of classical capacitor elements to compensate for the fractional order in the integrator circuits that are designed by using op-amp, resistor and capacitor elements for the hardware solutions of the differential equations. In the first stage of the design of these R-C imitation circuits, a third-order transfer function has been obtained by the Matsuda approximation method. This obtained transfer function has been transformed into FOSTER-I R-C network and it has been used instead of the classical capacitor element in the integrator blocks of the circuit that is designed by us for the circuit implementation solution of the integer-order FHN neuron model. Thus, an alternative approach for circuit solution of the fractional-order FHN neuron model has been introduced and the verification of this structure has been made by the SPICE circuit simulation.

Keywords: FitzHugh-Nagumo neuron model, Fractional capacitor, Circuit synthesis, Matsuda approximation method, FOSTER-I network.

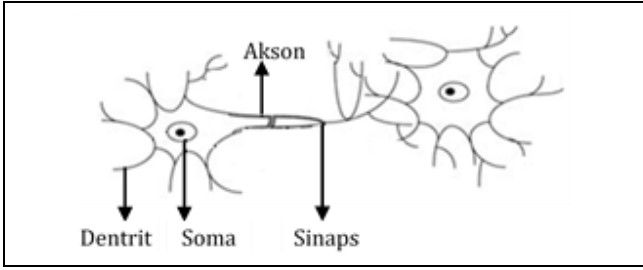
1 Giriş

Canlılarda duyu organları ile beyin ve omurilik gibi yüksek seviyeli bilgi işleme merkezleri arasında iletişimi sağlayan temel eleman, nöron olarak bilinen sinir hücreleridir. Nöronlar; hücrelerin yaşamsal işlevlerini sağlayan somalar, hücreler arası iletişimin alıcı yapısı olan dentritler, bilgiyi hücre gövdesinden terminallere taşıyan akson yapıları ve nöronlar arası birleşim

noktaları olarak tanımlanabilecek sinaps yapılarından meydana gelmektedir. Bir sinir hücresinin temel kısımlarını içeren basit bir gösterim Şekil 1'de sunulmaktadır.

Nöronlar arasında taşınan bilgi işareti, aksiyon potansiyeli olarak bilinen bir elektriksel potansiyeldir. Bu elektriksel potansiyelin temeli, nöronların hücre zarları üzerinde meydana gelen iyon konsantrasyonu değişimine dayanmaktadır.

*Yazışılan yazar/Corresponding author



Şekil 1. Bir sinir hücresinin temel kısımlarını içeren basit bir gösterim.

Figure 1. A simple representation of the basic parts of a neuron cell.

Nöronların hücre zarında meydana gelen bu iyonik değişim, 1952'de Hodgkin-Huxley (HH) tarafından önerilen ve adi diferansiyel denklemlerle tanımlanan ifadelerle detaylı olarak modellenmiştir [1],[2]. İyon konsantrasyonu değişiminin hücre zarında meydana getirdiği akımla ve dolayısı ile potansiyel değişimiyle ilgilenen HH nöron modeli, kapsamlı bir biyolojik nöron modelidir. Bu sebeple bağımlı olduğu pek çok parametre vardır. HH nöron modelinin hesaplama yükünün azaltılması ve çeşitli parametrelerin basitleştirilmesi sonucu, HH nöron modelinden farklı olarak harici bir akımla uyarılan ve HH nöron modelinin sadeleşmiş şekli olan FitzHugh-Nagumo (FHN) nöron modeli geliştirilmiştir [3]. HH nöron modelinin değişken sayısını azaltmak amacıyla FitzHugh tarafından birtakım çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucunda; nöron hücre zarında voltaj kapı değişkenlerinin birbiri ile ilişkili olduğu ve bu ilişkinin sabit bir katsayı ile temsil edilebileceği; hücre zarı potansiyelinin kübik bir fonksiyonla ifade edilebileceği ve modelin daha basit polinom ifadeleri ile tanımlanan yapılar indirgenebileceği önerilmiştir. Bu sadeleştirmeler sonucunda elde edilen nihai model FHN nöron modeli olarak literatüre sunulmuş ve Denklem (1)'deki gibi tanımlanmıştır.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= c(x - y + I - x^3/3) \\ \dot{y} &= (x - by + a)/c \end{aligned} \quad (1)$$

Burada 'x' akson boyunca yayılan hücre zarı potansiyelini, 'y' nöronun dinlenme durumuna dönmesi için gerekli olan toparlanma parametresini, 'I' hücre zarına uygulanan harici akımı ifade etmektedir. Burada 'a', 'b' ve 'c' ise HH nöron modelinin sadeleştirilmesi sonucunda türetilen ayarlanabilir model parametreleridir. Bu parametrelerin değişimi nöron modelinin dinamik davranışını etkilemektedir. Modelin aksiyon potansiyeli işareti formunda dinamik davranış sergilemesi için nümerik simülasyonda bu parametreler $a=0.7$, $b=0.8$ ve $c=3$ değerlerinde seçilmiştir.

Adi diferansiyel denklemlerle ve doğrusal olmayan ifadelerle tanımlanan nöron yapılarının modelleme çalışmalarında; fraksiyonel hesaplama da son zamanlarda oldukça dikkat çeken konular arasında yer almaktadır [4]. Fraksiyonel hesaplamada; klasik matematiksel hesaplamadan farklı olarak, diferansiyel denklemlerin dereceleri tamsayı olabileceği gibi kesirli sayı ve hatta kompleks sayı da olabilmektedir. Fraksiyonel dereceli hesaplama mühendislik problemleri, kontrol teorisi ve biyoloji gibi farklı alanlarda kullanılabilir [5]-[7].

Fraksiyonel dereceli tanımlamalar kullanılarak modellenen sistemlerin en önemli avantajlarından biri, bu hesaplama yöntemi ile modellenen sistemlerin daha ayrıntılı model tanımlamalarına sahip olması iken; bir diğer avantajı ise,

modellerde kullanılan fraksiyonel derecenin harici bir sistem parametresi olarak kullanılabilmesidir. Bu durum sistemlerin tasarımlarında ve kontrol süreçlerinde ilave bir esneklik sağlamaktadır.

Bu çalışmada nöronların dinamik davranışlarını ayrıntılı şekilde tanımlayan HH nöron modelinin sadeleştirilmesi ile türetilen FHN nöron modelinin fraksiyonel versiyonu üzerinde durulmuştur. Öncelikle iki adet durum denklemi ile tanımlanan FHN nöron modelinin kararlılık analizleri yapılarak, sistemin dinamik davranış sergileyebileceği minimum fraksiyonel derece belirlenmiştir. Ardından fraksiyonel derece ile temsil edilen ve doğrusal olmayan fonksiyonlar içeren sistemlerin nümerik analizlerinde kullanılan yöntemlerden biri olan Grünwald-Letnikov (G-L) fraksiyonel türev yöntemi ile biyolojik nöron modelinin yanıtları elde edilmiştir [8].

Fraksiyonel dereceli sistemlerin nümerik analizlerinde sıklıkla kullanılan G-L yöntemi gibi çözümler, fraksiyonel hesaplama sürecinde modelin önceki durum bilgisine ihtiyaç duyar. Modelin geçmiş bilgilerinin sınırlı bir iterasyon sayısı için sürekli saklanması işlemi kişisel bilgisayarlarda mümkün olmasına rağmen, fraksiyonel dereceli sistemin donanım gerçekleştirimi çalışmaları yapılmak istendiğinde G-L gibi yöntemlerin gerçekleştirim çalışmalarında doğrudan kullanımı elverişsiz bir çözüm haline gelmektedir. Bu tür yöntemlerin donanım çalışmalarına uyarlanması için sınırlı hafıza (short-memory) yaklaşımı gibi çözümler önerilse de; fraksiyonel dereceli sistemlerin analizi için geliştirilen alternatif yöntemler de literatürde tercih edilmektedir. Bahsedilen alternatif yöntemler, genellikle fraksiyonel türev operatörünü istenilen bir sınırlı bantta karşılayacak olan ve tam sayı derece ile tanımlanmış yaklaşıklık fonksiyonlarının türetilmesine dayanmaktadır. Sınırlı bantta tanımlanan yaklaşıklık fonksiyonlarının devre sentezleri içinse; R-C, R-L ya da R-L-C ağlarının kullanıldığı taklit devreleri tasarlanabilmektedir [9]. Tasarlanan taklit devrelerinin fraksiyonel türev operatörünün donanım çözümü amacıyla kullanımı sonucunda, hafıza gereksinimi problemi çözülmekte ve alternatif yöntemler kullanılarak yapılan gerçekleştirimler devre karmaşıklığı ve donanım maliyeti açısından daha avantajlı hale gelmektedir.

Literatürde nöron modelleme çalışmalarında sıklıkla kullanılan HH, FHN, Hindmarsh-Rose ve Izhikevich nöron modelleri gibi farklı nöron modeli tanımlamaları için farklı tasarım tekniklerine sahip pek çok donanım uygulama çalışması vardır [1],[3],[10]-[18]. Nöron modellerinin donanımsal çözümleri sayesinde matematiksel olarak tanımlanan sistemlerin yanıtları gerçek zamanlı işaretlerle elde edilebilir; nöronların hücre zarı özellikleri elektromekanik olarak tanımlanabilir ve nöronların dinamik davranışlarını etkileyen parametreler, donanım çözümlerinde kullanılan elektronik elemanların karakteristikleri ile ilişkilendirilebilir. Biyolojiden esinlenilerek geliştirilen sistemlerde fraksiyonel dereceli hesaplamaların kullanılabilirliğinin görülmesi amacıyla, bu çalışmada fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre gerçekleştirimi üzerinde durulmuştur. Bu kapsamda, diferansiyel denklemlerin donanım çözümlerinde op-amp, direnç ve kapasitör elemanları kullanılarak tasarlanan integratör devrelerinde; fraksiyonel derecenin karşılanması için klasik kapasitör elemanları yerine R-C taklit devreleri kullanılmıştır. R-C taklit devrelerinin tasarımının ilk aşamasında Matsuda yaklaşıklık metodu [19] ile üçüncü dereceden bir transfer fonksiyonu elde edilmiştir. Elde edilen bu transfer fonksiyonu, FOSTER-I R-C ağına [20] dönüştürülerek tamsayı dereceli FHN nöron modelinin devre

gerçekleştirim çözümü için tarafımızca tasarlanan op-amp tabanlı devre tasarımındaki integratör bloklarında, klasik kapasitör elemanı yerine kullanılmıştır. Böylece fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre çözümü için farklı bir yaklaşım ortaya konmuştur ve bu yapının doğrulaması SPICE devre simülasyonu ile yapılmıştır.

Bu kapsamda, fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin tanıtılması, bu sistemin denge noktalarının hesaplanması ve kararlılık analizlerinin yapılmasının ardından; kararlılık analizleri sonucunda sistem dinamikleri korunarak modelin dinamik davranışlar sergileyebilmesi için kullanılacak minimum fraksiyonel derecenin hesaplanması işlemleri Bölüm 2'de ayrıntılı olarak ele alınacaktır. Bölüm 3'te FHN nöron modelinin dinamik davranışını etkilemeyen bir fraksiyonel derece belirlenerek, modelin G-L yöntemi ile nümerik analizleri yapılacaktır. Bölüm 4'te fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre sentezinde kullanılacak olan FOSTER-I R-C ağının oluşturulma sürecinin ayrıntıları ele alınacak ve SPICE devre simülasyon sonuçları sunulacaktır. Son bölümde ise çalışma ile elde edilen sonuçlar tartışılacaktır.

2 Fraksiyonel dereceli FitzHugh-Nagumo nöron modeli

Fraksiyonel hesaplama yönteminin temeli göz önüne alındığında, Denklem (1) ile tanımlanan tamsayı dereceli FHN nöron modelinin, fraksiyonel dereceli modelin derecesi bire eşitken ki özel bir versiyonu olduğu söylenebilir. Buna göre fraksiyonel dereceli FHN nöron modeli için yapılan genel bir tanımlama Denklem (2)'deki gibidir:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^{q_1} x &= c(x - y + I - x^3 / 3) \\ {}_0 D_t^{q_2} y &= (x - by + a) / c \end{aligned} \quad (1)$$

Fraksiyonel dereceli sistemlerin kararlılık analizleri, tamsayı dereceli sistemlerin kararlılık analizlerinden farklıdır. Sistemin durum değişkenlerindeki fraksiyonel derecelerinin birbirine eşit olması durumunda; yani ' $q_1=q_2=q_3=\dots=q_n=q$ ', sistemin Jacobian matrisinin (J) özdeğerleri (λ), Denklem (3)'teki koşulu sağladığında sistemin denge noktalarının asimtotik olarak kararlı olduğu söylenir [21, 22].

$$|\arg(\text{eig}(J))| = |\arg(\lambda_i)| > \frac{q\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Fraksiyonel dereceli nöron modelinin ateşlenmesi için gerekli koşul sistemin en az bir Jacobian matrisi özdeğerinin kararsız bölgede konumlanmasıdır. Denklem (2) ile tanımlanan FHN nöron modelinin Jacobian matrisi Denklem (4)'te verilmektedir.

$$J = \begin{pmatrix} c(1 - (x^*)^2) & -c \\ 1/c & -b/c \end{pmatrix} \quad (5)$$

Burada ' x^* ', ' x ' durum değişkeninin ilgili denge noktasındaki değeridir. Buna göre ' $I=0.6$ ' değeri için FHN nöron modelinin denge noktaları $E_1 = (0.3401 + 1.0474i, 1.3002 + 1.3093i)$, $E_2 = (0.3401 - 1.0474i, 1.3002 - 1.3093i)$ ve $E_3 = (-0.6803, 0.0247)$ olarak elde edilmiştir. Bu denge noktaları için hesaplanan özdeğerler ise $\lambda_{11} = (5.7983 - 2.1902i)$, $\lambda_{12} = (-0.1208 + 0.0527i)$; $\lambda_{21} = (5.7983 + 2.1902i)$, $\lambda_{22} = (-0.1208 - 0.0527i)$, $\lambda_{31} = (0.6725 + 0.3434i)$, $\lambda_{32} = (0.6725 - 0.3434i)$ şeklindedir. Denklem (3) ve elde edilen özdeğerlerden yola çıkılarak sistemin minimum fraksiyonel

derecesi ' $q_{min} > 0.3005$ ' olarak belirlenmiştir. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde Denklem (2) ile tanımlanan fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinde belirlenen minimum fraksiyonel dereceden büyük olan ' $q_1=q_2=q=0.9$ ' olarak seçilmiştir.

3 Fraksiyonel dereceli FitzHugh-Nagumo nöron modelinin nümerik simülasyonu

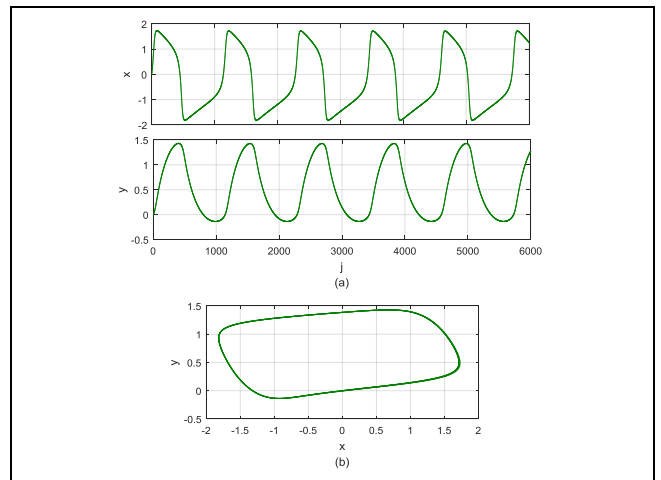
Fraksiyonel dereceli diferansiyel denklemlerin çözümü için Caputo, Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov (G-L) gibi farklı hesaplama yöntemleri mevcuttur [8]. Burada fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin nümerik simülasyonu için G-L yöntemi kullanılmıştır. G-L yönteminin detayları Denklem (5)'te sunulmaktadır.

$${}_a D_t^q f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^q} \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor} (-1)^j \binom{q}{j} f(t-jh) \quad (5)$$

Burada a ve t türev işleminin sınırları iken, h adım büyüklüğüdür. ' $\lfloor \frac{t-a}{h} \rfloor$ ' işlemi tamsayı kısmı ifade ederken, binom sabitleri Gamma ' $\Gamma(\dots)$ ' fonksiyonu açılımı kullanılarak Denklem (6)'daki gibi tanımlanmaktadır:

$$\binom{q}{j} = \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(q-j+1)} \quad (6)$$

Denklem (2) ile tanımlanan fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinde; nörona uygulanan harici akımı temsil eden ' I ' parametresinin değeri ' $I=0.6$ ' seçilerek ve [$x(0)=0, y(0)=0$] başlangıç koşulları kullanılarak yapılan nümerik simülasyon sonuçları Şekil 2'de görülmektedir. Şekil 2(a)'da ' x ' ve ' y ' durum değişkenlerinin zaman domaini cevapları sunulurken, Şekil 2(b)'de ' x - y ' faz portresi cevabı verilmektedir. G-L yöntemi kullanılarak yapılan bu nümerik simülasyonlarda Denklem (6)'daki ' j ' ve ' h ' değerleri sırasıyla $j=6000$ ve $h=0.01$ olarak ayarlanmıştır. Önceki bölümlerde belirtildiği gibi sistemin fraksiyonel derecesi ' $q=0.9$ 'a ayarlanmıştır.

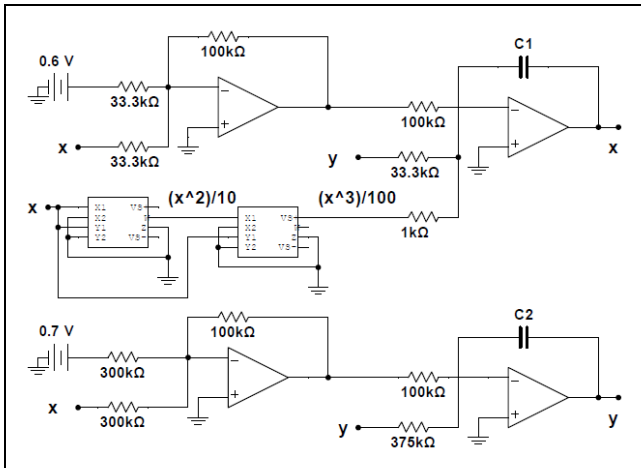


Şekil 2. Fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin G-L yöntemi kullanılarak yapılan nümerik simülasyon sonucu.

Figure 2. The numerical simulation result of the fractional-order FHN neuron model by using the G-L method.

4 Fraksiyonel dereceli FitzHugh-Nagumo nöron modelinin devre sentezi

Fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin G-L yöntemi ile nümerik yanıtların incelenmesinin ardından, bu bölümde fraksiyonel dereceli sistemin devre sentezi üzerinde durulacaktır. Fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre tasarımından önce, Denklem (1) ile tanımlanan tamsayı dereceli sistem için tarafımızca tasarlanan Şekil 3'teki devre yapısı ele alınacaktır. Bu devre yapısında nöron modelinin diferansiyel denklemlerle tanımlanan durum değişkenlerinin çözümü için aktif eleman op-amp'lar, R=100kΩ değerinde dirençler ve C₁=C₂=10nF değerinde kapasitörler kullanılarak tasarlanan temel integratör bloğundan yararlanılmıştır. Nöron modelinde hücre zarı potansiyelini temsil eden 'x' durum değişkeninde bulunan üçüncü dereceden doğrusal olmayan çarpım için AD633 Analog çarpma entegresinden yararlanılmıştır. Modeldeki sabit parametreler, doğru akım kaynakları ile gerçekleştirilmiştir. Son olarak toplama ve çıkarma işlemleri de op-amp tabanlı toplama devreleri ile gerçekleştirilmiştir. Bu gerçekleştirim, fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin 'q=1' derecesinde özelleşmiş versiyonu olan Denklem (1)'deki tanımlama için elverişli bir çözümdür. Bununla birlikte, fraksiyonel derece '0<q<1' aralığında iken tasarlanan bu yapı modelin fraksiyonel derecesini karşılayamamaktadır.



Şekil 3. FHN nöron modelinin ayrık donanımlarla gerçekleştirim şeması.

Figure 3. The realization scheme of the FHN neuron model with the discrete devices.

Daha öncede bahsedildiği gibi fraksiyonel türev ve integral için önerilen çözüm yöntemlerinin donanım gerçekleştirimleri de modelin geçmiş bilgilerine ihtiyaç duyduğundan elverişsiz hale gelmektedir. Bu sebeple alternatif yöntemlerin kullanımı söz konusu olmaktadır. Bu alternatif yöntemler, genellikle fraksiyonel türev ve integratör operatörlerini istenilen sınırlı bir bantta karşılayacak olan tam sayı dereceli yaklaşık fonksiyonların türetilmesine dayanmaktadır. Tamsayı dereceli yaklaşık fonksiyonlarının türetilmesi için Carlson, Oustaloup, Charef ve Matsuda gibi yöntemler kullanılmaktadır. Bu çalışmada fraksiyonel dereceli FHN nöron modeli için elde edilmesi amaçlanan tam sayı dereceli yaklaşık fonksiyonun hesabında Matsuda yönteminden yararlanılmıştır. Matsuda yöntemi ile yaklaşık fonksiyonu türetilirken öncelikle 's^q' tanımlamasının rasyonel modeli sürekli fraksiyonel açılım

yöntemi ile elde edilir. Sonrasında istenilen frekanstaki orijinal fonksiyona sabitleme işlemi yapılır ve 's^q' ifadesinin yaklaşıklık fonksiyonu Matsuda yöntemi ile Denklem (7)'deki gibi hesaplanır [19]:

$$s_q = d_0(2\pi f_0) + \frac{s - 2\pi f_0}{d_1(2\pi f_1) + \frac{s - 2\pi f_1}{d_2(2\pi f_2) + \frac{s - 2\pi f_2}{\dots}}} \quad (7)$$

$$d_0(2\pi f) = |(j2\pi f)^q|$$

$$d_{k+1}(2\pi f) = \frac{2\pi f - 2\pi f_k}{d_k(2\pi f) - d_k(2\pi f_k)} \quad k = 0, 1, \dots, N$$

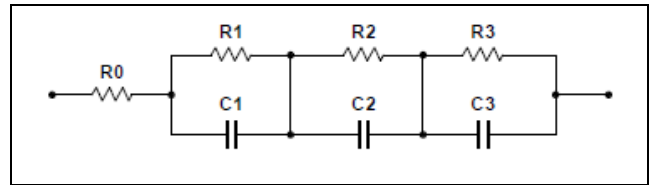
Bu yöntemde kutupların ve sıfırların toplam sayısı yaklaşık N derecesi olarak bilinir.

Matsuda yöntemi kullanılarak 'q=0.9' değeri için hesaplanan yaklaşıklık fonksiyonu Denklem (8)'de sunulmaktadır:

$$H(s)_{0.9, Matsuda} = \frac{s^3 + 2 \times 10^4 s^2 + 6.243 \times 10^6 + 1.532 \times 10^8}{9.665 \times 10^{-5} s^3 + 0.03939 s^2 + 1.262 s + 0.631} \quad (8)$$

Tam sayı dereceden tanımlanmış FHN nöron modelinin ayrık elemanlar kullanılarak donanım gerçekleştirim çalışması göz önüne alındığında, nöron modelinin diferansiyel ifadelerinin gerçekleştirimi için kapasitör elemanının Z(s) = 1/sC ifadesi ile temsilinden yararlanıldığı görülmektedir.

FHN nöron modelinin Şekil 3'teki gerçekleştirim şeması göz önünde bulundurularak, Laplace domeninde tanımlı olan klasik kapasitör ifadesi ve kapasitörün eşitlikleri, fraksiyonel matematikle tanımlanarak bir genelleştirme yapılırsa; Z(s) = 1/s^qC_q şeklinde bir tanımlama karşımıza çıkmaktadır. Bu genel tanımlama literatürde fraksiyonel kapasitör kavramı olarak nitelendirilmekte ve iki terminallli bir eleman olarak tasarlanan fraksiyonel dereceli sistemlerin donanım çözümlerinde kullanılabileceği düşünülmektedir. Bu iki terminallli yapının tasarlanması için Şekil 3'teki modelin integratör bloklarında yer alan kapasitör elemanlarının değerleri 'C₁=C₂=10 nF' olarak seçildiğindeki normal kapasitör elemanlarının yerine kullanılabilecek fraksiyonel kapasitörler FOSTER-I RC ağ yapısına uygun olacak şekilde tasarlanabilir [20]. Bu çalışmada 'q=0.9' değeri ve Denklem (8)'deki yaklaşıklık fonksiyonu kullanılarak oluşturulan ve R-C elemanlarından oluşan bu ağ yapısına ait bir gösterim Şekil 4'te sunulmaktadır.

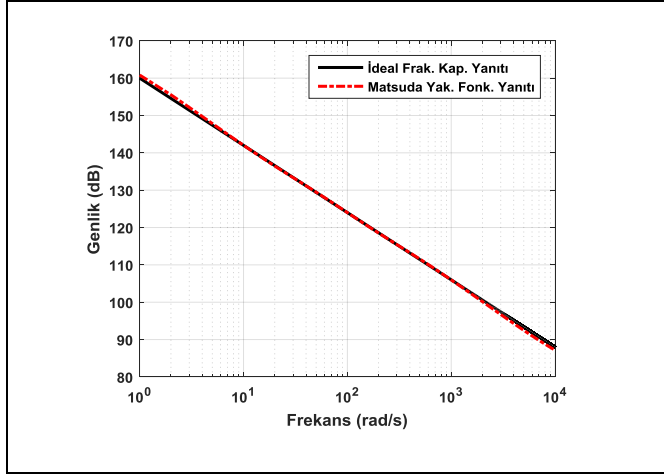


Şekil 4. 'q=0.9' fraksiyonel dereceli ve 10nF/s^{0.1} değerli fraksiyonel kapasitörün FOSTER-I R-C ağ yapısına uygun şekilde yapılan tasarım şeması. (R₀=10.347kΩ, R₁=121.77kΩ, R₂=1.0025MΩ, R₃=241.63MΩ, C₁=22.042nF, C₂=28.924nF ve C₃=8.1455nF).

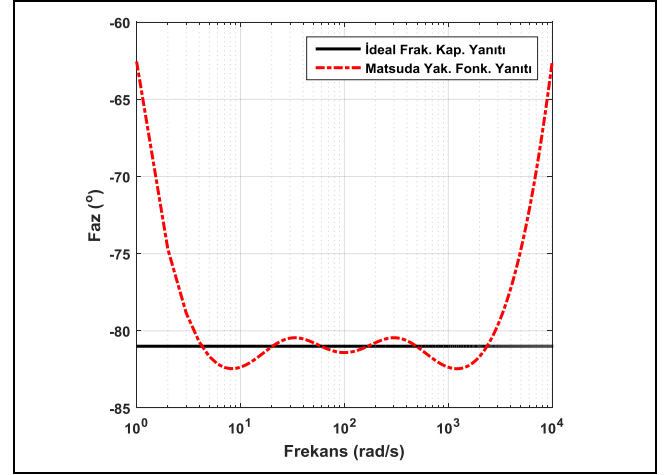
Figure 4. A design diagram of the fractional capacitor with 'q = 0.9' and 10nF / s^{0.1} values in accordance with the FOSTER-I R-C network structure. (R₀=10.347kΩ, R₁=121.77kΩ, R₂=1.0025MΩ, R₃=241.63MΩ, C₁=22.042nF, C₂=28.924nF ve C₃=8.1455nF).

Değeri $10\text{nF/s}^{0.1}$ olan ideal fraksiyonel dereceli kapasitör ile Denklem (8)'deki yaklaşıklık fonksiyonunun genlik Şekil 5(a) ve faz Şekil 5(b) yanıtlarının karşılaştırılması Şekil 5'te sunulmaktadır. Şekil 5(b)'den görülebileceği gibi ideal fraksiyonel kapasitör elemanının faz açısı beklenildiği gibi ' $\pi q/2$ ' ilişkisine bağlı olarak -81° 'de sabittir. Yaklaşıklık fonksiyonunun faz yanıtı ise sınırlı frekans bandı dışında sapma göstermektedir.

Şekil 5'teki fraksiyonel kapasitör yapısı için tasarlanan devrede kullanılan eleman değerleri $R_0=10.347\text{k}\Omega$, $R_1=121.77\text{k}\Omega$, $R_2=1.0025\text{M}\Omega$, $R_3=241.63\text{M}\Omega$, $C_1=22.042\text{nF}$, $C_2=28.924\text{nF}$ ve $C_3=8.1455\text{nF}$ olarak belirlenmiştir. Bu ağ yapısı FHN nöron modelinin tamsayı dereceli gerçekleştirimi için tasarlanan Şekil 3'teki devreye, Şekil 6'daki gibi adapte edilebilir. ' $q=0.9$ ' fraksiyonel dereceli FHN nöron modeli için tasarlanan nihai devre yapısına ait SPICE simülasyon sonuçları Şekil 7'de verilmektedir.



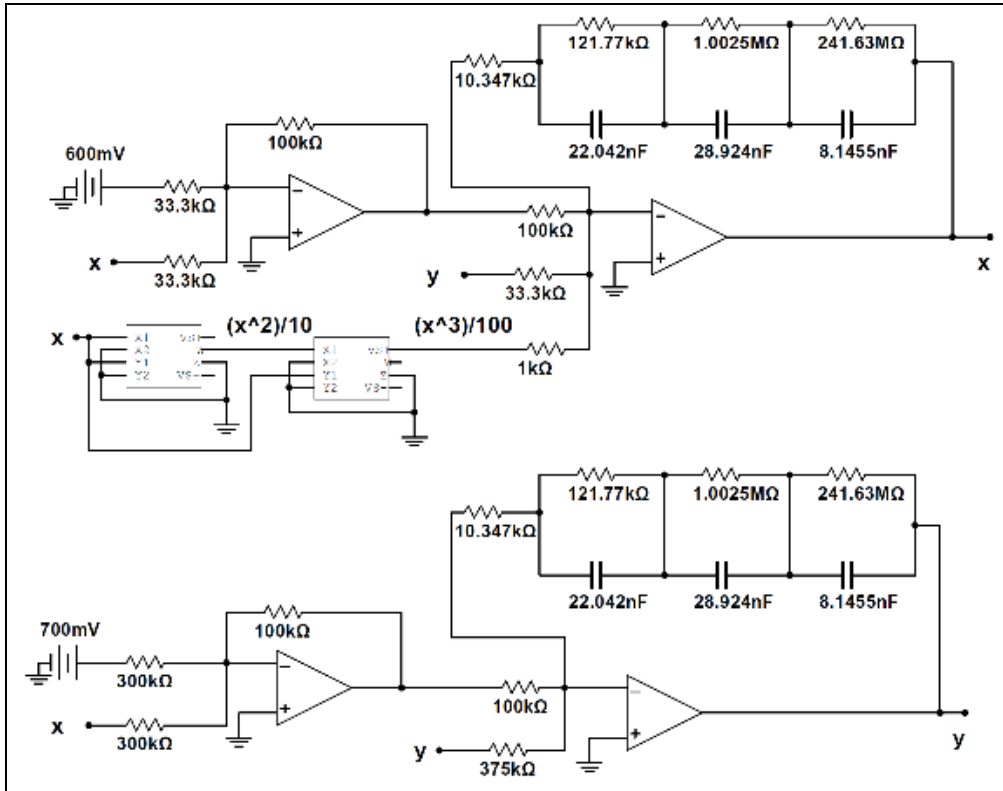
(a)



(b)

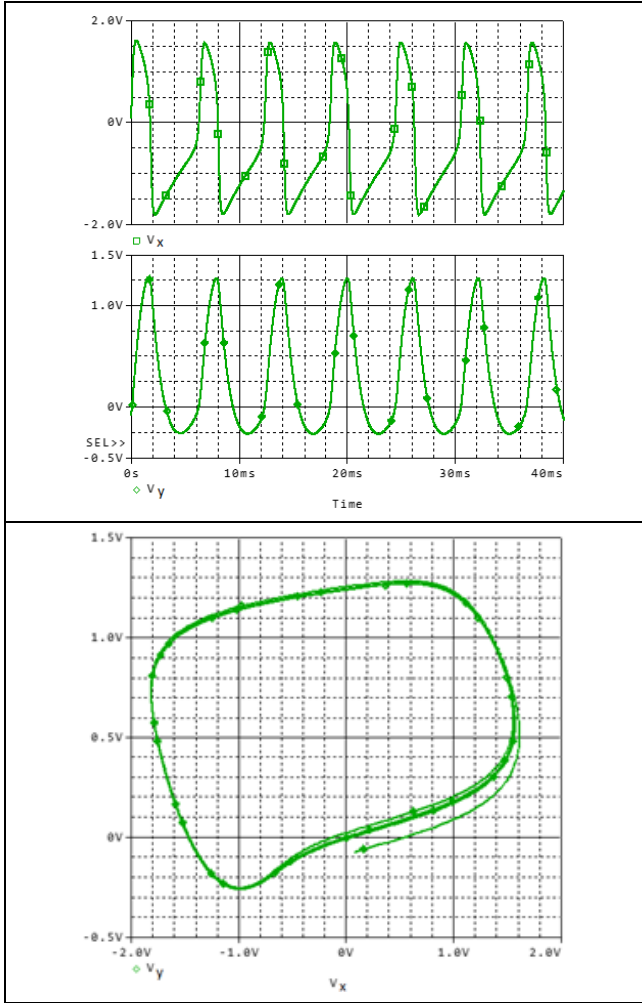
Şekil 5. Değeri $10\text{nF/s}^{0.1}$ olan fraksiyonel dereceli ideal kapasitör ile yaklaşıklık fonksiyonunun, (a): Genlik be, (b): Faz yanıtlarının karşılaştırılması.

Figure 5. A comparison of (a) the amplitude and (b): The phase responses for the ideal fractional-order capacitor with $10\text{nF/s}^{0.1}$ value and the approximation function.



Şekil 6. Fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin ayrık donanımlarla gerçekleştirim şeması.

Figure 6. The realization scheme of the fractional-order FHN neuron model with the discrete devices.



Şekil 7. ' $q=0.9$ ' fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin FOSTER-I R-C ağı kullanılarak yapılan devre sentezine ait SPICE simülasyon sonuçları.

Figure 7. The SPICE simulation results of the circuit synthesis constructed by using FOSTER-I R-C network of the fractional order FHN neuron model with ' $q=0.9$ '.

Şekil 7'den de görüldüğü gibi ' $q=0.9$ ' fraksiyonel dereceli FHN nöron modeli için hesaplanan yaklaşıklık fonksiyonu kullanılarak tasarlanan FOSTER-I R-C ağına tamsayı dereceli FHN nöron modeli için tasarlanan devre yapısına adaptasyonu ile nöron modelinin fraksiyonel dereceli tanımlaması için bir devre yapısı başarılı bir şekilde gerçekleştirilmiştir.

Burada şu durum özellikle belirtilmelidir. Fraksiyonel dereceli nöron modelinin fraksiyonel derecesi değiştiğinde Denklem (8) ile tanımlanan yaklaşıklık fonksiyonunun katsayıları değişecektir. Buna bağlı olarak yaklaşıklık fonksiyonundan FOSTER-I R-C ağı yapısına geçişlerde ilgili ağı yapılarında kullanılan eleman değerleri de değişecektir. Yaklaşıklık fonksiyonu kullanılarak gerçekleştirilen fraksiyonel sistemlerin ayırık donanımlarla gerçekleştirimi için takip edilen süreç, fraksiyonel dereceli sistemlerin donanım çözümleri konusunda oldukça etkin bir çözüm yöntemi olmasıyla birlikte, ayırık donanımlı tasarımın genel elverişsizliği olan eleman değeri ayarlama hususundaki zorlukla burada da karşılaşmaktadır. Ayırık donanım ile gerçekleştirim çalışmalarının bu konulardaki temel yöntem olduğu göz önünde bulundurulursa; bu

çalışmada takip edilen sürecin gelecekte yapılabilecek olan ilgili modellerin yaklaşıklık fonksiyonu kullanılarak farklı donanımlarla gerçekleştirim çalışmaları için öncül konuları içerdiği açıktır.

5 Sonuçlar

Bu çalışmada fraksiyonel dereceli FHN nöron modeli için FOSTER-I R-C ağı yapısından yararlanılarak bir taklit devresi tasarımı yapılmıştır. Tasarlanan devrenin etkinliği SPICE simülasyon sonuçları ile test edilmiştir. Bu kapsamda öncelikle FHN nöron modelinin düzenli ateşleme yaptığı parametre değerleri kullanılarak, nöron modelin denge noktalarının hesabı ve kararlılık analizleri yapılmıştır. Bu hesaplamalardan yola çıkılarak sistemin düzenli ateşleme yapabilmesi için gerekli olan minimum fraksiyonel derece modelin harici akım parametresi ' $I=0.6$ ' iken, ' $q_{\min}=0.3005$ ' olarak belirlenmiştir. Minimum fraksiyonel derecenin belirlenmesinin ardından, ' $q=0.9$ ' değeri kullanılarak fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin diferansiyel denklemlerinin çözümü için Grünwald-Letnikov analiz yöntemi kullanılmıştır. Fraksiyonel dereceli nöron modelinin nümerik analizi başarılı bir şekilde yapılmıştır. Ardından, ' $q=0.9$ ' fraksiyonel derecesi için üçüncü dereceden bir transfer fonksiyonu hesabı, Matsuda yaklaşıklık yöntemi kullanılarak yapılmıştır. Elde edilen bu üçüncü dereceden transfer fonksiyonu FOSTER-I R-C ağı yapısı ile gerçekleştirilmiştir. Direnç ve kapasitör elemanları kullanılarak oluşturulan bu ağı yapısı tamsayı dereceli FHN nöron modeli için tarafımızca tasarlanan devre yapısına adapte edilmiştir. Böylece fraksiyonel dereceli FHN nöron modelinin devre sentezi başarılı bir şekilde gerçekleştirilmiştir. Sonuçların etkinliği SPICE simülasyon sonuçları ile desteklenmiştir. Fraksiyonel dereceli FHN nöron modeline ait devre simülasyon sonuçları, modelin nümerik simülasyon sonuçları ile oldukça uyumludur.

6 Conclusions

In this study, an emulation circuit has been designed for the fractional-order FHN neuron model by using the FOSTER-I R-C network structure. The efficiency of the designed circuit has been tested with the SPICE simulation results. In this context, the calculation of the equilibrium points and the stability analysis of the neuron model have been performed by using the parameter values that the FHN neuron model fires regularly. Based on these calculations, the minimum fractional order that is required for the regular firing of the model has been determined as ' $q_{\min}=0.3005$ ' while the external current parameter of the model is ' $I=0.6$ '. After determining the minimum fractional order, the Grünwald-Letnikov analysis method has been used to solve the differential equations of the fractional-order FHN neuron model by using the value of ' $q=0.9$ '. Numerical analysis of the fractional-order neuron model has been performed successfully. Then, a third order transfer function calculation has been made by using Matsuda approximation method for the ' $q=0.9$ ' fractional-order. This obtained third order transfer function has been implemented with the FOSTER-I R-C network structure. This network structure constructed by using resistor and capacitor elements has been adapted to the circuit structure designed by us for the integer-order FHN neuron model. Thus, the circuit synthesis of the fractional-order FHN neuron model has been implemented successfully. The effectiveness of the results has been supported by the SPICE simulation results. The circuit simulation results of the fractional-order FHN neuron model

have been quietly compatible with the numerical simulation results of this model.

7 Yazar katkı beyanı

Gerçekleştirilen çalışmada Nimet KORKMAZ fikrin oluşması, literatür taraması, nümerik simülasyonların yapılması, elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ve sonuçların incelenmesi başlıklarında; İbrahim Ethem SAÇU fikrin oluşması, literatür taraması, tasarımın yapılması, nümerik simülasyonların yapılması, elde edilen sonuçların değerlendirilmesi ve sonuçların incelenmesi başlıklarında katkı sunmuşlardır.

8 Etik kurul onayı ve çıkar çatışması beyanı

Hazırlanan makalede etik kurul izni alınmasına gerek yoktur. Hazırlanan makalede herhangi bir kişi/kurum ile çıkar çatışması bulunmamaktadır.

9 Kaynaklar

- [1] Hodgkin AL, Huxley A F. "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve". *The Journal of Physiology*, 117(4), 500-544, 1952.
- [2] Özer M. "İyonik kanal aktivasyon ve inaktivasyon kapılarının dinamik davranışı için alternatif denklemler". *Pamukkale Üniversitesi Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 9(3), 349-356, 2003.
- [3] FitzHugh R. *Mathematical Models for Excitation and Propagation in Nerve*. Editor: Schawm HP. Biological Engineering, 1-85, New York, USA, McGraw-Hill, 1969.
- [4] Azar AT, Radwan AG, Vaidyanathan S. *Fractional Order Systems*, 1st ed. San Diego, USA, Elsevier, Academic Press, 2018.
- [5] Podlubny I. "Fractional-order systems and PI λ D α -controllers". *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1), 208-214, 1999.
- [6] Freeborn TJ. "A survey of fractional-order circuit models for biology and biomedicine". *IEEE Journal on Emerging and Selected Topics in Circuits and Systems*, 3(3), 416-424, 2013.
- [7] Sacu IE, Alci M. "Low-power OTA-C based tuneable fractional order filters". *Journal of Microelectronics, Electronic Components and Materials*, 48(3), 135-144, 2018.
- [8] Podlubny I. *Fractional Differential Equations: An Introduction to Fractional Derivatives, Fractional Differential Equations, to Methods of Their Solution and Some of Their Applications*. 1st ed. California, USA, Elsevier, Academic Press, 1998.
- [9] Atangana A, Alkahtani BST. "Extension of the resistance, inductance, capacitance electrical circuit to fractional derivative without singular kernel". *Advances in Mechanical Engineering*, 7(6), 1-6, 2015.
- [10] Hindmarsh JL, Rose RM. "A model of neural bursting using three couple first order differential equations". *Proceedings of the Royal Society of London. Series B. Biological Sciences*, 221(1222), 87-102, 1984.
- [11] Izhikevich EM. "Simple model of spiking neurons". *IEEE Transactions on Neural Networks*, 14(6), 1569-1572, 2003.
- [12] Korkmaz N, Öztürk İ, Kılıç R. "Multiple perspectives on the hardware implementations of biological neuron models and programmable design aspects". *Turkish Journal of Electrical Engineering & Computer Sciences*, 24(3), 1729-1746, 2016.
- [13] Lazaridis E, Drakakis EM. "Full analogue electronic realisation of the Hodgkin-Huxley neuronal dynamics in weak-inversion CMOS". *29th Annual International Conference of the IEEE Engineering in Medicine and Biology Society*, Lyon, France, 22-26 August 2007.
- [14] Linares-Barranco B, Sanchez-Sinencio E, Rodriguez-Vazquez A, Huertas JL. "A CMOS implementation of FitzHugh-Nagumo neuron model". *IEEE Journal of Solid-State Circuits*, 26(7), 956-965, 1991.
- [15] Weinstein RK, Lee RH. "Architectures for high-performance FPGA implementations of neural models". *Journal of Neural Engineering*, 3, 21-34, 2006.
- [16] Malik S A, Mir A H. "FPGA realization of fractional order neuron". *Applied Mathematical Modelling*, 81, 372-385, 2020.
- [17] Tolba MF, Elsafty AH, Armanyos M, Said LA, Madian AH, Radwan AG. "Synchronization and FPGA realization of fractional-order Izhikevich neuron model". *Microelectronics Journal*, 89, 56-69, 2019.
- [18] Khanday FA, Kant NA, Dar MR, Zulkifli TZA, Psychalinos C. "Low-voltage low-power integrable CMOS circuit implementation of integer-and fractional-order FitzHugh-Nagumo neuron model". *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, 30(7), 2108-2122, 2018.
- [19] Matsuda K, Fujii H. "H (infinity) optimized wave-absorbing control-analytical and experimental results". *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 16(6), 1146-1153, 1993.
- [20] Elwy O, Rashad SH, Said LA, Radwan AG. "Comparison between three approximation methods on oscillator circuits". *Microelectronics Journal*, 81, 162-178, 2018.
- [21] Tavazoei MS, Haeri M. "A necessary condition for double scroll attractor existence in fractional-order systems". *Physics Letters A*, 367(1-2), 102-113, 2007.
- [22] Tavazoei MS, Haeri M. "A note on the stability of fractional order systems". *Mathematics and Computers in Simulation*, 79(5), 1566-1576, 2009.