

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

SOI: [1.1/TAS](#) DOI: [10.15863/TAS](#)
 International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science
 p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online)
 Year: 2021 Issue: 03 Volume: 95
 Published: 22.03.2021 <http://T-Science.org>

QR – Issue

QR – Article



N.A. Abiev
 Taraz Regional University
 Candidate of physical and mathematical sciences
 Head of the Department of Mathematics

Z. Turar
 Taraz Regional University
 Master's degree student in 2 courses

IMPLEMENTATION IN MAPLE THE SEULAR TERMS ELIMINATION METHOD FOR NONLINEAR OSCILLATIONS

Abstract: In the paper we consider questions concerning computer interpretation of known results in the asymptotic theory of nonlinear differential equations admitting periodic solutions. The main subject of our consideration is Duffing equation describing regularly perturbed nonlinear oscillations. In the paper we suggest a computer program, which perform asymptotic expansions of Duffing equation's solution by degrees of small parameter. For secular terms of such expansions a computer implementation of well known elimination approach is shown. Series of numerical computations are conducted and results are depicted in graphs.

Key words: nonlinear oscillations, perturbation method, small parameter, secular term, Lindstedt-Poincare method.

Language: Russian

Citation: Abiev, N. A., & Turar, Z. (2021). Implementation in maple the secular terms elimination method for nonlinear oscillations. *ISJ Theoretical & Applied Science*, 03 (95), 212-222.

Soi: <http://s-o-i.org/1.1/TAS-03-95-37> **Doi:** <https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2021.03.95.37>

Scopus ASCC: 2600.

РЕАЛИЗАЦИЯ В СРЕДЕ MAPLE МЕТОДА УСТРАНЕНИЯ СЕКУЛЯРНЫХ ЧЛЕНОВ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Аннотация: В данной статье мы затрагиваем вопросы компьютерной интерпретации известных результатов асимптотической теории нелинейных дифференциальных уравнений, допускающих периодические решения. Основным объектом рассмотрения является уравнение Дюффинга, описывающее регулярно возмущенные нелинейные колебания. В работе предлагается компьютерная программа, осуществляющая асимптотическое разложение решения уравнения Дюффинга по степеням малого параметра. Показана компьютерная реализация известного способа избавления от секулярных членов таких разложений. Проведена серия численных расчетов и результаты отражены в графиках.

Ключевые слова: нелинейные колебания, метод возмущений, малый параметр, секулярный член, метод Линдштедта-Пуанкаре.

Введение

УДК 517.928.1, 517.928.7

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) + \varepsilon x^3(t) = 0, \quad (1)$$

Рассмотрим начальную задачу для уравнения Дюффинга (см. [4,5])

$$x(0) = a, \quad \frac{dx(0)}{dt} = 0. \quad (2)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

где ε -малый положительный параметр. Поставленная задача относится к классу регулярно-возмущенных задач. Методы изучения уравнения Дуффинга более сложного вида (уравнение неоднородно и в него входит и первая производная неизвестной функции) можно найти в работе [6].

Очевидно, что при $\varepsilon = 0$ мы имеем уравнение гармонических колебаний $\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + x(t) = 0$, имеющее решение известное решение $x_0(t) = a \cos(t)$.

Исследование вопроса о близости решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1) к $x_0(t) = a \cos(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ составляет суть асимптотической теории дифференциальных уравнений и проведено в многочисленных работах. Обзор по этому направлению можно найти, например, в известном источнике [10]. Здесь мы не будем останавливаться на теоретических положениях, а сразу приступим к реализации на Maple асимптотического разложения решения (1) по степеням малого параметра и компьютерной интерпретации известных теоретических положений. В частности, покажем способ устранения отрицательного влияния секулярных

членов асимптотического разложения на точность приближений.

Один из известных способов заключается в формальном представлении решения (1) в виде ряда

$$x(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t) + \dots \quad (3)$$

Такой метод известен под названием SEM-метода (straightforward expansion method).

Согласно SEM-методу далее подставляют (3) в (1). После приведения подобных приравнивают члены при одинаковых степенях малого параметра и получают рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений относительно членов разложения. Для осуществления этих выкладок удобно и эффективно использовать системы аналитических вычислений типа Maple [3]. Отметим, что в [1,2] подобный подход был осуществлен применительно к сингулярно-возмущенным дифференциальным уравнениям. Здесь мы будем использовать некоторые из этих наших работ.

Основные результаты. Итак покажем команды Maple, выполняющие соответствующие выкладки для решения поставленной здесь задачи. Ограничимся в (3) первыми тремя слагаемыми, то есть положим $N = 2$:

> N := 2;

N := 2

> dequ := $\frac{d^2}{dt^2} X(t) + X(t) + \varepsilon \cdot X(t)^3$; init := X(0) = a, D(X)(0) = 0

> s := add($\varepsilon^i \cdot v_i(t)$, i = 0..N)

$$s := v_0(t) + \varepsilon v_1(t) + \varepsilon^2 v_2(t)$$

> ex1 := expand(subs(X(t) = s, dequ)) : ex := collect(ex1, ε) :

> for i from 0 to N do deq_i := coeff(ex, ε , i) = 0 end do

$$deq_0 := \frac{d^2}{dt^2} v_0(t) + v_0(t) = 0$$

$$deq_1 := v_0(t)^3 + \frac{d^2}{dt^2} v_1(t) + v_1(t) = 0$$

$$deq_2 := 3 v_0(t)^2 v_1(t) + \frac{d^2}{dt^2} v_2(t) + v_2(t) = 0$$

В программе мы ограничились частной суммой

$$s_N(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^N x_N(t)$$

формального ряда (3) при $N = 2$ и получили рекуррентную систему

$$\frac{d^2 x_0(t)}{dt^2} + x_0(t) = 0, \quad (4)$$

$$\frac{d^2 x_1(t)}{dt^2} + x_1(t) = -x_0^3(t), \quad (5)$$

| | | | |
|-----------------------|--|--------------------------------------|------------------------------------|
| Impact Factor: | ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| | ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | РИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| | GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| | JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

$$\frac{d^2 x_2(t)}{dt^2} + x_2(t) = -3x_0^2(t)x_1(t). \quad (6)$$

значения N , программа может выводить уравнения для последующих членов асимптотического разложения. Например, при $N = 4$, получили бы еще два уравнения

Естественно, при задании большего

$$deq_3 := 3 v_0(t)^2 v_2(t) + 3 v_0(t) v_1(t)^2 + v_3(t) + \frac{d^2}{dt^2} v_3(t) = 0$$

$$deq_4 := 3 v_0(t)^2 v_3(t) + 6 v_0(t) v_1(t) v_2(t) + v_1(t)^3 + v_4(t) + \frac{d^2}{dt^2} v_4(t) = 0$$

Очевидно, что подставляя (3) в начальные условия (2), получаем следующее

$$x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + \varepsilon^2 x_2(0) + \dots = a + \varepsilon \cdot 0 + \varepsilon^2 \cdot 0 + \dots,$$

$$x_0'(0) + \varepsilon x_1'(0) + \varepsilon^2 x_2'(0) + \dots = 0 + \varepsilon \cdot 0 + \varepsilon^2 \cdot 0 + \dots$$

Отсюда

$$x_0(0) = a, \quad x_0'(0) = 0, \\ x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 0, \\ \dots\dots\dots$$

Из уравнения (4) и начальных условий $x_0(0) = a, x_0'(0) = 0$ находим $x_0(t) = a \cos(t)$:

> $ini_0 := v_0(0) = a, D(v_0)(0) = 0$

$$ini_0 := v_0(0) = a, D(v_0)(0) = 0$$

> $l := rhs(dsolve(\{deq_0, ini_0\})) : v_0(t) := l : x_0 := v_0(t)$
 $x_0 := a \cos(t)$

Подставляя найденное решение $x_0(t)$ в уравнение (5) и учитывая его начальные условия $x_1(0) = 0, x_1'(0) = 0$, мы можем найти второе

слагаемое $x_1(t)$ в разложении (3). Нахождение решения $x_2(t)$ уравнения (6) и последующих членов разложения проводится аналогично. Покажем соответствующие команды Maple:

```
> for i from 1 to N do
  l := rhs(dsolve(\{deq_i, v_i(0) = 0, D(v_i)(0) = 0\})):
  v_i(t) := l : x_i := v_i(t)
end do:
```

```
> for i from 1 to N do x_i := collect(x[i], t, simplify) end do
```

$$x_1 := -\frac{3}{8} a^3 \sin(t) t - \frac{1}{8} a^3 \sin(t)^2 \cos(t)$$

$$x_2 := -\frac{243}{16384} \cos(t) a^9 t^4 + \frac{27}{16384} a^9 \sin(t) (12 \cos(t)^2 + 17) t^3 \\ - \frac{27}{131072} a^9 \cos(t) (32 \cos(t)^4 - 328 \cos(t)^2 - 9) t^2 - \frac{9}{524288} a^9 \sin(t) (64 \cos(t)^6 \\ - 496 \cos(t)^4 + 4680 \cos(t)^2 + 1703) t - \frac{3}{2621440} \sin(t)^2 \cos(t) a^9 (64 \cos(t)^6 \\ - 440 \cos(t)^4 + 2418 \cos(t)^2 - 36407)$$

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИНЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

$$> S := \text{add}(\varepsilon^i \cdot \text{simplify}(x_i), i = 0..N)$$

Мы описали здесь вычислительные аспекты приближенного поиска решения $x(t, \varepsilon)$ возмущенного уравнения (1). Ограничились в (3) тремя слагаемыми и нашли приближенное решение при бесконечно малых ε :

$$x(t, \varepsilon) \approx x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t).$$

Теория регулярных возмущений гарантирует равномерную сходимость $x(t, \varepsilon)$ к $x_0(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ для значений t на любом замкнутом и ограниченном интервале.

Однако на этом пути есть одна преграда, вызываемая так называемыми секулярными членами асимптотического разложения. Дело в том, что мы замечаем наличие членов вида $t \sin t$ и $t^4 \cos t$ в выражениях для $x_1(t)$ и $x_2(t)$, найденных выше. Они называются секулярными членами разложения. С ростом значения $|t|$ секулярные члены могут принимать большие значения. Поэтому значения слагаемых $\varepsilon x_1(t)$ и $\varepsilon^2 x_2(t)$ могут и не быть близкими к нулю при достаточно малых, но фиксированных значениях малого параметра $\varepsilon > 0$. В нашем случае $\varepsilon x_1(t)$

характеризуется выражением $\frac{3}{8} a^2 t \sin t \cdot \varepsilon$, а слагаемое $\varepsilon^2 x_2(t)$ выражением

$\frac{243}{16384} a^9 t^4 \cos t \cdot \varepsilon^2$. Как видим, при больших значениях аргумента t и параметра a эти слагаемые могут представлять собой большие числа. Поэтому для обеспечения близости $x(t, \varepsilon) \approx x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ для всех t , взятых из большого интервала, мы будем вынуждены ε брать соответственно бесконечно малым.

В таких условиях увеличение количества слагаемых в сумме $s_N(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \dots + \varepsilon^N x_N(t)$ может привести не к увеличению точности приближения $x(t, \varepsilon) \approx s_N(t, \varepsilon)$, а к противоположному эффекту, поскольку начинают расти степени t^m . В этой связи отметим, что сумма $s_1(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$, содержащая t , может обеспечивать даже лучшее приближение, чем $s_2(t, \varepsilon) = x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$, содержащая в своих секулярных членах уже t^4 .

Проведем теперь несколько численных экспериментов. Для определенности пусть всюду в дальнейшем $a = 2$. Приведем графические результаты приближения решения $x(t, \varepsilon)$ задачи (1),(2) суммой $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ при различных значениях ε :

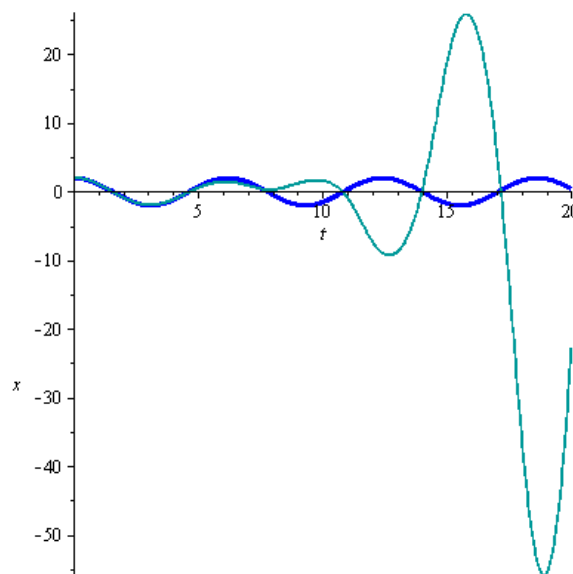


Рисунок 1- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/128$.

Impact Factor:

ISRA (India) = 6.317
 ISI (Dubai, UAE) = 1.582
 GIF (Australia) = 0.564
 JIF = 1.500

SIS (USA) = 0.912
 ПИИЦ (Russia) = 0.126
 ESJI (KZ) = 9.035
 SJIF (Morocco) = 7.184

ICV (Poland) = 6.630
 PIF (India) = 1.940
 IBI (India) = 4.260
 OAJI (USA) = 0.350

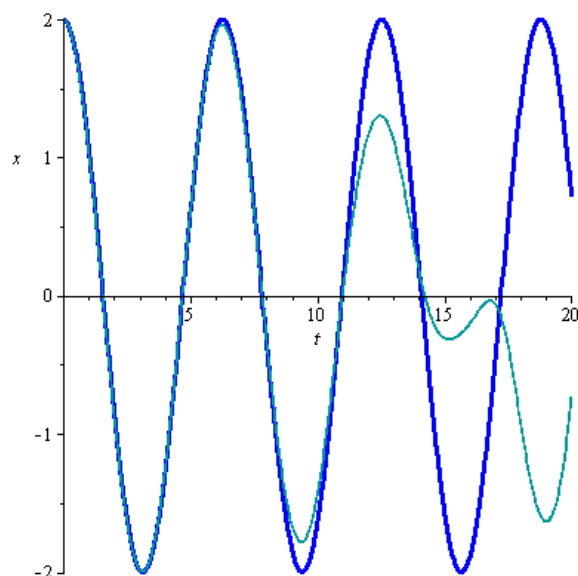


Рисунок 2- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/512$.

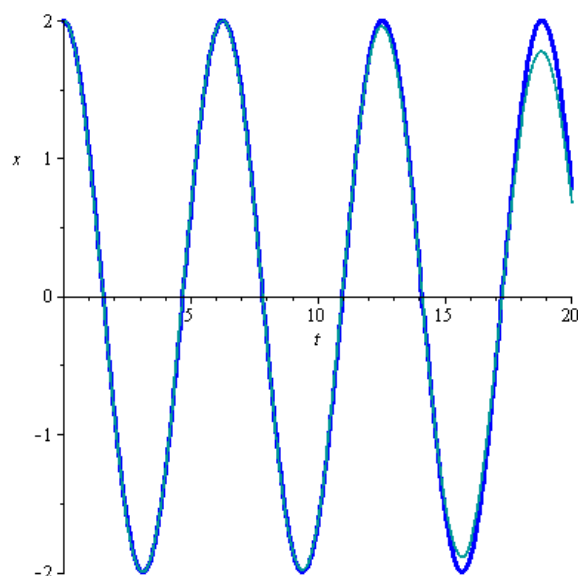


Рисунок 3- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/2048$.

Наши теоретические наблюдения подтверждаются на численных экспериментах. Как видно из рис. 1-3, секулярные члены действительно препятствуют стремлению $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ к $x(t, \varepsilon)$. Особенно это заметно при больших значениях t . Чтобы гасить их влияние мы вынуждены уменьшать значения

ε , и только при $\varepsilon \leq 1/2048 \approx 5 \cdot 10^{-4}$ мы начинаем получать более или менее удовлетворительную картину. Подтверждаются также выводы о том, что при больших t сумма $x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ может обеспечить более точное приближение. Результат соответствующих расчетов видим на рис. 4.

Impact Factor:

| | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | ПИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

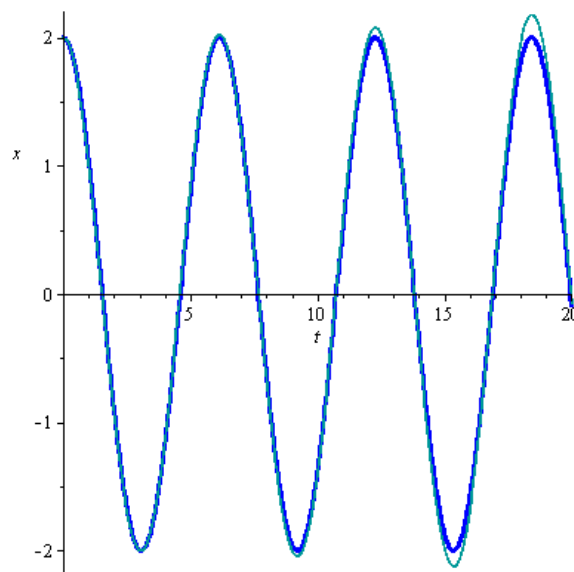


Рисунок 4- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $x_0(t) + \varepsilon x_1(t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/64$.

Так что при наличии секулярных членов увеличение слагаемых в сумме $s_N(t, \varepsilon)$ может привести к более точному приближению только при небольших значениях t . Следовательно, секулярные члены- наша основная проблема. Для борьбы с ними в свое время был предложен следующий метод, который называется методом Линдштедта-Пуанкаре [5,9]. Делаем замену независимого переменного $\tau = \omega t$ и получаем некую новую функцию $y(\tau)$ определяемую из тождества $x(t) = x(t(\tau)) = y(\tau)$. Отсюда

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \omega \frac{dy}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \omega \frac{d}{d\tau} \left(\frac{dy}{d\tau} \right) \frac{d\tau}{dt} = \omega^2 \frac{d^2y}{d\tau^2}.$$

Задача Коши (1),(2) в новых переменных запишется как

$$\omega^2 \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + y(\tau) + \varepsilon y^3(\tau) = 0, \quad (7)$$

$$> \omega := 1 + \varepsilon \cdot \omega_1 + \varepsilon^2 \cdot \omega_2$$

$$\omega := \varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon \omega_1 + 1$$

$$> deqq := \omega^2 \cdot \frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau) + y(\tau) + \varepsilon \cdot y(\tau)^3;$$

$$y(0) = a, \quad \frac{y(0)}{d\tau} = 0.$$

Теперь у нас появляется возможность избавления от секулярных членов. Для этого разлагаем $y(\tau, \varepsilon)$ и ω представляем в виде суммы по степеням малого параметра

$$y(\tau, \varepsilon) = y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + \dots,$$

$$\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

Подставляя их в (7), получаем следующее равенство

$$(1 + \varepsilon \omega_1 + \dots)^2 \frac{d^2}{d\tau^2} (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots) + \varepsilon^3 (y_0 + \varepsilon y_1 + \dots)^3 = 0.$$

Приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра, отсюда снова получаем рекуррентную систему линейных дифференциальных уравнений. Как показывают вычисления

Impact Factor:

| | | |
|--|--------------------------------------|------------------------------------|
| ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | ПИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

$$deqq := (\varepsilon^2 \omega_2 + \varepsilon \omega_1 + 1)^2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} y(\tau) \right) + y(\tau) + \varepsilon y(\tau)^3$$

$$> s := add(\varepsilon^i \cdot w_i(\tau), i = 0..N)$$

$$s := w_0(\tau) + \varepsilon w_1(\tau) + \varepsilon^2 w_2(\tau)$$

$$> ex1 := expand(subs(y(\tau) = s, deqq)) : ex := collect(ex1, \varepsilon) :$$

$$> \text{for } i \text{ from } 0 \text{ to } N \text{ do } deq_i := coeff(ex, \varepsilon, i) = 0 \text{ end do}$$

$$deq_0 := \frac{d^2}{d\tau^2} w_0(\tau) + w_0(\tau) = 0$$

$$deq_1 := w_0(\tau)^3 + 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w_0(\tau) \right) \omega_1 + \frac{d^2}{d\tau^2} w_1(\tau) + w_1(\tau) = 0$$

$$deq_2 := \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w_0(\tau) \right) \omega_1^2 + 3 w_0(\tau)^2 w_1(\tau) + 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w_0(\tau) \right) \omega_2 + 2 \left(\frac{d^2}{d\tau^2} w_1(\tau) \right) \omega_1 + \frac{d^2}{d\tau^2} w_2(\tau) + w_2(\tau) = 0$$

Разрешая эту рекуррентную систему дифференциальных уравнений, мы получаем

$$> l := rhs(dsolve(\{deq_0, w_0(0) = a, D(w_0)(0) = 0\})) : w_0(t) := l : y_0 := w_0(t) \\ y_0 := a \cos(\tau)$$

$$> \text{for } i \text{ from } 1 \text{ to } N \text{ do} \\ m := rhs(dsolve(\{deq_i, w_i(0) = 0, D(w_i)(0) = 0\})) : \\ w_i(t) := m : y_i := w_i(t) \\ \text{end do}$$

$$> y_1 := collect(y_1, \tau, simplify);$$

$$y_1 := -\frac{1}{8} a \sin(\tau) (3a^2 - 8\omega_1) \tau - \frac{1}{8} \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^3$$

$$> y_2 := collect(y_2, \tau, simplify);$$

$$y_2 := -\frac{1}{128} a (9a^4 - 48a^2\omega_1 + 64\omega_1^2) \cos(\tau) \tau^2 - \frac{1}{256} a \sin(\tau) (36a^4 \cos(\tau)^2 - 96a^2 \cos(\tau)^2 \omega_1 - 33a^4 - 64a^2\omega_1 + 256\omega_1^2 - 256\omega_2) \tau - \frac{1}{256} \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^5 (4 \cos(\tau)^2 - 25)$$

Заметим теперь, что в $y_1(\tau)$ секулярный член $\tau \sin \tau$ может быть уничтожен выбором

$$\omega_1 = \frac{3a^2}{8} :$$

$$> \omega_1 := \frac{3 \cdot a^2}{8};$$

$$\omega_1 := \frac{3}{8} a^2$$

| | | | |
|-----------------------|--------------------------|------------------------|----------------------|
| Impact Factor: | ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| | ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | ПИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| | GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| | JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

> $y_1 := \text{simplify}(y_1)$;

$$y_1 := -\frac{1}{8} \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^3$$

> $y_2 := \text{collect}(y_2, \tau, \text{simplify})$

$$y_2 := \frac{1}{256} a \sin(\tau) (21 a^4 + 256 \omega_2) \tau - \frac{1}{256} \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^5 (4 \cos(\tau)^2 - 25)$$

Теперь можно избавиться от секулярного члена в $y_2(\tau)$, положив $\omega_2 = -\frac{21a^4}{256}$.

Действительно,

> $\omega_2 := -\frac{21 \cdot a^4}{256}$;

$$\omega_2 := -\frac{21}{256} a^4$$

> $y_2 := \text{simplify}(y_2)$

$$y_2 := -\frac{1}{256} \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^5 (4 \cos(\tau)^2 - 25)$$

Итак в новых переменных мы получили приближение $y(\tau, \varepsilon) \approx y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau)$ к решению

уравнения (7), не содержащее секулярных членов. Соответствующие вычисления:

> $S := \text{add}(\varepsilon^i \cdot y_i, i = 0..N)$

$$S := a \cos(\tau) - \frac{1}{8} \varepsilon \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^3 - \frac{1}{256} \varepsilon^2 \sin(\tau)^2 \cos(\tau) a^5 (4 \cos(\tau)^2 - 25)$$

Вернемся теперь к старым переменным. Тогда

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= y(\tau, \varepsilon) = y(\omega t, \varepsilon) \\ &\approx y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t). \end{aligned}$$

В правую часть полученного приближенного равенства подставляем $\omega = 1 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2$ со значениями $\omega_1 = \frac{3a^2}{8}$ и $\omega_2 = -\frac{21a^4}{256}$.

Вычисляем $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t)$:

> $S := \text{add}(\varepsilon^i \cdot \text{subs}(\tau = \omega \cdot t, y_i), i = 0..N)$

$$\begin{aligned} S := & a \cos\left(\left(-\frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + 1\right) t\right) - \frac{1}{8} \varepsilon \sin\left(\left(-\frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + 1\right) t\right) \cos\left(\left(-\frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + 1\right) t\right) a^3 - \frac{1}{256} \varepsilon^2 \sin\left(\left(-\frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + 1\right) t\right) \cos\left(\left(-\frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + 1\right) t\right) a^5 \left(4 \cos\left(\left(-\frac{21}{256} \varepsilon^2 a^4 + \frac{3}{8} \varepsilon a^2 + 1\right) t\right)^2 - 25\right) \end{aligned}$$

Итак мы построили приближение $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t)$ к решению $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1), свободное от секулярных

членов, где $\omega = 1 + \frac{3a^2}{8} \varepsilon - \frac{21a^4}{256} \varepsilon^2$. Продemonстрируем точность такого приближения:

Impact Factor:

| | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | ПИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

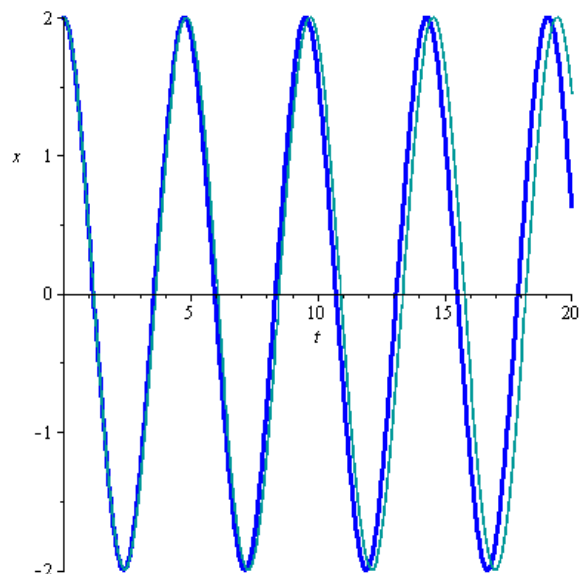


Рисунок 5- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/4$.

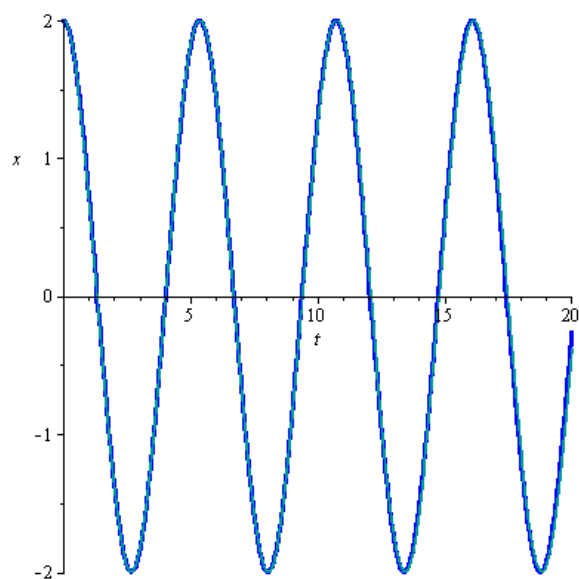


Рисунок 6- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/8$.

Как видим из рис. 5 и 6, сумма $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t)$ достаточно хорошо приближает решение $x(t, \varepsilon)$ задачи (1),(2) при всех t даже при значениях ε , не сильно малых. При $\varepsilon = 1/8$ они почти совпадают. Для сравнения напомним, что сумма $x_0(t) + \varepsilon x_1(t) + \varepsilon^2 x_2(t)$ не могла обеспечивать

такую точность приближения даже при $\varepsilon = 1/2048$ (см. рис. 3).

Отметим также, что в случае разложений, свободных от секулярных членов, сумма $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t) + \varepsilon^2 y_2(\omega t)$, содержащая больше слагаемых, предпочтительнее, чем сумма $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t)$ с меньшим количеством слагаемых. Это видно из рис. 7 и 8.

Impact Factor:

| | | |
|--------------------------|------------------------|----------------------|
| ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | ПИИЦ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

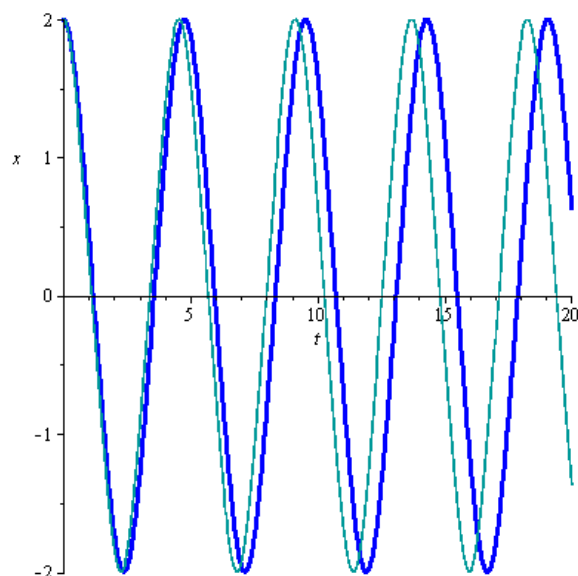


Рисунок 7- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/4$.

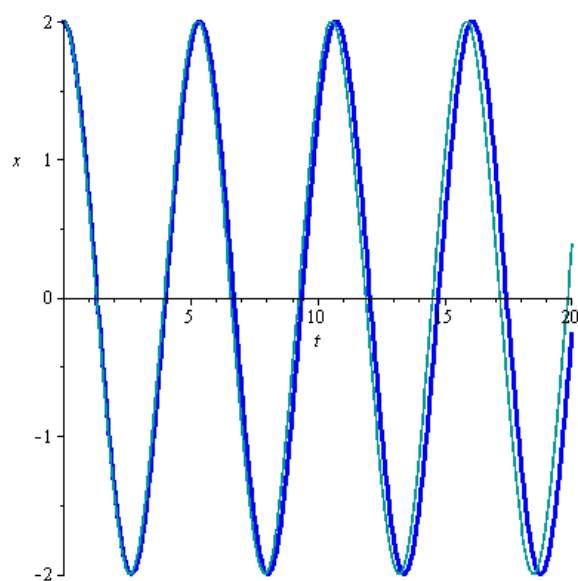


Рисунок 8- Графики решения задачи (1),(2) (синий цвет) и его приближения $y_0(\omega t) + \varepsilon y_1(\omega t)$ (темно-зеленый цвет) при $\varepsilon = 1/8$.

Заклучение.

Мы показали широкие возможности компьютерных технологий и предложили программу на Maple, которая реализует на компьютере метод возмущений и метод Линдштедта-Пуанкаре устранения секулярных членов. Как видно из многочисленных численных

экспериментов и графических представлений их результатов, разложения Линдштедта-Пуанкаре имеют очевидные преимущества в плане точности перед SME-методом. Тем не менее, известны сравнительно новые результаты работ [7,8], в которых предложены модификации SME-метода, имеющие достаточно высокую точность.

| | | | |
|-----------------------|---------------------------------|-------------------------------|-----------------------------|
| Impact Factor: | ISRA (India) = 6.317 | SIS (USA) = 0.912 | ICV (Poland) = 6.630 |
| | ISI (Dubai, UAE) = 1.582 | ПИИИ (Russia) = 0.126 | PIF (India) = 1.940 |
| | GIF (Australia) = 0.564 | ESJI (KZ) = 9.035 | IBI (India) = 4.260 |
| | JIF = 1.500 | SJIF (Morocco) = 7.184 | OAJI (USA) = 0.350 |

References:

1. Abiev, N.A., & Kairliyeva, D.B. (2018). Computer interpretation of bifurcations of singularly perturbed equations. *Mechanika i tehnologii*, 1(59): 28-36. [in Russian]
2. Abiev, N.A., & Kairliyeva, D.B. (2018). Computer estimations of thickness of boundary layer in singularly perturbed differential equations. *Mechanika i tehnologii*, 1(59): 36-44. [in Russian]
3. Borwein, J.M., & Skerritt, M.P. (2011). *An introduction to modern mathematical computing. With Maple*. Springer Undergraduate Texts in Mathematics and Technology. Springer, New York, xvi+216 pp.
4. Drazin, P.G. (1992). *Nonlinear systems*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. (p.392). Cambridge University Press, Cambridge
5. Esmailzadeh, E., Younesian, D., & Askari, H. (2019). *Analytical Methods in Nonlinear Oscillations* (p.286). Springer, Netherlands.
6. Hale, J. K. (1966). Periodic Differential Equations. *Amer. Math. Monthly.*, 73(4): 430.
7. He, J.H. (1999). Modified straightforward expansion. *Meccanica*, 34(4): 287-289.
8. He, J.H., & Lee, E.W. (2009). New analytical methods for cleaning up the solution of nonlinear equations. *Comput. Math. Appl.*, 58 (11): 2081-2083.
9. Poincaré, H. (1987). *New methods of celestial mechanics*. Vol. II. (p.487). Albert Blanchard Scientific Library, Paris. [Reprint of the 1893 original]
10. Wasow, W. (1987). *Asymptotic expansions for ordinary differential equations*. (p.374). Dover Publications, Inc., New York.