

Оптические фазовые сингулярности и сверхсветовое движение в неограниченном пространстве

В.В. Котляр^{1,2}, А.А. Ковалёв^{1,2}, А.Г. Налимов^{1,2}

¹ ИСОИ РАН – филиал ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН,
443001, Россия, г. Самара, ул. Молодогвардейская, д. 151,

² Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева,
443086, Россия, г. Самара, Московское шоссе, д. 34

Аннотация

В этой работе мы обобщили замечательный результат, полученный Соскиным с соавторами в *Physical Review A* 56, 4064 (1997). Мы показали, что у осевой суперпозиции двух пучков Лагерра–Гаусса с номерами $(0, n)$ и $(0, m)$ и разными радиусами перетяжек топологический заряд до плоскости, на которой радиусы перетяжки становятся одинаковыми, равен m , если радиус перетяжки пучка с номером $(0, m)$ больше, а после этой плоскости топологический заряд всей суперпозиции равен n . Так получается потому, что у суперпозиции в начальной плоскости имеется оптический вихрь на оптической оси с топологическим зарядом m и еще на окружностях разных радиусов имеются $(n - m)$ вихрей с топологическими зарядами $+1$ и столько же вихрей с топологическими зарядами -1 . При приближении пучка к указанной плоскости вихри с топологическим зарядом -1 со скоростью больше скорости света «уходят» на бесконечность, и топологический заряд пучка становится равен n . Если, наоборот, радиус перетяжки пучка с номером $(0, m)$ меньше, то топологический заряд пучка от начальной плоскости до плоскости, на которой радиусы перетяжки становятся одинаковыми, равен n , а после этой плоскости топологический заряд суперпозиции равен m . Так получается потому, что после указанной плоскости из бесконечности со скоростью больше скорости света «приходят» $n - m$ вихрей с топологическим зарядом -1 .

Ключевые слова: оптический вихрь, скрытая фаза, винтовая дислокация, топологический заряд.

Цитирование: Котляр, В.В. Оптические фазовые сингулярности и сверхсветовое движение в неограниченном пространстве / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.Г. Налимов // Компьютерная оптика. – 2021. – Т. 45, № 5. – С. 654-660. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-879.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Optical phase singularities and superluminal motion in unbounded space. *Computer Optics* 2021; 45(5): 654-660. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-879.

Введение

Если орбитальный угловой момент параосиальных вихревых пучков сохраняется при распространении их в свободном пространстве [1], то про топологический заряд (ТЗ) оптических вихрей этого сказать пока нельзя. У всех оптических вихрей с радиальной симметрией (пучки Лагерра–Гаусса, Бесселя–Гаусса) ТЗ сохраняется. Сохраняется ТЗ также и у некоторых асимметричных оптических вихрей [2]. Общего доказательства сохранения ТЗ на сегодня нет, но есть отдельные работы, в которых приведены примеры оптических вихрей, у которых ТЗ не сохраняется. Первым таким примером является работа Соскина с соавторами 1997 года [3]. В этой работе рассмотрена простая суперпозиция Гауссова пучка и моды Лагерра–Гаусса (ЛГ) с номером $(0, n)$, причём радиусы перетяжки у Гауссовых пучков разные. Из-за разной расходимости в комбинированном пучке при распространении в пространстве изменяется ТЗ. Если в начальной плоскости радиус перетяжки Гауссова

пучка больше радиуса перетяжки моды ЛГ, то ТЗ комбинированного пучка сначала равен нулю. По мере распространения радиусы обоих пучков выравниваются, и после этой плоскости радиус моды ЛГ становится больше, чем радиус Гауссова пучка. С этого места ТЗ комбинированного пучка становится равен n . В [4] теоретически, а в [5, 6] экспериментально показано, что Гауссов пучок с начальным дробным ТЗ при распространении в ближней зоне имеет целый ТЗ, равный целому числу, ближайшему к дробному числу. При дальнейшем распространении таких пучков их ТЗ претерпевает и другие изменения, ранее не известные. Так, в [7] численно и экспериментально показано, что в зоне Френеля ТЗ Гауссова оптического вихря с начальным дробным ТЗ равен целому числу на единицу большему, чем ближайшее целое число к начальному дробному ТЗ. Аналогичное исследование провели авторы работы [8]. В [8] ТЗ измерялся в Фурье-плоскости (в фокусе сферической линзы) и были получены результаты, отличные от результатов работы [7]. Эти исследования показали, что ТЗ не

всегда сохраняется при распространении. И так, если в начальной плоскости ТЗ имел дробную часть меньше половины, то при распространении у оптического вихря ТЗ будет целым с недостатком. А если в начальной плоскости ТЗ имел дробную часть больше половины, то у оптического вихря при распространении ТЗ будет целым с избытком. Возникает вопрос: а какой целый ТЗ будет у оптического вихря, если в начале дробная часть ТЗ была равна точно половине?

Поэтому оптические вихри с полуцелым ТЗ заслуживают особого внимания. В работе [9] рассматривалась суперпозиция $r \exp(-r^2)(\exp(-i\varphi)-1)$ двух пучков (смесь винтовой и краевой дислокаций), у которой ТЗ равен $-1/2$. Но из-за того, что второе слагаемое не является модой и в дальней зоне на оптической оси нет нуля интенсивности, в дальней зоне ТЗ суперпозиции равен -1 . Полуцелые вихри рассматривались также в [10], они названы Гамма-Гауссовыми пучками. Но явно они описаны только в начальной плоскости.

У некоторых оптических вихрей ТЗ вообще не определен. Например, у осевой суперпозиции двух разных бездифракционных пучков Бесселя с одинаковыми весами ТЗ не определен, так как функции Бесселя имеют нули на разных радиусах, поэтому ТЗ суперпозиции будет на одних радиусах равен номеру одной функции Бесселя, а на других радиусах ТЗ суперпозиции будет равен номеру другой функции Бесселя.

В данной работе мы продолжим исследования, начатые в работе Соскина с соавторами [3], и покажем, что ТЗ суперпозиции двух разных пучков ЛГ с разными радиусами перетяжки не сохраняется потому, что часть фазовых сингулярностей либо уходят на бесконечность, либо приходят из бесконечности. Причем уходят и приходят фазовые сингулярности со скоростью больше скорости света. Заметим, что уход сингулярностей на бесконечность не означает, что они совсем пропадают, и также приход сингулярностей из бесконечности значит, что они там были. Поэтому практически (так как зарегистрировать нуль интенсивности на периферии пучка, где интенсив-

ность сама почти равна нулю, не представляется возможным) ТЗ в данном примере не сохраняется, а теоретически ТЗ сохраняется, только частично «скрывается на бесконечности». В [10] аналогичный эффект называют «скрытой фазой».

1. Теория

Топологический заряд рассчитывается с помощью формулы, предложенной Берри [4]:

$$TC = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \arg E(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial E(r, \varphi) / \partial \varphi}{E(r, \varphi)}. \tag{1}$$

В [3] показано, что ТЗ комбинированного пучка, состоящего из суперпозиции Гауссова пучка и моды ЛГ, при распространении не сохраняется. Но прямого вычисления ТЗ по формуле (1) в [3] нет. Поэтому ниже мы обобщим результат работы [3] и рассчитаем ТЗ суперпозиции двух мод ЛГ с разными номерами и разными радиусами перетяжек с помощью прямого вычисления по формуле (1).

Пусть амплитуда поля комбинированного пучка, состоящего из двух мод Лагерра-Гаусса $(0, n)$ и $(0, m)$ с разными радиусами перетяжек, задаётся в виде

$$E(r, \varphi, z) = a(z) \left(\frac{r}{w_1(z)} \right)^{|n|} \times \exp(-r^2 / w_1^2(z) + ikr^2 / 2R_1(z) + i n \varphi) + b(z) \left(\frac{r}{w_2(z)} \right)^{|m|} \times \exp(-r^2 / w_2^2(z) + ikr^2 / 2R_2(z) + i m \varphi), \tag{2}$$

где $w_1(z)$ и $w_2(z)$ – радиусы перетяжек двух Гауссовых пучков, $R_1(z)$ и $R_2(z)$ – радиусы кривизны, a и b – постоянные, зависящие только от z , n и m – целые топологические заряды ОВ. Подставив (2) в (1), получим:

$$TC = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Im} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{i n a r^n w_2^m(z) \exp(-r^2 / w_1^2(z) + iA + i n \varphi) + i m b r^m w_1^n(z) \exp(-r^2 / w_2^2(z) + iB + i m \varphi)}{a r^n w_2^m(z) \exp(-r^2 / w_1^2(z) + i n \varphi) + b r^m w_1^n(z) \exp(-r^2 / w_2^2(z) + i m \varphi)} = \frac{1}{2\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{n a r^{n-m} w_2^m(z) \exp(-r^2 (1 / w_1^2(z) - 1 / w_2^2(z)) + i(A - B) + i(n - m)\varphi) + m b w_1^n(z)}{a r^{n-m} w_2^m(z) \exp(-r^2 (1 / w_1^2(z) - 1 / w_2^2(z)) + i(A - B) + i(n - m)\varphi) + b w_1^n(z)} = \begin{cases} m, & w_1(z) \leq w_2(z), \\ n, & w_1(z) > w_2(z). \end{cases} \tag{3}$$

В (3), чтобы не загромождать формулу, введены обозначения $A = kr^2 / 2R_1(z)$, $B = kr^2 / 2R_2(z)$. В (3) интеграл вычислялся так. Пусть $w_{10} > w_{20}$, где $w_{10} = w_1(0)$, $w_{20} = w_2(0)$, тогда $w_1(z) > w_2(z)$ при $z < k w_{10} w_{20} / 2$ и в показателе экспоненты под интегралом в (3) положительное число. Поэтому в пределе $r \rightarrow \infty$ в числителе и знаменателе под интегралом в (3) экспоненты стремятся к бесконечности быстрее, чем степень. Следовательно, вторыми слагаемыми в числителе и знаменателе можно пренебречь. А оставшиеся первые сла-

гаемые взаимно сокращаются, и остаётся только n . Поэтому ТЗ равен n . Но при $z > k w_{10} w_{20} / 2$ радиус первой моды ЛГ становится меньше, чем радиус второй моды ЛГ $w_1(z) < w_2(z)$, и показатель экспоненты в интеграле (3) будет отрицательным числом. Отсюда видно, что в пределе $r \rightarrow \infty$ под интегралом в (3) первые слагаемые в числителе и знаменателе стремятся к нулю. Остаются только вторые слагаемые, которые взаимно сокращаются, и в числителе остаётся m . Тогда ТЗ будет равен m .

И, наоборот, если $w_{10} < w_{20}$, то при $z < kw_{10}w_{20}/2$ ТЗ будет равен m , а при $z > kw_{10}w_{20}/2$ ТЗ будет равен n . Таким образом, при распространении пучка (2) на некотором расстоянии рождаются (или уничтожаются) $|n - m|$ оптических вихрей с ТЗ, равным -1 .

2. Движение фазовых сингулярностей в пучке при его распространении

Приравнивая амплитуды двух пучков ЛГ, входящих в комбинацию (2), получим:

$$a(z) \left(\frac{r}{w_1(z)} \right)^{|n|} e^{-r^2/w_1^2(z)} = b(z) \left(\frac{r}{w_2(z)} \right)^{|m|} e^{-r^2/w_2^2(z)}. \quad (4)$$

Перенесем экспоненты в правую часть в (4), а в левую часть перенесем степени, тогда получим (пусть $n > m > 0$):

$$\frac{a(z)}{b(z)} \left(\frac{w_2^m(z)}{w_1^n(z)} \right) r^{n-m} = \exp \left[-r^2 \left(\frac{1}{w_2^2(z)} - \frac{1}{w_1^2(z)} \right) \right]. \quad (5)$$

Из (5) следует, что при любом z левая часть есть степенная функция от r , которая растет от нуля до бесконечности. А правая часть (5) – это Гауссова экспонента от r , которая, начиная от единицы, либо растет (при $w_2(z) > w_1(z)$) до бесконечности, либо убывает (при $w_2(z) < w_1(z)$) до нуля. Но так как радиусы перетяжки растут с расстоянием z по-разному

$$w_1(z) = w_{10} \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_1^2}}, \quad w_2(z) = w_{20} \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_2^2}}, \quad (6)$$

где $z_1 = kw_{10}^2/2$, $z_2 = kw_{20}^2/2$, то при определенном z радиусы перетяжки (6) станут одинаковыми по величине:

$$w_1(z) = w_2(z), \quad z_0 = kw_{10}w_{20}/2. \quad (7)$$

Тогда из (5) с учетом (7) следует такая эволюция нулей интенсивности, или вихревых дислокаций, или центров фазовой сингулярности поля (2).

Так как на оптической оси оба пучка ЛГ в (2) имеют изолированные нули интенсивности кратностью n и m , то топологической заряд всего оптического вихря (2) вблизи оптической оси будет равен ТЗ того оптического вихря, у которого амплитуда больше [5]. А больше амплитуда вблизи оптической оси у того оптического вихря, у которого показатель степени меньше ($n > m$):

$$a(z) \left(\frac{r}{w_1(z)} \right)^n < b(z) \left(\frac{r}{w_2(z)} \right)^m, \quad r \ll 1. \quad (8)$$

Итак, вблизи самой оптической оси при любых расстояниях z и при любых значениях констант a , b , w_{10} , w_{20} сформируется оптический вихрь с ТЗ, равным m . Другие центры сингулярности будут формироваться на радиусах окружностей, при которых выполняется равенство (5). Пусть в начальной плоско-

сти $n > m$, $w_2 > w_1$, тогда экспонента в (5) растет до бесконечности и пересекает дважды кривую r^{n-m} . При первом пересечении этих кривых на окружности радиуса R_1 формируются $n - m$ нулей интенсивности с ТЗ, равным $+1$, а на радиусе окружности $R_2 > R_1$, при котором экспонента в (5) второй раз пересекает степенную функцию, формируются также $n - m$ нулей интенсивности, но с ТЗ, равным -1 каждый. Таким образом в начальной плоскости и в ближней зоне сформируется оптический вихрь с ТЗ m на оптической оси, а сингулярности на окружностях с радиусами R_2 и R_1 скомпенсируют друг друга.

Но самое интересное будет происходить при дальнейшем распространении пучка (2). Меньший радиус перетяжки $w_1(z)$ будет увеличиваться быстрее, чем больший радиус $w_2(z)$, и «догонять» больший радиус перетяжки. При этом экспонента в правой части (5) будет стремиться к бесконечности все медленнее, и радиус R_2 будет увеличиваться. Это означает, что $n - m$ нулей интенсивности с ТЗ, равным -1 , которые сформировались на окружности радиуса R_2 , будут смещаться от оптической оси к периферии пучка. При приближении пучка к плоскости $z_0 = (kw_{10}w_{20})/2$, на которой радиусы перетяжек пучков ЛГ в (2) становятся одинаковыми, экспонента в (5) становится равной единице. То есть радиус R_2 становится бесконечно большим. Это означает, что $n - m$ нулей интенсивности с ТЗ, равным -1 , «ушли» на бесконечность. Причем пока лазерный пучок распространялся от нуля ($z=0$) до $z_0 = (kw_{10}w_{20})/2$ $n - m$ нулей интенсивности с ТЗ, равным -1 , переместились с конечного расстояния на окружности радиуса R_2 до бесконечности. Поэтому можно утверждать, что нули интенсивности перемещались со скоростью больше скорости света. Это не противоречит теории относительности, так как перемещались точки нулевой интенсивности, которые образовались в результате интерференции двух волн. В оптике известны аналогичные случаи. Например, у бездифракционного пучка Бесселя фазовая скорость распространения вдоль оптической оси больше скорости света в $1/\cos\alpha$ раз, где α – половина угла у вершины конической волны, которая образует пучок Бесселя. В работе [11] было показано, что световой «зайчик», который получается при отражении от дифракционной решетки частично-когерентного света и при условии, что между плоскостями постоянной фазы и слоями когерентности имеется ненулевой угол, может распространяться со скоростью большей скорости света.

Таким образом, при $z > z_0$ у пучка (2) ТЗ будет уже равен $m + (n - m) = n$, так как $(n - m)$ вихрей с ТЗ, равным -1 , «ушли» на бесконечность.

Аналогичный, но обратный сценарий эволюции точек сингулярности в пучке (2) будет наблюдаться в случае, если $n > m$, $w_2 < w_1$. В этом случае в начальной плоскости и в ближней зоне экспонента в (5) будет убывать от 1 до нуля и будет только один раз пересекать (на радиусе R_1) степенную функцию слева в (5),

которая растёт от нуля до бесконечности. На этом радиусе R_1 сформируются $n - m$ оптических вихрей с ТЗ, равным +1 каждый. Поэтому у пучка (2) при $z < z_0$ будет ТЗ, равный $m + (n - m) = n$. Но при распространении такого пучка после расстояния z_0 , когда $z > z_0$, радиус перетяжки $w_1(z)$ «догонит» и «перегонит» радиус перетяжки второго пучка $w_2(z)$, и экспонента в (5) опять будет расти от 1 до бесконечности и дважды пересекать степенную функцию в (5). Другими словами, на радиусе окружности R_2 сформируются $n - m$ оптических вихрей с ТЗ, равным -1 каждый, и у всего пучка при $z > z_0$ ТЗ будет равен m .

То есть до плоскости z_0 у пучка (2) был ТЗ n , но при прохождении этой плоскости из бесконечности со скоростью большей скорости света в пучок «пришли» $n - m$ оптических вихрей с ТЗ, равным -1, и у всего пучка ТЗ стал равен $n - (n - m) = m$.

Случай равенства радиусов перетяжки $n > m$, $w_2 = w_1$ рассмотрен в [12], где показано, что у суперпозиции любого числа пучков ЛГ с одинаковыми радиусами перетяжек ТЗ будет равен большему номеру моды ЛГ. То есть в нашем случае ТЗ суперпозиции (2) будет равен n . И ТЗ такой суперпозиции ($w_2 = w_1$) будет сохраняться при распространении.

Итак, можно говорить, что пучок (2) при $w_2 \neq w_1$ является примером, доказывающим, что ТЗ оптических вихрей не сохраняется при распространении. Но уход части оптических вихрей на бесконечность не означает, что они пропали. Если оптические вихри на

бесконечности брать в расчет, то ТЗ пучка будет сохраняться.

3. Моделирование

Начальное поле рассчитывалось по формуле:

$$E = E_1 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_1} \right)^n \exp \left(in\phi - \frac{r^2}{w_1^2} \right) + E_2 \left(\frac{\sqrt{2}r}{w_2} \right)^m \exp \left(im\phi - \frac{r^2}{w_2^2} \right). \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда второй радиус перетяжки больше первого: $n > m$, $w_1 < w_2$. Параметры расчета: $E_1 = E_2 = 1$, $n = 5$, $w_1 = 3$ мкм, $m = 2$, $w_2 = 4$ мкм, $\lambda = 532$ нм, всё поле 20×20 мкм ограничено круглой апертурой радиусом 10 мкм, 400×400 отсчетов. Амплитуда и фаза начального поля представлены на рис. 1. На рис. 1 ТЗ равен 2, так как на концах трёх отрезков, видных на рис. 1б, есть центры сингулярности с разными знаками. То есть три оптических вихря, центры которых находятся на ближайших к оптической оси концах трех отрезков, лежащих на расстоянии R_1 от оси, имеют ТЗ, равный +1. А три других оптических вихря, центры которых находятся на удаленных концах отрезков на рис. 1б, лежащих на радиусе R_2 , имеют ТЗ, равный -1. Кривая, проходящая сверху вниз через оптическую ось, показывает скачки фазы на 2π оптического вихря с ТЗ, равным +2.

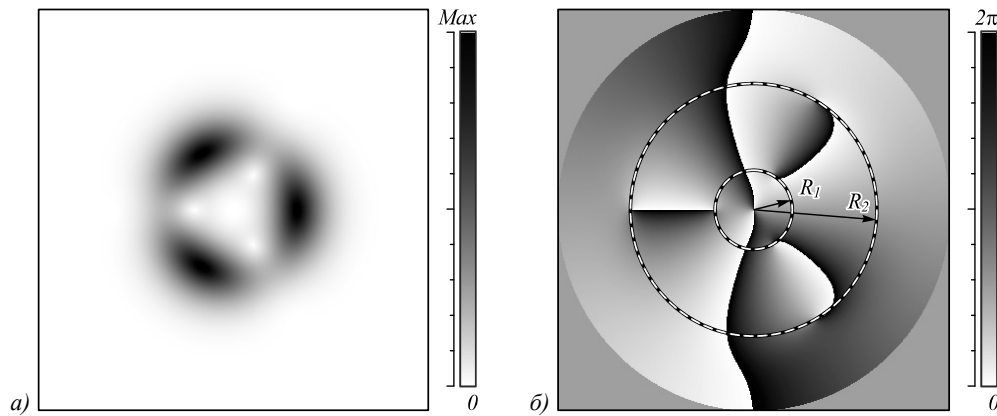


Рис. 1. Амплитуда (негатив) (а) и фаза (б) начального поля (9). Белый цвет – фаза ноль, чёрный цвет – фаза 2π . Размер изображений – 20×20 мкм

Расстояние (7) до плоскости, на которой радиусы перетяжки двух пучков ЛГ (9) становятся одинаковыми, для данных параметров составляет $z_0 = (\pi/\lambda)w_1w_2 = 70,86$ мкм. При этом радиус перехода ТЗ с 2 на 5 составляет $R_1 = 1,85$ мкм, радиус перехода ТЗ с 5 на 2 составляет $R_2 = 10,5$ мкм. На расстоянии z поле для каждого пучка ЛГ рассчитывалось по формуле:

$$E(\rho, \theta, z) = \frac{w(0)}{w(z)} \left[\frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right]^n \times \exp \left[-\frac{\rho^2}{w^2(z)} + \frac{ik\rho^2}{2R(z)} + in\theta - i(n+1)\zeta(z) \right], \tag{10}$$

где

$$w(z) = w \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R} \right)^2},$$

$$R(z) = z \left[1 + \left(\frac{z_R}{z} \right)^2 \right],$$

$$\zeta(z) = \arctan \left(\frac{z}{z_R} \right). \tag{11}$$

При увеличении расстояния z радиусы смены топологического заряда R_1 и R_2 начинают расти. На

рис. 2 показаны амплитуда и фаза в сечении пучка (9) на расстоянии $z=20$ мкм. Сравнивая рис. 2 с рис. 1, видно, что и амплитуда, и фаза поля (9) повернулись на некоторый угол против часовой стрелки. И по-прежнему на расстоянии R_1 от оптической оси находятся три оптических вихря с ТЗ, равным +1 каждый (их центры на ближайших к оптической оси концах трех отрезков на рис. 2б), а на расстоянии R_2 находят-

ся три других оптических вихря с ТЗ, равным -1 каждый (их центры на дальних по отношению к оптической оси концах трех отрезков на рис. 2б). Причем оптические вихри с ТЗ, равным -1, смещаются дальше от центра (от оптической оси). Например, при $z=20$ мкм (рис. 2) радиусы, на которых находятся три вихря с ТЗ, равным +1, и три вихря с ТЗ, равным -1, составляют $R_1=2,05$, $R_2=12,04$ соответственно.

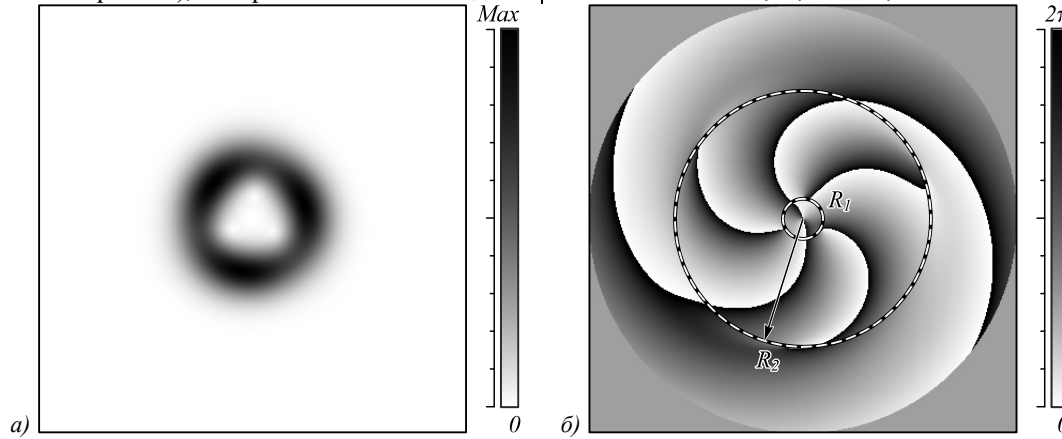


Рис. 2. Амплитуда (негатив, а) и фаза (б) поля на расстоянии $z=20$ мкм. Белый цвет – фаза ноль, чёрный цвет – фаза 2π . Размер изображений – 40×40 мкм, расчёт по формуле (10)

При увеличении расстояния z радиус R_2 , на котором лежат три оптических вихря с ТЗ, равным -1, увеличивается с ускорением, и примерно на расстоянии $z=71$ мкм уходит на бесконечность. На рис. 3 показаны зависимости радиусов перехода R_1 и R_2 от z .

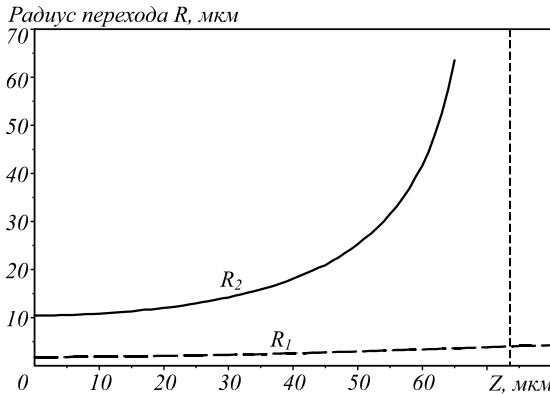


Рис. 3. Радиусы перехода ТЗ из 2 в 5 R_1 (пунктирная линия) и из 5 в 2 R_2 (сплошная линия) в мкм в зависимости от расстояния от плоскости перетяжки z (мкм)

Из рис. 3 видно, что R_2 , на котором лежат три оптических вихря с ТЗ, равным -1, увеличивается с ускорением и при расстоянии z около 71 мкм увеличивается до бесконечности. Если график для R_2 на рис. 3 аппроксимировать функцией:

$$R_2 = \frac{1}{c_1 + c_2 z} + b, \quad (12)$$

то при значениях параметров $c_1=0,152$ мкм⁻¹, $c_2=-0,0021$ мкм⁻², $b=3,95$ мкм график функции (12) будет хорошо совпадать с функцией на рис. 3 (сплошная кривая). Обе функции показаны на рис. 4.

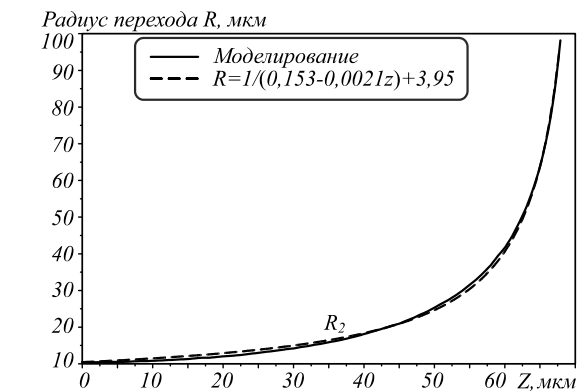
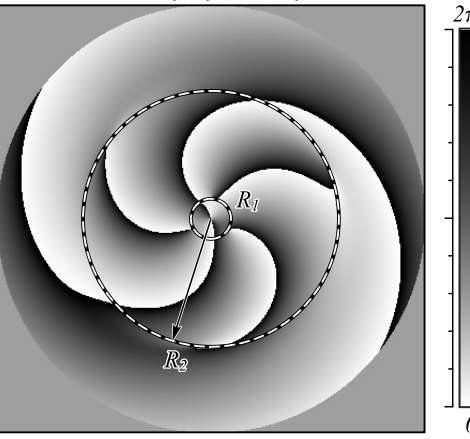


Рис. 4. Сравнение радиуса R_2 , на котором находятся три вихря с ТЗ, равным -1, полученного в результате расчёта с помощью преобразования Френеля, и по формуле (12)

Из (11) с учетом подобранных коэффициентов радиус R_2 будет стремиться к бесконечности примерно при $z \approx 73,2$ мкм.

Покажем подробнее, что скорость движения дислокации больше скорости света. Пусть на расстоянии z_1 дислокация находится на радиусе R_1 , на расстоянии z_2 от перетяжки на радиусе R_2 . Согласно уравнению (12) при $z_1=60$ мкм получим $R_1=42,41$ мкм, а при $z_2=65$ мкм получим $R_2=68,47$ мкм. Свет со скоростью света прошел расстояние от центра перетяжки до центра вихря на расстояние z_1 , равное: $L_1 = (R_1^2 + z_1^2)^{1/2} = 73,47$ мкм и до центра вихря на расстояние z_2 , равное $L_2 = (R_2^2 + z_2^2)^{1/2} = 94,41$ мкм. За одинаковый промежуток времени свет прошел расстояние $L_2 - L_1 = 20,94$ мкм, а оптический вихрь переместился на расстояние $[(R_2 - R_1)^2 + (z_2 - z_1)^2]^{1/2} = 26,53$ мкм. Мы

получили, что на промежутке $60 \text{ мкм} < z < 65 \text{ мкм}$ оптический вихрь двигался быстрее света в $26,53 / 20,94 = 1,27$ раз.

Теперь рассмотрим случай, когда, наоборот, первый радиус перетяжки больше, чем второй: $n > m$, $w_1 > w_2$. Все параметры те же, что и на рис. 1, но $w_1 = 4 \text{ мкм}$, $w_2 = 3 \text{ мкм}$. В начальной плоскости (при $z = 0$) амплитуда и фаза поля (9) показаны на рис. 5.

Из рис. 5 видно, что ТЗ поля (9) равен 5. На рис. 5б по-прежнему близкая к вертикали линия скачка фазы на 2π , проходящая через центр (оптическую ось), принадлежит оптическому вихрю с ТЗ, равным +2, а три луча, которые начинаются рядом с оптической осью на радиусе R_1 , принадлежат трем оптическим вихрям с ТЗ, равным +1 каждый. При распространении поля на рис. 5 ТЗ всего поля (9) остается равным 5, только увеличивается радиус R_1 , на кото-

ром находятся три оптических вихря с ТЗ, равным +1. Но после расстояния (7) $z_0 = (\pi / \lambda) w_{10} w_{20} = 70,86 \text{ мкм}$, на котором радиусы перетяжек двух пучков ЛГ в суперпозиции (9) становятся одинаковыми, ТЗ становится равен 2. На рис. 6 показана фаза поля, рассчитанная по формуле (10) на расстоянии $z = 90 \text{ мкм}$.

На картине фазы (рис. 6) можно видеть, что на радиусе R_2 , примерно равном 45 мкм, появились три оптических вихря с ТЗ, равным -1 каждый, которые скомпенсировали 3 оптических вихря с ТЗ, равным +1. И остался не скомпенсированным только оптический вихрь с центром на оптической оси с ТЗ, равным +2. На рис. 7 показаны графики радиусов, на которых находятся три вихря с ТЗ, равным +1 R_1 (пунктирная линия), и три вихря с ТЗ, равным -1 R_2 (сплошная линия), в зависимости от расстояния до перетяжки.

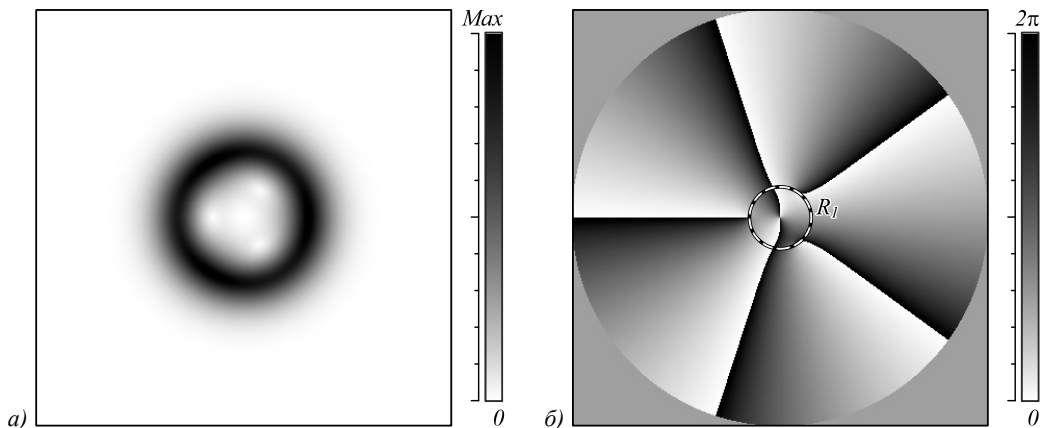


Рис. 5. Амплитуда (негатив) (а) и фаза (б) начального поля. Белый цвет – фаза ноль, черный цвет – фаза 2π . Размер изображений – $20 \times 20 \text{ мкм}$

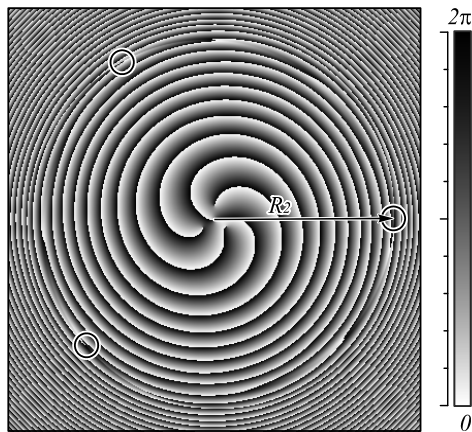


Рис. 6. Фаза поля на расстоянии $z = 90 \text{ мкм}$, размер поля – $100 \times 100 \text{ мкм}$

Сплошную кривую на рис. 7 можно аппроксимировать по-прежнему формулой (12). Если выбрать параметры в (12) равными $c_1 = -0,258 \text{ мкм}^{-1}$, $c_2 = 0,00366 \text{ мкм}^{-2}$, $b = 30 \text{ мкм}$, то график радиуса R_2 будет хорошо совпадать со сплошной кривой на рис. 7. Сравнение этих двух графиков показано на рис. 8.

Из рис. 8 видно, что радиус R_2 стремится к бесконечности при $z \approx 69,8 \text{ мкм}$, что отличается от расстояния (7) приблизительно на 1,5 %.

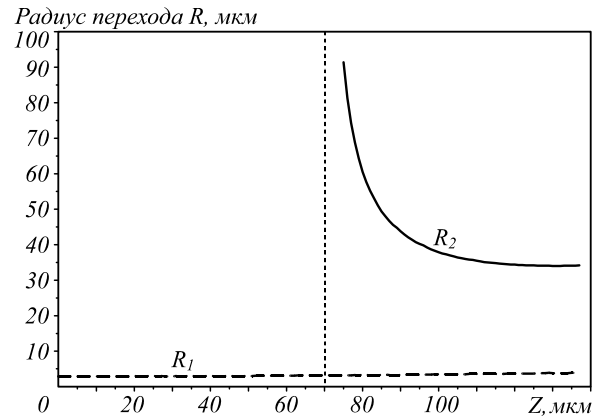


Рис. 7. Радиусы перехода ТЗ из 2 в 5 (R_1 , пунктирная линия) и 5 в 2 (R_2 , сплошная линия) в мкм в зависимости от расстояния от перетяжки z (мкм)

Заключение

В работе показано, что у осевой суперпозиции двух пучков Лагерра–Гаусса с номерами $(0, n)$ и $(0, m)$ и разными радиусами перетяжки ТЗ до плоскости, на которой радиусы перетяжки становятся одинаковыми, равен m , если радиус перетяжки пучка с номером $(0, m)$ больше, а после этой плоскости ТЗ всей суперпозиции равен n . Так получается потому, что у

суперпозиции в начальной плоскости имеется оптический вихрь на оптической оси с ТЗ m , и еще на разных окружностях имеются $(n-m)$ вихрей с ТЗ, равным $+1$, и столько же вихрей с ТЗ, равным -1 . При приближении пучка к плоскости, на которой радиусы перетяжек становятся равны, вихри с ТЗ, равным -1 , со скоростью больше скорости света «уходят» на бесконечность, и ТЗ пучка становится равен n . Причем зависимость радиуса, на котором расположены вихри, от расстояния z может быть аппроксимирована функцией $R \sim 1/z$ с точностью до коэффициентов. Если, наоборот, радиус перетяжки пучка с номером $(0, m)$ меньше, то ТЗ пучка от начальной плоскости до плоскости, на которой радиусы перетяжек одинаковы, равен n , а после этой плоскости ТЗ суперпозиции равен m . В этом случае наоборот, после данной плоскости из бесконечности со скоростью больше скорости света «приходят» $n-m$ вихрей с ТЗ, равным -1 .

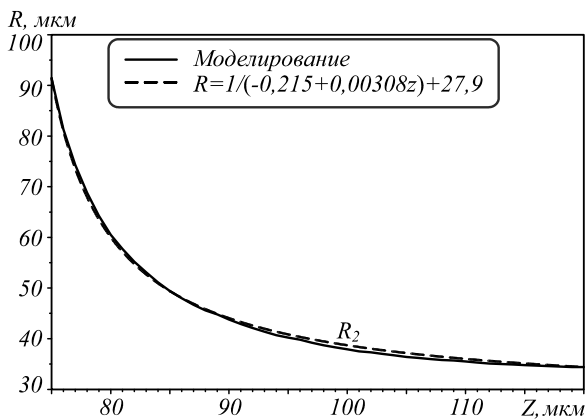


Рис. 8. Сравнение радиуса перехода R_2 , на котором находятся три оптических вихря с ТЗ, равным -1 каждый, полученного в результате расчёта по формуле (10) и по формуле (12)

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-29-20003, в теоретической части), а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках выполнения работ по Государственному заданию ФНИЦ «Кристаллография и фотоника» РАН в части моделирования.

Литература

1. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes / L. Allen, M. Beijersbergen, R. Spreeuw, J. Woerdman // *Physical Review A*. – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – 8185.
2. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of asymmetric optical vortices / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28, Issue 14. – P. 20449-20460. – DOI: 10.1364/OE.394273.
3. **Soskin, M.S.** Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex / M.S. Soskin, V.N. Gorshkov, M.V. Vastnetsov, J.T. Malos, N.R. Heckenberg // *Physical Review A*. – 1997. – Vol. 56, Issue 5. – P. 4064-4075.
4. **Berry, M.V.** Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps / M.V. Berry // *Journal of Optics A: Pure and Applied Optics*. – 2004. – Vol. 6, Issue 2. – P. 259-268.
5. **Gotte, J.B.** Quantum formulation of fractional orbital angular momentum / J.B. Gotte, S. Franke-Arnold, R. Zambrini, S.M. Barnett // *Journal of Modern Optics*. – 2007. – Vol. 54, Issue 12. – P. 1723-1738.
6. **Jesus-Silva, A.J.** Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone / A.J. Jesus-Silva, E.J.S. Fonseca, J.M. Hickmann // *Optics Letters*. – 2012. – Vol. 37, Issue 21. – P. 4552-4554.
7. **Wen, J.** Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams / J. Wen, L. Wang, X. Yang, J. Zhang, S. Zhu // *Optics Express*. – 2019. – Vol. 27, Issue 4. – P. 5893-5904.
8. **Kotlyar, V.V.** Evolution of an optical vortex with an initial fractional topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.G. Nalimov, A.P. Porfirev // *Physical Review A*. – 2020. – Vol. 102, Issue 2. – P. 023516. – DOI: 10.1103/PhysRevA.102.023516.
9. **Basistiy, I.V.** Optical wavefront dislocations and their properties / I.V. Basistiy, M.S. Soskin, M.V. Vastnetsov // *Optics Communications*. – 1995. – Vol. 119. – P. 604-612.
10. **Alexeyev, C.N.** Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices / C.N. Alexeyev, Yu.A. Egorov, A.V. Volyar // *Physical Review A*. – 2017. – Vol. 96. – P. 063807.
11. **Зельдович, Б.Я.** Получение светового «зайчика», движущегося в вакууме с произвольной скоростью / Б.Я. Зельдович, Н.Д. Кундикова, Ф.В. Подгорнов, Л.Ф. Рогачева // *Квантовая электроника*. – 1996. – Т. 23, № 12. – С. 1128-1130.
12. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Optics Express*. – 2020. – Vol. 28, Issue 6. – P. 8266-8281. – DOI: 10.1364/OE.386401.

Сведения об авторах

Сведения об авторах **Котляр Виктор Викторович Ковалёв Алексей Андреевич, Налимов Антон Геннадьевич** – см. стр 652-653 этого номера.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 17 февраля 2021 г. Окончательный вариант – 6 апреля 2021 г.

Optical phase singularities and superluminal motion in unbounded space

V.V. Kotlyar^{1,2}, A.A. Kovalev^{1,2}, A.G. Nalimov^{1,2}

¹ IPIS RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, 443001, Samara, Russia, Molodogvardeyskaya 151, ² Samara National Research University, 443086, Samara, Russia, Moskovskoye Shosse 34

Abstract

In this paper, we summarize a remarkable result obtained by Soskin et al. in Phys Rev A 56, 4064 (1997). We show that for an on-axis superposition of two different-waist Laguerre-Gauss beams with numbers $(0, n)$ and $(0, m)$, the topological charge equals $TC=m$ up to a plane where the waist radii become the same, given that the beam $(0, m)$ has a greater waist radius, changing to $TC=n$ after this plane. This occurs because in the initial plane the superposition has an on-axis optical vortex with $TC=m$ and on different axis-centered circles there are $(n-m)$ vortices with $TC=+1$ and $(n-m)$ vortices with $TC=-1$. On approaching the above-specified plane, the vortices with $TC=-1$ "depart" to infinity with a higher-than-light speed, with the TC of the total beam becoming equal to $TC=n$. If, on the contrary, the beam $(0, m)$ has a smaller waist, then the total TC equals n on a path from the initial plane up to a plane where the waist radii become the same, changing to $TC=m$ after the said plane. This occurs because after the said plane, $n-m$ vortices with $TC=-1$ "arrive" from infinity with a higher-than-light speed.

Keywords: optical vortex, hidden phase, screw dislocation, topological charge.

Citation: Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG. Optical phase singularities and superluminal motion in unbounded space. Computer Optics 2021; 45(5): 654-660. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-879.

Acknowledgements: The work was partly funded by the Russian Foundation for Basic Research under grant #18-29-20003 (theoretical analysis) and the RF Ministry of Science and Higher Education within a state contract with the "Crystallography and Photonics" Research Center of the RAS (numerical simulation).

References

- | | |
|--|--|
| <p>[1] Allen L, Beijersbergen M, Spreeuw R, Woerdman J. Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys Rev A 1992; 45: 8185.</p> <p>[2] Kotlyar VV, Kovalev AA. Topological charge of asymmetric optical vortices. Opt Express, 2020; 28(14): 20449-20460. DOI: 10.1364/OE.394273.</p> <p>[3] Soskin MS, Gorshkov VN, Vastnetsov MV, Malos JT, Heckenberg NR. Topological charge and angular momentum of light beams carrying optical vortex. Phys Rev A 1997; 56(5): 4064-4075.</p> <p>[4] Berry MV. Optical vortices evolving from helicoidal integer and fractional phase steps. J Opt A-Pure Appl Opt 2004; 6(2): 259-268.</p> <p>[5] Gotte JB, Franke-Arnold S, Zambrini R, Barnett SM. Quantum formulation of fractional orbital angular momentum. J Mod Opt 2007; 54(12): 1723-1738.</p> <p>[6] Jesus-Silva AJ, Fonseca EJS, Hickmann JM. Study of the birth of a vortex at Fraunhofer zone. Opt Lett 2012; 37(21): 4552-4554.</p> | <p>[7] Wen J, Wang L, Yang X, Zhang J, Zhu S. Vortex strength and beam propagation factor of fractional vortex beams. Opt Express 2019; 27(4): 5893-5904.</p> <p>[8] Kotlyar VV, Kovalev AA, Nalimov AG, Porfirev AP. Evolution of an optical vortex with an initial fractional topological charge. Phys Rev A 2020; 102(2): 023516. 10.1103/PhysRevA.102.023516.</p> <p>[9] Basistiy IV, Soskin MS, Vassetsov MV. Optical wavefront dislocations and their properties. Opt Commun 1995; 119: 604-612.</p> <p>[10] Alexeyev CN, Egorov YuA, Volyar AV. Mutual transformations of fractional-order and integer-order optical vortices. Phys Rev A 2017; 96: 063807.</p> <p>[11] Zeldovich BYa, Kundikova ND, Podgornov FV, Rogacheva LF. Formation of a 'light flash' moving at an arbitrary velocity in vacuum. Quantum Electronics 1996; 23(12): 1097-1099.</p> <p>[12] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. Opt Express 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.</p> |
|--|--|

Authors' information

Victor Victorovich Kotlyar is a head of Laboratory at the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS and professor of Computer Science department at Samara National Research University. He received his MS, PhD and DrSc degrees in Physics and Mathematics from Samara State University (1979), Saratov State University (1988) and Moscow Central Design Institute of Unique Instrumentation, the Russian Academy of Sciences (1992). He is SPIE- and OSA-member. He is co-author of 300 scientific papers, 5 books and 7 inventions. His current interests are diffractive optics, gradient optics, nanophotonics, and optical vortices. E-mail: kotlyar@smr.ru.

Alexey Andreevich Kovalev (b. 1979), graduated (2002) from Samara National Research University, majoring in Applied Mathematics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2012. He is a senior researcher of Laser Measurements laboratory at IPSI RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS. He is a co-author of more than 150 scientific papers. His current research interests are mathematical diffraction theory and photonic crystal devices. E-mail: alanko@smr.ru.

Anton Gennadyevich Nalimov (b. 1980), graduated from Samara State Aerospace University in February, 2003. Entered in postgraduate study in 2003 on speciality 05.13.18 “Mathematical Modeling and Program Complexes”, finished it in 2006 with speciality 01.04.05 “Optics”. A.G. Nalimov works on Technical Cybernetics department in Samara National Research University as an associate professor, works as a scientist in the Image Processing Systems Institute of RAS – Branch of the FSRC “Crystallography and Photonics” RAS, Samara, Russia. Candidate in Physics and Mathematics, coauthor of 100 papers and 3 inventions. E-mail: anton@smr.ru.

Received February 17, 2021. The final version – April 6, 2021.
