İzmir İktisat Dergisi
İzmir Journal of Economics

ISSN:1308-8173 **E-ISSN:** 1308-8505 **YIL:** 2021 **Cilt:** 36 **Sayı:** 3 **Sayfa:** 675-684
Geliş Tarihi: 16.03.2021 **Kabul Tarihi:** 03.08.2021 **Online Yayın:** 02.09.2021 **Doi:** 10.24988/ije.202136311
ÖZGÜN ARAŞTIRMA

Geçişsiz Kayıtsızlıklar

Nuh Aygün DALKIRAN [1,2]

Özet

Bu makalede gerçek hayatta sık gözlemlenen fakat iktisat kuramı tarafından genelde göz ardı edilen geçişsiz kayıtsızlıklara sahip tercihler ele alınmaktadır. Geçişsiz kayıtsızlıklar detaylı bir şekilde açıklandıktan ve literatür taraması yapıldıktan sonra Nash uygulaması üzerine standart bir sonucun bu tarz tercihlere nasıl genelleşebileceği gösterilmiştir. Geçişsiz kayıtsızlıklar ile ilgili bazı açık problemler sunulmuştur. Bildiğimiz kadarıyla bu çalışma bu konuda yazılan ilk Türkçe makaledir.

Anahtar kelimeler: *Geçişsiz Kayıtsızlık, Yarı-sıralamalar, Risk ve Belirsizlik, Beklenen Fayda Teorisi, Scott-Suppes Gösterimi, Nash Uygulaması.*

Jel Kodu: *C70, D01, D81*

Intransitive Indifferences

Abstract

In this paper, we analyze preferences that exhibit intransitive indifference, which are often observed in real life, but rather overlooked by economic theory. After providing a detailed description and a literature review, we generalize a standard result in Nash implementation to the case of preferences that exhibit intransitive indifference. We present some open problems regarding preferences that exhibit intransitive indifference. To the best of our knowledge, this is the first Turkish article in this field.

Keywords: *Intransitive Indifference, Semi-order, Risk and Uncertainty, Expected Utility Theory, Scott-Suppes Representation, Nash Implementation.*

Jel Codes: *C70, D01, D81*

1. GİRİŞ

İktisat, bireylerin kararlarını inceleyen bir sosyal bilim dalıdır.[3] Dolayısıyla iktisat kuramının önemli alt dallarından birinin karar kuramı olduğu söylenebilir. Bireylerin stratejik olmayan durumlarda yaptığı seçimleri inceleyen karar kuramı ilgilendiği temel sorular açısından (i) kesinlik altında alınan kararlar ve (ii) belirsizlik altında alınan kararlar olarak ikiye ayrılabilir.[4] Kesinlik altında, bireyler rassallık içermeyen alternatifler arasından seçim yapmaktadırlar. Örneğin bir bireyin kahvaltıda ne yiyeceğine, süpermarkette ne satın alacağına, hangi filmi izleyeceğine veya hangi okulu tercih edeceğine karar vermesi kesinlik altında verilen kararlardandır. Öte yandan birçok alternatif, rassallık yani belirsizlik içermektedir. Örneğin bir bireyin hangi hisse senedine yatırım yapacağına, hangi sigorta planını satın alacağına veya bir doktorun hastasına hangi tedaviyi

ATIF ÖNERİSİ (APA): Dalkıran, N. A. (2021). Geçişsiz Kayıtsızlıklar. İzmir İktisat Dergisi. 36(3). 675-684. Doi: 10.24988/ije.202136311

[1] Dr. Öğr. Üyesi, Bilkent Üniversitesi, İktisat Bölümü, 06800, Çankaya / ANKARA,
EMAIL: dalkiran@bilkent.edu.tr **ORCID:** 0000-0002-0586-0355

[2] Yazar 119K957 no'lu TÜBİTAK projesi üzerinden yapılan maddi destek için TÜBİTAK'a müteşekkirdir.

[3] "Economics is the study of people's choices" (Acemoglu, Laibson, ve List, 2015).

[4] Bilindiği gibi bireylerin stratejik yani başka bireyler ile etkileşimde olduğu durumlardaki seçimleri ise oyun kuramı altında incelenmektedir.

uygulayacağına karar vermesi belirsizlik altında alınan kararlardandır.

Karar kuramındaki ana yaklaşıma göre bireylerin, tercihlerini göz önünde bulundurarak karar verdikleri varsayılmaktadır. Birey, X alternatifler kümesinde tanımlı her x, y ve z alternatifleri için iki tür tercih ilişkisinde bulunabilmektedir: x alternatifini, y alternatifine "kesin tercih" ($\succ$) edebilmekte veya x ile y alternatifleri arasında "kayıtsız" ($\sim$) olabilmektedir. "Zayıf tercih" ($\succsim$) ilişkisi ise, kesin tercih ilişkisini ve kayıtsızlık ilişkisini birlikte içermektedir. Bu durumda, birey x alternatifinden, y alternatifi kadar ya da y alternatifinden daha fazla tatmin/fayda sağlamaktadır.

Geçişli tercihlere sahip bir birey için eğer x alternatifi y alternatifine zayıf tercih edilirse ve y alternatifi de z alternatifine zayıf tercih edilirse, x alternatifi z alternatifine zayıf tercih edilmelidir. Geçişli tercihler, matematiksel notasyonla şu şekilde gösterilmektedir: Eğer X alternatif kümesinde tanımlı her x, y, z alternatifleri için $(x \succsim y) \land (y \succsim z)$ ise $x \succsim z$ geçerlidir. Dolayısıyla geçişli tercihler, tanım gereği, tercihlerin "kesin tercih" ($\succ$) ve "kayıtsızlık" ($\sim$) ilişkilerinin de geçişli olmasını gerektirmektedir.

İktisat kuramındaki standart rasyonellik varsayımına göre bireylerin tercihleri geçişlilik özeliğini sağlamalıdır.[5] Hâlbuki gerçek hayatta gözlemlenen birçok seçimde bu özelik sağlanmamaktadır (Tversky, 1969). Gerçek hayatta gözlemlenen kararları daha iyi anlamak ve betimlemek için standart rasyonalitenin varsaydığı temel özellikler, karar kuramının tarihsel gelişimi süresince esnetilmeye çalışılmıştır. Bu çalışmada, belirsizlik altında alınan kararların temelindeki tercihlerin "kayıtsızlık" olarak bilinen kısmının **geçişsiz** olduğu durumlar ele alınmaktadır; zira tercihlerin "kesin tercih" kısmının **geçişsiz** olduğu durumlara iktisat literatüründe nadiren rastlanılmakta ve bu durumlar sistematik olmayan hatalar[6] arasında değerlendirilmektedir.

2. GEÇİŞSİZ KAYITSIZLIKLAR

Geçişsiz kayıtsızlık içeren tercihlere sahip bir birey x ile y alternatifleri ve y ile z alternatifleri arasında kayıtsız olup x alternatifini z alternatifine tercih edebilir. Yani öyle x, y, z alternatifleri bulunmaktadır ki $(x \backsim y) \land (y \backsim z)$ iken $x \succ z$ geçerlidir.

Geçişsiz kayıtsızlık konusuna modern iktisat tarihinin başlangıcından çok önce, M.Ö. 400 yıllarında, Antik Yunan'da Sorites paradoksunda değinilmiştir: 1 tane kum tanesi kum tepesi değildir, 1 kum tanesi kendi başına kum tepesi olmadığı ve kum tanesi çok küçük olduğu için 2 tane kum tanesi de kum tepesi değildir, benzer şekilde devam edilirse hiçbir miktarda kum tanesi kum tepesi oluşturamaz.

Akademik çalışmalarda geçişsiz kayıtsızlığın ilk örnekleri 19. yüzyılda ele alınmıştır. Weber-Fechner yasasına (Weber, 1834; Fechner, 1860) göre herhangi bir fiziksel uyarının şiddetindeki küçük bir artış, o uyarının algısında veya hissinde değişikliğe sebep olmak zorunda değildir.[7] Bunun bir örneğini ünlü matematikçi Jules Henri Poincaré (1905) vermiştir: 12 ve 10 gramlık iki ağırlığı ayırt edebilen bir kişinin bu iki ağırlığı da 11 gramlık bir ağırlıktan ayırt edemeyebileceğini belirtmiştir. Eğer 12 gramlık ağırlığa x, 11 gramlık ağırlığa y ve 10 gramlık ağırlığa z dersek, bu ağırlıkları ayırt etme ilişkisini yukarıdaki gibi $(x \sim y) \land (y \sim z) \land (x \succ z)$ şeklinde ifade edebiliriz.

---

[5] İktisat kuramındaki standart rasyonellik varsayımına göre bireylerin tercihleri geçişlilik dışında bütünsellik özeliğini de sağlamalıdır. Bütünsel tercihlere sahip bir birey için ya x alternatifi en az y alternatifi kadar değerlidir ya da y alternatifi en az x alternatifi kadar değerlidir. Bütünsel tercihler, matematiksel notasyonla, her x ve y alternatifi için $(x \succsim y) \land (y \backsim z)$ önermesinin doğru olması olarak ifade edilir.

[6] Sistematik olmayan hatalar iktisatta rassal seçim altında modellenmektedir ve bu hatalarda (aksi fark edilene kadar) bir düzen olmadığı düşünülmektedir. Sistematik olan hatalar ise iktisadın popüler bir alt dalı olan davranışsal iktisadın doğuşuna sebep olmuştur.

[7] Bu gözlem psikolojinin bir alt dalı olan psikofiziği başlatmıştır.

Neo-klasik fayda teorisi açısından, geçişsiz kayıtsızlık konusunu ilk olarak Luce (1956) modellemiştir. Luce (1956) geçişsiz kayıtsızlık olgusunu verdiği şu örnekle açıklamıştır: Tek şekerli kahveyi beş şekerli kahveye tercih eden bir bireyi ele alalım. Bir küp şekerin ağrılığı, x ve i = 0, 1, … , 400 şeklinde tanımlı iken (1 + i / 100) x gram şeker içeren 401 bardak kahvenin bu bireye sunulduğunu varsayalım. Bu durumda söz konusu birey, i = 0 iken tek küp şekerli kahve ile i = 1 iken 1,01 küp şekerli kahve arasında bir tat ayrımı yapamayacaktır. Genelleştirirsek bu birey her i. ve (i+1). bardak kahveler, yani ardışık bardak kahveler arasında kayıtsız kalmakta; ancak i = 0 iken tek küp şekerli kahve ile i =400 iken 5 küp şekerli kahve arasında kayıtsız kalmamaktadır. Bu sebeple bu bireyin geçişsiz kayıtsızlık içeren tercihlere sahip olduğu söylenebilir. Luce (1956) geçişsiz kayıtsızlık fikrini matematiksel olarak kendi tanımladığı yarı-sıralama (semi-order) ile ifade etmiştir. Yarı-sıralamalar geçişsiz kayıtsızlığa sahip olabilen bir çeşit ikili bağıntıdır. Yarı-sıralama tanımı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.[8]

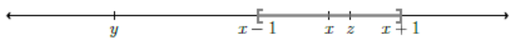
Tanım 1. (Luce, 1956) $\succ$ ve $\sim$ olmak üzere X alternatif kümesinde tanımlı iki adet ikili bağıntı olsun. Bu ikili bağıntı çifti, $(\succ, \sim)$ X alternatif kümesindeki her bir x, y, z, t alternatifleri için aşağıdaki özelikleri sağlarsa $(\succ, \sim)$ bir **yarı-sıralama** oluşturur:

- $\sim$ ikili bağıntısının yansıma özelliği: $x \sim x$,
- Trikotomi özelliği: $x \succ y, y \succ x$ ve $x \sim y$ önermelerinin yalnız biri doğrudur,
- Geçişkenimsilik özelliği (Pseudotransitivity): $(x \succ y) \wedge (y \sim z) \wedge (z \succ t) \Longrightarrow x \succ t$,
- Yarı-geçişkenlik özelliği (Semi-transitivity): $(x \succ y) \wedge (y \succ z) \wedge (z \sim t) \Longrightarrow x \succ t$.

Bu tanıma göre yarı-sıralamaların kayıtsızlık kısmı, $\sim$, geçişsiz olabilir; fakat kesin tercih kısmı, $\succ$, geçişli olmaktadır.[9]

Örnek. Aşağıda bir yarı-sıralama örneği verilmektedir. Reel sayılar kümesinde tanımlı $(\succ, \sim)$ ikili bağıntılar olmak üzere her $x, y \in \mathbb{R}$ için

- $x \succ y$, eğer $x > y + 1$,
- $x \sim y$, eğer $|x - y| \leq 1$ olsun.



Şekil 1: Yarı-sıralama Örneği

Şekil 1'de verilen örnekte yarı-sıralamayla ifade edilen $\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı tercihlere sahip bir birey x ile z arasında ve x ile $(x-1)$ arasında kayıtsızdır. Ancak $z > (x-1)+1$ olduğu için z'yi $(x-1)$'e tercih etmektedir. Yani $z \sim x \sim (x-1)$ ve $z \succ x$ olduğu için kayıtsızlık bağıntısı $\sim$ geçişsizdir.

Karar kuramında tercihler ve fayda fonksiyonları arasındaki ilişki büyük önem arz etmektedir. Yarı-sıralamaların, fayda fonksiyonları ile ilk gösterimi Scott ve Suppes (1958) tarafından yapılmıştır.

Teorem 1. (Scott ve Suppes, 1958) *Sonlu sayıda eleman içeren X alternatif kümesinde tanımlı* $\succ$ *ve* $\sim$ *iki adet ikili bağıntı olsun. Bu durumda* $(\succ, \sim)$ *çifti (geçişsiz kayıtsızlık özelliğine sahip) bir yarı-sıralamadır ancak ve ancak öyle bir* $u: X \to \mathbb{R}$ *ve* $k \in \mathbb{R}_{++}$ *bulunmaktadır ki* $x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y) + k$ *ve* $x \sim y \Leftrightarrow |u(x) - u(y)| \leq k$ *geçerlidir.*

Bu teoremdeki pozitif reel sayı olan k psikofizik (psychophysics) literatüründeki **fayda ayrımı eşiğine** (just noticeable difference) benzemektedir: iki alternatiften alınan fayda farkı k değerinden küçük veya k değerine eşit ise birey bu iki alternatif arasında kayıtsız kalmakta, eğer iki alternatiften alınan fayda

[8] Yarı-sıralamalar ile ilgili daha fazla bilgiye Fishburn (1970a); Pirlot ve Vincke (1997); Aleskerov, Bouyssou, ve Monjardet (2007) çalışmalarından ulaşılabilir.

[9] $(\succ, \sim)$ şeklindeki ikili bağıntı çifti yarı-sıralamaysa ve $x \succ y \succ z$ geçerli ise (x≻y)∧(y~y)∧(y≻z) olduğundan yarı-sıralamaların geçişkenimsilik özeliğinden dolayı $x \succ z$ olmak zorundadır.

farkı k değerinden büyük ise birey birini diğerine tercih etmektedir. Yarı-sıralamaların Teorem 1'de olduğu gibi (u, k) çifti ile olan fayda gösterimine, **Scott-Suppes Fayda Gösterimi** denilmektedir.

Standart rasyonellik altında k değeri sıfıra eşit kabul edilmektedir. Bu durumda yarı-sıralamaların kayıtsızlık kısmı geçişli olmakta ve bu yarı-sıralama karar kuramında yaygın olarak kullanılan bütünsel ve geçişli bir ikili bağıntı çiftine yani rasyonel olarak tabir edilen standart tercihlere dönüşmektedir.

Scott ve Suppes (1958) gösteriminde; alternatif kümesi X'in sonlu olduğu varsayılmıştır. Birçok çalışmada X alternatif kümesinin kardinalitesini (sayılabilir veya sayılamaz) sonsuzluğa genellemek gerekmektedir. Manders (1981) sayılabilir sonsuzluktaki X kümesinde tanımlı olan yarı-sıralamaların Scott-Suppes Fayda Gösterimi ile olan karakterizasyonu için gerekli olan koşulları bulmuştur. Aynı paralellikte, X kümesinin sayılamaz sonsuzlukta olduğu durumdaki Scott-Suppes Fayda Gösterimi için gerekli olan koşulları Candeal ve Induráin (2010) bulmuştur. Bu çalışmaların tamamı belirsizlik olmayan yani kesinlik altındaki kararları içermektedir.

Modern karar kuramında belirsizlik altında alınan kararlar literatürünü von Neumann ve Morgenstern (1944)'ün piyangolar uzayındaki **Beklenen Fayda Teoremi** başlatmıştır. Bu literatürün tartışmasız en önemli sonuçlarından biri olan bu teoremde, bireylerin tercihlerinin lineer fayda fonksiyonlarıyla gösteriminin tercih ilişkilerinin hangi özellikleri altında gösterilebileceği açıklanmıştır.

Beklenen Fayda Teorisi'nin zaman içindeki gelişiminde von Neumann ve Morgenstern (1944)'ün kullandığı özellikler betimsel kaygılarla esnetilmeye çalışılmıştır. Örneğin, Beklenen Fayda Teoremi'ndeki tercihlerin bağımsızlık (independence) özelliği Allais (1953) ve Ellsberg (1961) tarafından eleştirilmiştir. Bu tarz eleştirileri göz önünde bulundurarak gerçek hayatta gözlenen davranışları daha iyi betimleyici nitelikte bir teori üretme amacıyla Kahneman ve Tversky (1979) Beklenti Teorisi'ni (Prospect Theory) bulmuşlardır. Beklenti Teorisi benzer amaçlı sayısız makaleye ilham vererek davranışsal iktisat literatürünü başlatan önemli çalışmalardan biri olmuştur.

Beklenen Fayda Teoremi'ndeki tercihlerin özeliklerinden biri de tercihlerin geçişli olmasıdır. Geçişlilik varsayımının yukarıda bahsettiğimiz şekilde esnetildiği yani tercihlerin kayıtsızlık kısmının geçişsiz olduğu belirsizlik[10] altında alınan kararlar üzerine yapılan çalışmaların en başında Fishburn (1968) gelmektedir. Fishburn (1968) risk yani objektif belirsizlik altında bağımsızlık özelliğini sağlayan yarı-sıralamaların kayıtsızlık kısmının geçişsiz olamayacağını göstermiştir. Fishburn (1968) aynı zamanda yarı-sıralamalar için von Neumann ve Morgenstern (1944)'ün Beklenen Fayda Teoremi'ne karşılık gelen **Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi**'nden açık (yani daha önce çözülememiş) bir problem olarak bahsetmiştir. Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi, Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ndeki fayda fonksiyonunun piyangolar uzayında (lottery space) doğrusal olması durumudur. Fishburn (1968)'ün çözülememiş bir problem olarak belirttiği Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'nin karakterizasyonuna kadar olan literatür şu şekilde özetlenebilir:

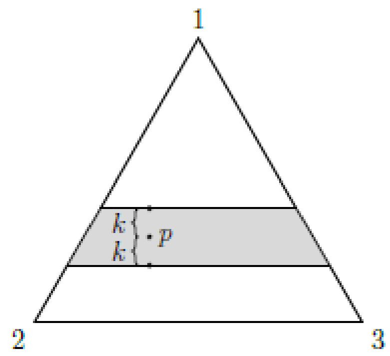
Vincke (1980) yarı-sıralamaların piyangolar uzayında lineer fayda fonksiyonu ve negatif olmayan fayda ayrımı eşiği fonksiyonu ile olan gösterimini karakterize etmiştir. Bu gösterimin Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'nden farkı, fayda ayrımı eşiğinin sabit olmamasıdır.

[10] Burada kastettiğimiz belirsizlik kavramı von Neumann ve Morgenstern (1944)'ün piyangolar uzayındaki belirsizlik kavramıdır. Bu uzay olasılıkları objektif olarak bilinen belirsizlikleri içerir ve literatürde bu kavrama yaygınlıkla **risk** denir (Knight, 1921). Olasılıkları objektif olarak bilinmeyen yani sübjektif inançları içeren belirsizlikleri ise ilk olarak Savage (1954) ele almıştır.

Detaylandıracak olursak Vincke (1980)'nin bulduğu fayda ayrım eşiği negatif olmayan ve tanım kümesi piyangolar uzayı olan bir fonksiyondur. Nakamura (1988) yarı-sıralamalardan daha genel olan (ve dolayısıyla geçişsiz kayıtsızlığa izin veren) aralık sıralamalarının[11] (interval order) piyangolar uzayında lineer fayda fonksiyonu ve hem negatif olmayan fayda ayrımı eşiği fonksiyonu hem de negatif olmayan reel sayı fayda ayrımı eşiği ile olan gösterimlerini karakterize etmiştir. Nakamura (1988)'nın özellikleri fayda ayrımı eşiğinin pozitif olmasını garanti etmediği için Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ni vermemektedir. Ayrıca Nakamura (1988) karakterizasyon teoremlerinde kullandığı özelliklerin birbirinden bağımsız olduğunu gösterememiştir.

Vincke (1980)'nin ve Nakamura (1988)'nın çalışmalarının Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi için olan eksiklerini Dalkıran, Dokumacı ve Kara (2018) kapatmıştır. Dalkıran vd. (2018) piyangolar uzayındaki yarı-sıralamaların Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip olması için gereken özeliklerin bir karakterizasyonunu bulup bu karakterizasyonda kullandıkları özeliklerin birbirinden bağımsız olduğunu göstermişlerdir. Dolayısıyla, Dalkıran vd. (2018)'nin karakterize ettiği Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi Fishburn (1968)'ün ortaya koyduğu açık problemi çözmüştür.

Geometrik olarak von Neumann ve Morgenstern (1944)'ün Beklenen Fayda Teoremi piyangolar simpleksinde paralel kayıtsızlık hiperdüzlemleri vermektedir. Buna karşılık Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi ise bu kayıtsızlık hiperdüzlemlerini kalınlaştırmaktadır.[12]



Şekil 2: Geçişsiz Kayıtsızlıklar ve Kalın Kayıtsızlık Bölgeleri: Piyangolar simpleksinde Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip yarı-sıralamalar.

Dalkıran vd. (2018) aynı zamanda Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'nin oyun teorisine olan bir uygulamasını şöyle göstermiştir: Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip yarı-sıralamalı tercihleri olan oyuncular için eğer Nash dengesi tanımı kullanılarak bir denge belirlenirse, burada açığa çıkan denge Radner (1980)'ın epsilon Nash dengesi kavramına denk olmaktadır. Yani Herbert Simon (1955)'ın belirttiği gibi bireyler dengede tam anlamıyla optimal değil optimale yeterince yakın davranırlar. Bu sebeple Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi ve temelini oluşturduğu epsilon Nash dengesi, *sınırlı rasyonellik* kavramına örnek teşkil etmektedir.

3. GEÇİŞSİZ KAYITSIZLIKLAR İLE İKTİSADİ TASARIM

İktisadi tasarımın temelini oluşturan Nash uygulaması problemini geçişsiz kayıtsızlıklara sahip bireylerle incelemek için bir toplumsal seçim problemini ele alalım: $N = \{1, \dots, n\}$ toplamda n kişiden oluşan bir toplumu simgelesin. A kümesi bu toplumsal seçim problemindeki tüm alternatifleri ve $\Delta(A)$ kümesi bu alternatifler üzerindeki tüm muhtemel olasılıksal dağılımları belirtsin. $\Delta(A)$'nın genel bir elemanının $p \in \Delta(A)$ ile gösterip p'yi bir piyango (lottery) olarak

[11] Aralık sıralamaları ile ilgili daha fazla bilgi için bkz. Fishburn (1970b).

[12] Bu kalınlaştırma kayıtsızlık hiperdüzlemlerine bir boyut daha eklediği için matematiksel olarak onları hiperdüzlem olmaktan çıkarmaktadır.

adlandıralım. Toplumdaki her $i \in N$ bireyinin $\Delta(A)$ kümesi üzerindeki geçişsiz kayıtsızlıklara sahip keskin tercihlerini $\succ_i$, kayıtsızlıklarını ise $\sim_i$ ile gösterelim. Eğer her birey için $(\succ_i, \sim_i)$ Dalkıran vd. (2018)'de ortaya konulan aksiyomları sağlayan bir yarı-sıralama ise $(\succ_i, \sim_i)$'nin bir beklenen Scott- Suppes fayda gösterimi bulunmaktadır:[13] Yani her $i \in N$ bireyi için öyle bir $u_i: X \to \mathbb{R}$ ve pozitif $k_i \in \mathbb{R}$ vardır ki

$$x \succ_i y \Leftrightarrow \mathbb{E}[u_i(x)] > \mathbb{E}[u_i(y)] + k_i,$$
$$x \sim_i y \Leftrightarrow |\mathbb{E}[u_i(x)] - \mathbb{E}[u_i(y)]| \leq k_i.$$

Eğer bir sosyal planlayıcı bireylerin gerçek tercihlerini tam olarak bilseydi bu tercihlere göre en iyi sosyal alternatifi seçebilirdi. Fakat bireylere direk olarak tercihlerini sorması durumunda bireylerin sonucu manipüle etmek için tercihlerini yanlış bir şekilde bildirmesi söz konusu olabilirdi.

Böyle bir durumda sosyal planlayıcı istenilen sonuca ulaşmak için tüm muhtemel dünya durumlarını düşünerek bir mekanizma tasarımı yapabilir: Toplumdaki tüm muhtemel tercihleri evrensel bir muhtemel dünya durumları kümesi, Θ, ile gösterelim. Bu durumda $i \in N$ bireyinin $\theta \in \Theta$ durumundaki tercihlerini $\left(\succ_i^\theta, \sim_i^\theta\right)$, yarı-sıralaması ile gösterelim. Bu gösterimin beklenen Scott-Suppes fayda gösterimi ise $\left(u_i^\theta, k_i^\theta\right)$ olsun. Diğer taraftan sosyal planlayıcının farklı durumlarda optimal olduğunu düşündüğü alternatifler bir sosyal seçim kuralı, $f: \Theta \to \Delta(A)$, olarak verilsin. Sosyal planlayıcının (kayıtsız kaldığı durumlarda) rassal bir seçim yapmasına izin vermekteyiz.

Bir mekanizma öncelikle her $i \in N$ bireyi için bir mesaj kümesi, M_i, tanımlar. Daha sonra tüm bireylerin gönderdiği mesajları göz önüne alarak toplumsal sonuca nasıl ulaşılacağını bir sonuç fonksiyonu $g: \times_{i \in N} M_i \to A$ ile belirler. Tüm muhtemel mesaj profilleri kümesine $M = \times_{i \in N} M_i$ ile gösterelim. Aşağıda bir mekanizmayı (M, g) ikilisi olarak belirteceğiz.

Bir mekanizmanın Nash dengesini aşağıdaki şekilde tanımlamayabiliriz:

Tanım 2. Eğer hiçbir $i \in N$ bireyi için $g(\widetilde{m}_i, m_{-i}^*) \succ_i^\theta g(m^*)$ olan bir $\widetilde{m}_i \in M_i$ mesajı yok ise

$m^* = (m_1^*, \dots, m_n^*)$ mesaj profili θ durumunda (M, g) mekanizmasının bir Nash dengesidir.

Yani eğer verili bir mekanizma altında θ dünya durumunda bir m^* mesaj profilinde hiçbir birey için mesajını değiştirerek (mekanizma aracılığı ile) kesin bir şekilde daha iyi bir sonuca ulaşmak mümkün değilse m^* mesaj profiline bu mekanizmanın θ dünya durumundaki bir Nash dengesidir denir. Her $i \in N$ bireyi için $\left(\succ_i^\theta, \sim_i^\theta\right)$ yarı sılamasının beklenen Scott-Suppes fayda gösterimi $\left(u_i^\theta, k_i^\theta\right)$ altında bu tanım aşağıdakine denktir:

Tanım 3. Eğer hiçbir $i \in N$ bireyi için $\mathbb{E}\left[u_i^\theta(g(\widetilde{m}_i, m_{-i}^*))\right] > \mathbb{E}\left[u_i^\theta(g(m^*))\right] + k_i^\theta$ olan bir $\widetilde{m}_i \in M_i$ mesajı yok ise $m^* = (m_1^*, \dots, m_n^*)$ mesaj profili θ durumunda (M, g) mekanizmasının bir Nash dengesidir.

Bir sonraki tanımımız bir mekanizmanın verilen bir sosyal seçim kuralını Nash dengesiyle uygulamasını (Nash Implementation) açıklamaktadır. Verilen bir (M, g) mekanizmasının θ durumundaki tüm Nash dengelerinin ürettiği alternatifler kümesine $NE^{(M,g)}(\theta)$ ile gösterelim. Yani,

$$NE^{(M,g)}(\theta) := \left\{ \begin{matrix} g(m^*) \in A \mid m^* \text{ profili } (M,g)'\text{nin} \\ \theta \text{ durumunda bir Nash dengesidir} \end{matrix} \right\}.$$

Tanım 4. Verilen bir $f: \Theta \to \Delta(A)$ sosyal seçim kuralı ve (M, g) mekanizması için her bir $\theta \in \Theta$ altında $f(\theta) = NE^{(M,g)}(\theta)$ ise (M, g) mekanizması $f: \Theta \to \Delta(A)$ sosyal seçim kuralını Nash dengesi ile uygulamaktadır.

[13] Daha önce de belirttiğimiz gibi beklenen Scott-Suppes fayda gösterimi von Neumann ve Morgenstern (1944) beklenen fayda gösteriminin yarı-sıralamalar için genellenmiş halidir. Detaylı bilgi için bakınız Dalkıran vd. (2018).

Sıradaki sonucumuz geçişsiz kayıtsızlıklar ile Nash uygulaması için bir gerek koşul vermektedir:

Teorem 2. Eğer (M, g) mekanizması $f: \Theta \rightarrow \Delta(A)$ sosyal seçim kuralını Nash dengesi ile uyguluyorsa ve $f(\theta) \neq f(\tilde{\theta})$ ise öyle bir $j \in N$ bireyi ve $p \in \Delta(A)$ piyangosu vardır ki

$$\mathbb{E}\left[u_j^{\theta}(f(\theta))\right] \geq \mathbb{E}\left[u_j^{\theta}(p)\right] - k_j^{\theta},$$
$$\mathbb{E}\left[u_j^{\tilde{\theta}}(p)\right] > \mathbb{E}\left[u_j^{\theta}(f(\theta))\right] + k_j^{\theta}.$$

İspat. Eğer (M, g) mekanizması $f : \Theta \rightarrow A$ sosyal seçim kuralını Nash dengesi ile uyguluyorsa, her θ durumu için $f(\theta)$'yı denge yapan (en az) bir Nash dengesi olması gerekir. Bu dengelerden bir tanesi m^{θ} olsun. O zaman $f(\theta) = g(m^{\theta})$ ve hiçbir $i \in N$ bireyinin hiçbir $\widetilde{m}_i \in M_i$ mesajı için $g(\widetilde{m}_i, m_{-i}^{\theta}) \succ_i^{\theta} g(m^{\theta})$ olmayacaktır. Dolayısıyla, her $i \in N$ ve her $\widetilde{m}_i \in M_i$ için $\mathbb{E}\left[u_i^{\theta}(f(\theta))\right] \geq \mathbb{E}\left[u_i^{\theta}(g(\widetilde{m}_i, m_{-i}^{*}))\right] - k_i^{\theta}$ olmalıdır.

Eğer $f(\tilde{\theta}) \neq f(\theta)$ ise m^{θ} mesaj profili (M, g)'nin $\tilde{\theta}$ durumunda Nash dengesi olamaz.

(Eğer olsaydı $g(m^{\theta}) = f(\theta)$ olduğu için ve $f(\tilde{\theta}) = NE^{(M,g)}(\tilde{\theta})$ olduğundan $f(\tilde{\theta}) \neq f(\theta)$ olmasına bir çelişki elde etmiş olurduk.) Demek ki öyle bir $j \in N$ bireyi ve $\widetilde{m}_j \in M_j$ mesajı vardır ki $g(\widetilde{m}_j, m_{-j}^{\theta}) \succ_i^{\tilde{\theta}} g(m^{\theta})$ doğrudur.

$l \coloneqq g(\widetilde{m}_j, m_{-j}^{\theta})$ olsun. Bu durumda $l \succ_i^{\tilde{\theta}} f(\theta)$ ve dolayısıyla $\mathbb{E}\left[u_j^{\tilde{\theta}}(l)\right] > \mathbb{E}\left[u_i^{\tilde{\theta}}(f(\theta))\right] + k_j^{\tilde{\theta}}$.

Öyleyse, $f(\theta) \neq f(\tilde{\theta})$ durumunda göstermek istediğimiz gibi öyle bir $j \in N$ ve $p \in \Delta(A)$ vardır ki

$\mathbb{E}\left[u_j^{\theta}(f(\theta))\right] \geq \mathbb{E}\left[u_j^{\theta}(l)\right] - k_i^{\theta}$ ve $\mathbb{E}\left[u_j^{\tilde{\theta}}(l)\right] > \mathbb{E}\left[u_i^{\tilde{\theta}}(f(\theta))\right] + k_j^{\tilde{\theta}}$ doğru olmaktadır. ■

Bulduğumuz gerek koşulun standart rasyonalite altında Nash uygulaması için gerek koşul olan Maskin tekdüzemsiliğiyle (Maskin Monotonicity) alakasını kısaca tartışalım. Bunun için öncelikle rasyonel tercihler altında Maskin tekdüzemsiliğinin tanımını hatırlatıyoruz. Rasyonel tercihler daha önce de belirttiğimiz gibi bütünsellik ve geçişlilik özelliğini sağlayan ikili bağıntılar ile gösterilebilirler. Aşağıdaki tanımlar için her bireyin $\theta \in \Theta$ dünya durumunda $\Delta(A)$ üzerindeki tercihlerinin rasyonel olduğunu varsayalım ve bu tercihleri $\succsim_i^{\theta}$ ile gösterelim. İlk tanımımız Maskin (1999)'un tekdüzemsilik tanımının sosyal seçim fonksiyonlarına indirgenmiş halidir:

Tanım 5. Eğer $f: \Theta \rightarrow \Delta(A)$ sosyal seçim kuralı için verili $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ durumlarında her $i \in N$ bireyi için $\left[\forall q \in \Delta(A), f(\theta) \succsim_i^{\theta} q \Longrightarrow f(\theta) \succsim_i^{\tilde{\theta}} q\right]$ doğru olduğunda $f(\theta) = f(\tilde{\theta})$ oluyorsa $f: \Theta \rightarrow \Delta(A)$ sosyal seçim kuralı Maskin tekdüzemsidir.

Bir seçim kuralı Maskin tekdüzemsi ise herhangi bir θ dünya durumunda sosyal planlayıcının gözünde optimal olan $f(\theta)$ alternatifi başka bir θ' dünya durumunda hiçbir birey için θ dünya durumuna göre daha kötü bir duruma gelmiyor ise o zaman $f(\theta)$ alternatifi hala sosyal planlayıcının gözünde optimal olmaya devam etmelidir, yani $f(\theta) = f(\theta')$ olmalıdır. Dolayısıyla, eğer iki dünya durumunda, θ ve θ' olsun, sosyal planlayıcının gözündeki optimal alternatifler farklılar ise, yani $f(\theta) \neq f(\theta')$ ise, öyle bir birey, $j \in N$ olsun ve öyle bir piyango alternatifi, $p \in \Delta(A)$, olmalı ki bu alternatif için θ dünya durumunda $f(\theta)$ alternatifi p'den daha kötü değilken θ' durumunda $f(\theta)$ alternatifi p'den daha kötü durumda olmalıdır. Bu demektir ki yukarıdaki Maskin tekdüzemsilik tanımı aşağıdaki şekilde tekrar yazılabilir.

Tanım 6. $f: \Theta \rightarrow \Delta(A)$ sosyal seçim kuralı Maskin tekdüzemsidir ancak ve ancak verili $\theta, \tilde{\theta} \in \Theta$ durumlarında $f(\theta) \neq f(\tilde{\theta})$ ise öyle bir $j \in N$ bireyi ve $p \in \Delta(A)$ piyangosu vardır ki $f(\theta) \succsim_j^{\theta} p$ ve $p \succ_j^{\tilde{\theta}} f(\theta)$ olmalıdır.

Yukarıdaki tanıma bakıldığında Teorem 2'de bulduğumuz Nash uygulaması için gerek koşula oldukça benzer bir yapıda olduğunu görmekteyiz. Eğer ki $f(\theta) \succsim_j^{\theta} p$ koşulunu $p \nsucc_j^{\theta} f(\theta)$ olarak okuyacak olursak Maskin tekdüzemsiliğinin benzer bir şekilde geçişsiz kayıtsızlık içeren tercihler için de tanımlanabileceğini ve bir gerek koşul olarak düşünülebileceğini görmekteyiz.

Sonuç olarak geçişsiz kayıtsızlıklar standart iktisat kuramı tarafından genelde (analitik olarak kolay takip edilebilir olmamaları sebebiyle) göz ardı edilmelerine rağmen iktisat kuramının standart sonuçlarını bu tarz tercihlere genellemenin mümkün olduğunu görmekteyiz. Nash uygulaması gibi Eric Maskin'in 2007 İktisat Nobel ödülünü almasına önayak olmuş olan önemli bir çalışmanın sonuçlarının bu tercihlere nasıl genellenebileceğini göstermiş olduk. Bulduğumuz gerek koşul aslında Maskin (1999)'un rasyonel tercihler için bulduğu gerek koşuluna oldukça benzemektedir. Bu bağlamda Maskin (1999)'un Nash uygulaması (Nash Implementation) sonuçlarının benzerlerinin geçişsiz kayıtsızlıklar içeren tercihlerle de elde edilebileceğini anlamaktayız.[14]

4. AÇIK PROBLEMLER

Bu bölümde geçişsiz kayıtsızlıklar ile ilgili henüz çalışılmamış açık problemlerden birkaçını sunmaktayız. Bunlardan ilki Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip bireyler için riskten kaçınma (risk aversion) kavramının nasıl tanımlanabileceği konusudur. Riskten kaçınma kavramlarının önemli olduğu birçok uygulamada Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip bireylerin davranışlarının analizi yapılmamıştır. Örneğin sözleşme teorisi literatüründeki Beklenen Fayda Gösterimi'ne sahip bireylerle ilgili ulaşılmış optimal sözleşmeler, Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip bireyler için de optimal midir veya optimale yeterince yakın mıdır gibi sorular henüz cevaplandırılmamıştır.

Belirsizlik altında sınırlı rasyonelliğin temelindeki sebeplerden bir tanesi de bireylerin birbirine çok yakın olasılıkları *ayırt edemiyormuş gibi* davranmasıdır (Tversky, 1969; Kahneman ve Tversky, 1979). Allais Paradoksu'nu bulduğu ünlü makalesinde Allais (1953), belirsizlik altında alınan kararlar için daha betimleyici bir modele Weber-Fechner yasası üzerinden ulaşılabilineceğini belirtmiştir. Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi de tam olarak bunu yapmasına rağmen Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'ne sahip bireylerin Allais paradoksunda gözlenen davranışı göstermeleri mümkün değildir. Bu, Allais paradoksunun Allais'in sandığından bile daha dirençli olduğunu göstermektedir. Bu sebeple konuyla ilgili açık sorulardan biri hem Allais Paradoksu'ndaki davranışın gözlemlenebileceği hem de geçişsiz kayıtsızlıklar içeren belirsizlik altında karar modelleri bulmaktır. Bunun için kayıtsızlık bölgelerinin Şekil 2'dekine göre daha yerel olabileceği bir model düşünülebilir. Örneğin her p piyangosu etrafında daire şeklindeki kayıtsızlık bölgeleri Allais Paradoksu'ndaki davranışın gözlemlenmesine izin verebilir, bu durumda çözülmesi gerekilecek problem ise o tarz tercihlerin fayda fonksiyonu ve fayda ayrımı eşiği ile karakterizasyonunun yapılmasıdır.

Neredeyse tüm geçişsiz kayıtsızlıklar literatürü kesinlik durumlarında veya belirsizlik altında alınan *deterministik* kararları çalışmaktadır. Ancak yakın zamanda popülerleşen rassal seçim konusunda geçişsiz kayıtsızlıkların nasıl davranışlar ifade edebileceği henüz çalışılmamıştır. Tekrar tekrar aynı seçeneklerle karşılaşan bireylerin farklı seçimler yapması, güncel karar kuramı literatüründeki en önemli gözlemlerden biridir. Bu yüzden rassal seçim teorileri bireylerin davranışlarını deterministik teorilerden daha iyi açıklayabilmektedir. Buna ek olarak rassal seçim teorilerine geçişsiz kayıtsızlık fikrinin de eklenmesi, rassal seçim modellerinin betimleyici yanını daha da güçlendirebilir.

Son olarak konuyla ilgili çalışılmamış bir başka problem ise iktisadın oldukça yeni bir alt dalı

[14] Epsilon rasyonellik ve deterministik seçimler altında Nash uygulaması için bazı yeter koşullar Barlo ve Dalkiran (2009)'da bulunabilir.

olan nöroiktisatla ilgilidir.[15] Standart iktisatta insan beyninin nörobiyolojisi çalışılmamaktadır. Nöroiktisat ise bireylerin kararları beyinde meydana geldiği için insan beyninin nörobiyolojisini çalışmanın insan davranışını anlamaya faydalı olacağını savunmaktadır. Bu bağlamda nöroiktisat modelleri iktisat modellerindeki sanki, *-mış gibi (as if)* olarak bilinen kavramın ötesine ulaşmaya çalışarak davranışların beyindeki gerçek temsilini bulmayı hedeflemektedir. Geçişsiz kayıtsızlık konusu da giriş bölümünde bahsettiğimiz gibi psikofizyoloji temellidir. Bu sebeple konuyla ilgili insan beyninin nörobiyolojisini de içerecek genel kapsamlı nöroiktisat modelleri ile insan davranışlarını açıklamak da henüz çalışılmamış bir problemdir.

5. SONUÇ

Bu makalede geçişsiz kayıtsızlıklar içeren tercihlere sahip bireylerin nasıl kararlar aldığı incelenmiştir. Literatürün başlangıcında Luce (1956)'nın geçişsiz kayıtsızlığa izin veren yarı-sıralama konseptini tanımladığı makalesi bulunmaktadır. Literatürün büyük bir çoğunluğu Fishburn (1968)'ün çözülmemiş bir problem olarak bahsettiği Beklenen Scott-Suppes Fayda Gösterimi'nin veya benzer gösterimlerin karakterizasyonlarına odaklanmıştır. Bu gösterimler, von Neumann ve Morgenstern (1944)'ün Beklenen Fayda Gösterimi'ndeki beklenen faydanın hesaplanmasına el veren lineer fayda fonksiyonuna ek olarak fayda ayrımı eşiği fikrini de benimsemiştir. Bu bağlamda piyangolar uzayında beklenen faydası birbirinden farklı ama birbirine çok yakın iki piyango arasında bireylerin kayıtsız kalabileceği modellenmiştir. Bundan dolayı da bireylerin tercihlerinin kayıtsızlık kısmı geçişsiz olabilmektedir.

Standart bir Nash uygulaması sonucunun geçissiz kayıtsızlıklara nasıl genelleşebileceğini gösterdikten sonra geçişsiz kayıtsızlıklarla ilgili çözülmemiş bazı açık problemlerden bahsettik. Bahsettiğimiz bu problemlerin ikisi belirsizlik altında alınan deterministik kararlarla ilgilidir. Diğer bir çözülmemiş problem ise bu iki problemden daha genel kapsamlıdır ve karar kuramının günümüzdeki popüler alanlarından biri olan rassal seçime bireylerin Weber-Fechner yasasındaki küçük değişikliklere kayıtsız kalma fikrinin nasıl uygulanabileceği konusudur. Bahsettiğimiz sonuncu problem ise geçişsiz kayıtsızlık konusunun nörobiyolojik temellerinin iktisadın son yıllarda yaygınlaşan bir alt dalı olan nöroiktisat konusunda araştırılmasıdır.

KAYNAKÇA

Acemoglu, D., Laibson, D., ve List, J. (2015). *Economics*. Pearson.

Aleskerov, F., Bouyssou, D., ve Monjardet, B. (2007). *Utility maximization, choice and preference*. Springer Science & Business Media.

Allais, M. (1953). Le comportement de l'homme rationnel devant le risque: Critique des postulats et axiomes de l'ecole Americaine. *Econometrica*, 21, 503–546.

Barlo, M., ve Dalkiran, N. A. (2009). Epsilon-Nash implementation. *Economics Letters*, 102(1), 36–38.

Candeal, J. C., ve Induráin, E. (2010). Semiorders and thresholds of utility discrimination: Solving the Scott–Suppes representability problem. *Journal of Mathematical Psychology*, 54(6), 485–490.

Dalkıran, N. A., Dokumacı, O. E., ve Kara, T. (2018). Expected Scott–Suppes utility

[15] Nöroiktisat ile ilgili daha fazla bilgiye Glimcher ve Fehr (2013) kaynağından ulaşılabilir.

representation. *Journal of Mathematical Psychology*, 86, 30–40.

Ellsberg, D. (1961). Risk, ambiguity, and the Savage axioms. *The Quarterly Journal of Economics*, 643–669.

Fechner, G. (1860). Elemente der psychophysik. Breitkopf and Hartel. Vol. 1 Translated by H. E. Adler (1966). *Elements of Psychophysics*.

Fishburn, P. C. (1968). Semiorders and risky choices. *Journal of Mathematical Psychology*, 5(2), 358–361.

Fishburn, P. C. (1970a). Intransitive indifference in preference theory: a survey. *Operations Research*, 18(2), 207–228.

Fishburn, P. C. (1970b). Intransitive indifference with unequal indifference intervals. *Journal of Mathematical Psychology*, 7(1), 144–149.

Glimcher, P. W., ve Fehr, E. (2013). *Neuroeconomics: Decision making and the brain*. Academic Press.

Kahneman, D., ve Tversky, A. (1979). Prospect theory: An analysis of decision under risk. *Econometrica*, 47(2), 263–292.

Knight, F. H. (1921). *Risk, uncertainty and profit*. Houghton Mifflin.

Luce, R. D. (1956). Semiorders and a theory of utility discrimination. *Econometrica*, 178–191.

Manders, K. L. (1981). On jnd representations of semiorders. *Journal of Mathematical Psychology*, 24(3), 224–248.

Maskin, E. (1999). Nash equilibrium and welfare optimality. *The Review of Economic Studies*, 66(1), 23–38.

Nakamura, Y. (1988). Expected utility with an interval ordered structure. *Journal of Mathematical Psychology*, 32(3), 298–312.

Pirlot, M., ve Vincke, P. (1997). *Semiorders: properties, representations, applications*. Springer Science & Business Media.

Poincaré , H. (1905). *La valeur de la science*. Paris: Flammarion.

Radner, R. (1980). Collusive behavior in noncooperative epsilon-equilibria of oligopolies with long but finite lives. *Journal of Economic Theory*, 22(2), 136–154.

Savage, J. L. (1954). *The foundations of statistics*. New York: John Wiley.

Scott, D., ve Suppes, P. (1958). Foundational aspects of theories of measurement. *The Journal of Symbolic Logic*, 23(2), 113–128.

Simon, H. A. (1955). A behavioral model of rational choice. *The Quarterly Journal of Economics*, 69(1), 99–118.

Tversky, A. (1969). Intransitivity of preferences. *Psychological Review,* 76 (1), 31–48.

Vincke, P. (1980). Linear utility functions on semiordered mixture spaces. *Econometrica*, 771–775.

Von Neumann, J., ve Morgenstern, O. (1944). *Theory of games and economic behavior.* New Jersey: Princeton University Press.

Weber, E. (1834). *De Tactu*. Leipzig, Koehler.