

Цифровая сортировка пучков Эрмита–Гаусса: анализ спектра мод и топологический заряд возмущённого пучка Лагерра–Гаусса

А.В. Воляр¹, Е.Г. Абрамочкин², Ю.А. Егоров¹, М.В. Брецько¹, Я.Е. Акимова¹

¹ КФУ им. В.И. Вернадского, Физико-технический институт,

295007, Россия, Республика Крым, г. Симферополь, проспект Академика Вернадского, д. 4,

² Самарский филиал федерального государственного бюджетного учреждения науки Физического института имени П.Н. Лебедева Российской академии наук (СФ ФИАН),

443011, Россия, г. Самара, ул. Ново-Садовая, д. 221

Аннотация

Разработан и реализован экспериментально метод измерения спектров амплитуд и начальных фаз и топологического заряда пучков Лагерра–Гаусса в базисе мод Эрмита–Гаусса. Теоретически обоснован и воплощён на эксперименте метод измерения топологического заряда невозмущённых пучков Лагерра–Гаусса с различными значениями радиальных и азимутальных чисел посредством астигматического преобразования на цилиндрической линзе. Показано, что измеренные спектры мод Эрмита–Гаусса позволяют определить орбитальный угловой момент и топологический заряд, а также осуществить цифровую сортировку мод Эрмита–Гаусса с последующим восстановлением реального сингулярного пучка.

Ключевые слова: дифракционная оптика, орбитальный угловой момент, моменты интенсивности.

Цитирование: Воляр, А.В. Цифровая сортировка пучков Эрмита–Гаусса: анализ спектра мод и топологический заряд возмущённого пучка Лагерра–Гаусса / А.В. Воляр, Е.Г. Абрамочкин, Ю.А. Егоров, М.В. Брецько, Я.Е. Акимова // Компьютерная оптика. – 2020. – Т. 44, № 4. – С. 501-509. – DOI: 10.18287/2412-6179-CO-747.

Citation: Volyar AV, Abramochkin EG, Egorov YuA, Bretsko MV, Akimova YaE. Digital sorting of Hermite-Gauss beams: mode spectra and topological charge of a perturbed Laguerre-Gauss beam. Computer Optics 2020; 44(4): 501-509. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-747.

Введение

Ключевая роль в решении проблем сингулярной оптики отводится экспериментальному анализу вихревой структуры лазерных пучков и их устойчивости к внешним возмущениям. Наиболее простым и надёжным подходом является метод голографического формирования лазерных пучков на основе дифракционных элементов, предложенный Сойфером и Голубом [1] ещё в середине 80-х и детально развитый для сортировки вихревых мод как по радиальным, так и по азимутальным числам в ряде статей (см., например, [2–5]). В дальнейшем были предложены и другие подходы к сортировке вихревых пучков, использующие специальные фазовые элементы [6], модуляторы [7] и интерферометры [8]. Несмотря на множество преимуществ дифракционных методов, они предполагают нарушение внутренней структуры волнового фронта, приводящее к потере информации об исходном фазовом составе комбинированных вихревых пучков.

С другой стороны, в недавних статьях [9–12] был предложен специальный метод измерения спектров мод Лагерра–Гаусса (ЛГ) и их сортировки на основе анализа моментов интенсивности, позволяющих измерять как амплитуды, так и фазы мод. Цифровой анализ моментов интенсивности обеспечивает сортировку ЛГ-мод по ячейкам памяти компьютера, что также позволяет устранять нежелательный оптиче-

ский шум и вновь восстанавливать сложный вихревой пучок. Однако спектр ЛГ-мод не может охватить разнообразие возмущений даже простых вихревых пучков. Особенно это касается слабых локальных возмущений окрестности сердцевин оптических вихрей, которые могут вызвать лавину оптических вихрей [13] или возмущений в вырожденных парах сингулярных пучков с дробным топологическим зарядом [14], спектр которых содержит только два оптических вихря. В статье [15] рассмотрено уникальное свойство стабильности топологического заряда (ТЗ) вихревого пучка в среде с радиально-симметричными случайными фазовыми возмущениями. Осуществлять измерения и контроль модового состава таких пучков обычными методами чрезвычайно сложно, в то время как единственным надёжным маркером их состояния является топологический заряд. Расширить возможности анализа сложных вихревых пучков позволяют измерения вихревых спектров в терминах мод Эрмита–Гаусса (ЭГ). Например, в работе [16] авторы воплотили конверсию ЛГ-пучков с нулевым радиальным числом в ЭГ-моды на астигматическом элементе (см., например, [17–20]) для измерения величины ТЗ без разрушения их внутренней структуры. В то же время цифровая обработка распределения интенсивности на основе метода моментов интенсивности позволяет рассортировать амплитуды и начальные фазы ЭГ-мод по компьютерным ячейкам памяти, а затем

либо воспроизвести реальную сортировку ЭГ-мод, либо вновь восстановить исходный пучок, избавившись от внешних шумов. Именно эта проблема обсуждается в нашей статье. Таким образом, целью данной работы является теоретический и экспериментальный анализ процесса измерения амплитуд и начальных фаз спектральных ЭГ-компонент возмущённых ЛГ-пучков с помощью техники моментов интенсивности. Но прежде чем перейти к детальному анализу этой проблемы, используем метод астигматических преобразований для измерения топологического заряда невозмущённого ЛГ-пучка с произвольными радиальными и азимутальными числами.

1. Предварительные замечания: измерение топологического заряда ЛГ-пучков

Напомним, что авторы работы [16] предложили и воплотили сравнительно простой и надёжный метод измерения топологического заряда (ТЗ) $\ell = 0, 1, 2, \dots$ посредством астигматического преобразования ЛГ-пучков с нулевым радиальным числом $n = 0$ с помощью единственной цилиндрической линзы. На основе решения дифракционной задачи было показано, что в плоскости двойного фокуса f цилиндрической линзы формируется распределение интенсивности поля, соответствующее ЭГ-моду с комплексным аргументом. Вдоль осей астигматизма $\varphi = 135^\circ$ (для положительного ТЗ $\ell > 0$) и $\varphi = 45^\circ$ (для отрицательного ТЗ $\ell < 0$) число нулей ЭГ-пучка оказывается равным топологическому заряду ЛГ-пучка ℓ . Заметим, что при условии $z_0/2f = 1$ ($z_0 = kw_0^2/2$ – длина Рэлея, w_0 – радиус перетяжки Гауссова пучка в плоскости цилиндрической линзы, k – волновое число) аргумент ЭГ-пучка становится действительным.

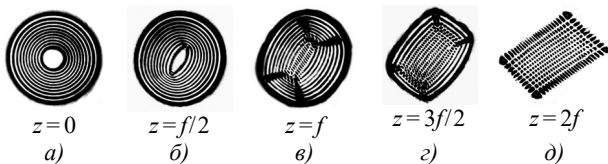


Рис. 1. Астигматическое преобразование ЛГ-пучка с топологическим зарядом $\ell = -15$ и радиальным числом $n = 10$ цилиндрической линзой с $f = 18$ см на длине двойного фокусного расстояния (эксперимент). В промежутке между плоскостями $z = 0$ и $z = 2f$ формируются ЭЛГ-модовые состояния (инвертированные изображения)

В данном параграфе мы распространим этот подход на произвольный случай радиального числа $n \neq 0$. Прежде всего, заметим, что в астигматической системе моды Лагерра–Гаусса или моды Эрмита–Гаусса реализуются только в отдельных поперечных сечениях лазерного пучка. В остальной области распространения принято говорить об ортогональных состояниях в виде мод Эрмита–Лагерра–Гаусса (ЭЛГ) [17, 18]. Эволюция ЭЛГ-пучка между исходным состоянием ЛГ-пучка на цилиндрической линзе в плоскости $z = 0$ и его конверсией в ЭГ-пучок в плоскости двойного

фокуса $z = 2f$ показана на примере экспериментальных распределений интенсивности на рис. 1 (см. также параграф 3). Для описания процесса измерения топологического заряда запишем сначала комплексные амплитуды ЛГ-и ЭГ-пучков:

$$\begin{aligned} \text{LG}_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) &= \exp(-r^2) r^\ell e^{\pm i\ell\varphi} L_n^\ell(2r^2), \\ \text{HG}_{n,m}(\mathbf{r}) &= \exp(-r^2) H_n(\sqrt{2}x) H_m(\sqrt{2}y), \end{aligned} \tag{1}$$

где $n \geq 0, m \geq 0, \ell \geq 0, \mathbf{r} = (x, y) = (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$, r и φ – радиальная и азимутальная координаты, $H_n(\bullet)$ и $L_n^\ell(\bullet)$ – многочлены Эрмита и Лагерра соответственно. Здесь и далее мы используем для простоты безразмерные координаты (x, y, z) . Переход к размерным координатам (X, Y, Z) осуществляется заменой $(X, Y, Z) = (w_0x, w_0y, z_0z)$.

Известно [17] (см. также [19]), что ЭГ- и ЛГ-пучки являются частными представителями параметрического семейства ЭЛГ-пучков $\text{HGL}_{n,m}(\mathbf{r}|\alpha)$, когда параметр α принимает значения $0, \pi/4$ и $\pi/2$:

$$\begin{aligned} \text{HGL}_{n,m}(\mathbf{r} | 0) &= (-i)^m \text{HG}_{n,m}(\mathbf{r}), \\ \text{HGL}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/2) &= i^n \text{HG}_{m,n}(\mathbf{r}), \\ \text{HGL}_{n+m,n}(\mathbf{r} | \pi/4) &= (-1)^n 2^{n+m} n! \cdot \text{LG}_{n,m}(\mathbf{r}), \\ \text{HGL}_{n,n+m}(\mathbf{r} | \pi/4) &= (-1)^n 2^{n+m} n! \cdot \text{LG}_{n,-m}(\mathbf{r}). \end{aligned} \tag{2}$$

Можно объединить последние два равенства в одно:

$$\begin{aligned} \text{HGL}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4) &= \\ &= (-1)^{\min} 2^{\max} (\min)! \cdot \text{LG}_{\min, n-m}(\mathbf{r}), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\min = \min(n, m)$, $\max = \max(n, m)$. Таким образом, знак и величина ТЗ определяются разностью индексов ЭЛГ-моды: $\ell = n - m$. Рассмотрим теперь ЛГ-пучок (3) в плоскости цилиндрической линзы [17]. Сразу после астигматического элемента ($z = 0$) он принимает вид

$$\begin{aligned} \text{HGL}_{n,m}^{(\text{ast})}(\mathbf{r}, z = 0 | \pi/4) &= \\ &= \exp\left(i\left[c_x x^2 + c_y y^2\right]\right) \text{HGL}_{n,m}(\mathbf{r} | \pi/4). \end{aligned} \tag{4}$$

Параметры c_x и c_y характеризуют астигматический элемент и в нашем случае при ориентации оси астигматизма вдоль оси x записываются как

$$c_x = -z_0/f = -2, \quad c_y = 0. \tag{5}$$

Распространение ЭЛГ-пучка (4) вдоль оси z найдём с помощью преобразования Френеля:

$$\Psi_{n,m}(\mathbf{r}, z) = \text{FR}_z \left[\text{HGL}_{n,m}^{(\text{ast})}(\mathbf{r}, z = 0 | \pi/4) \right].$$

Воспользуемся формулой (18) из [17] и, опуская промежуточные вычисления, сразу запишем ответ:

$$\begin{aligned} \Psi_{n,m}(\mathbf{r}, z) &= \frac{1}{\sqrt{|\sigma_x \sigma_y|}} \exp[i\psi(\mathbf{r}) + i\psi_0] \times \\ &\times \text{HGL}_{n,m}(\mathbf{r}_1 | \pi/4 - \omega), \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{\arg \sigma_y - \arg \sigma_x}{2}, \quad \sigma_x = 1 + (c_x + i)z, \\ \sigma_y &= 1 + (c_y + i)z \quad \mathbf{r}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{|\sigma_x|} + \frac{y}{|\sigma_y|}, \frac{y}{|\sigma_y|} - \frac{x}{|\sigma_x|} \right), \\ \psi(\mathbf{r}) &= \frac{c_x + (1 + c_x^2)z}{|\sigma_x|^2} x^2 + \frac{c_y + (1 + c_y^2)z}{|\sigma_y|^2} y^2, \\ \psi_0 &= (n - m) \frac{\pi}{4} - (n + m + 1) \frac{\arg \sigma_x + \arg \sigma_y}{2}. \end{aligned} \quad (7)$$

В нашем случае плоскость наблюдения совпадает с плоскостью двойного фокуса цилиндрической линзы, $Z = 2f$, поэтому $z = 2f/z_0 = 1$ и

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \sqrt{2}e^{i3\pi/4}, \quad \sigma_y = \sqrt{2}e^{i\pi/4}, \\ \mathbf{r}_1 &= \frac{(x + y, y - x)}{2}, \quad \psi(\mathbf{r}) = \frac{3x^2 + y^2}{2}, \\ \psi_0 &= -\frac{\pi}{4}(n + 3m + 2), \quad \omega = -\frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (8)$$

Подставляя найденные параметры в (6) и, возвращаясь от ЭЛГ-мод к записи через ЛГ- и ЭГ-моды, получаем, что ЛГ-пучок в плоскости двойного фокуса цилиндрической линзы превращается в ЭГ-пучок:

$$\begin{aligned} \text{LG}_{n,\pm\ell}(x, y) &\rightarrow \frac{i^{n-1} e^{-i\pi(1\mp 2)\ell/4}}{2^{n+\ell+1/2} n!} \times \\ &\times \exp\left(i \cdot \frac{3x^2 + y^2}{2}\right) \text{HG}_{n+\ell, n}\left(\frac{y \mp x, y \pm x}{2}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

В промежутке между исходной плоскостью $Z = 0$ и плоскостью двойного фокуса цилиндрической линзы $Z = 2f$ формируются ЭЛГ-состояния. Процесс трансформации ЭЛГ-мод иллюстрируют экспериментальные распределения интенсивностей ЭЛГ-мод на рис. 1 (см. параграф 3).

Из полученного выражения следует, что ЛГ-пучок с положительным топологическим зарядом, $\text{LG}_{n,\ell}(\mathbf{r})$, преобразуется в ЭГ-пучок таким образом, что вдоль направления $\varphi = 135^\circ$ располагается $n + \ell$ нулей интенсивности, а вдоль направления $\varphi = 45^\circ$ располагается n нулей интенсивности, в то время как для пучка с отрицательным топологическим зарядом, $\text{LG}_{n,-\ell}(\mathbf{r})$, вдоль направления $\varphi = 135^\circ$ имеем n нулей интенсивности, а вдоль направления $\varphi = 45^\circ$ расположено $n + \ell$ нулей. На рис. 2 представлено астигматическое преобразование ЛГ-пучка на цилиндрической линзе, которое относительно просто реализуется на практике и может служить примером экспресс-метода определения величины топологического заряда. В нашем эксперименте мы использовали цилиндрическую линзу с фокусным расстоянием $f = 18$ см (см. параграф 3). Простой подсчёт числа нулей интенсивности n и $n + \ell$ в распределении интенсивности ЭГ-пучков на рис. 2г, д, е вдоль направлений

$\varphi = 45^\circ$ и $\varphi = 135^\circ$ позволяет найти топологический заряд ℓ и число кольцевых дислокаций n . Однако нерегулярности в распределении интенсивности ЭГ-пучков на рис. 2г, д, е указывают на сложный модовый состав, несмотря на определённый топологический заряд, который задаёт его тонкую структуру. Именно эту проблему мы постараемся раскрыть в следующем параграфе.

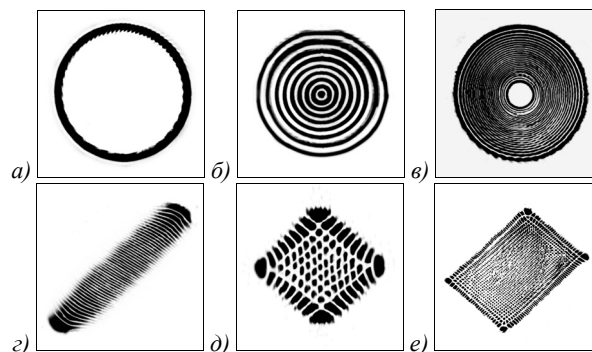


Рис. 2. Экспериментальное распределение интенсивностей ЛГ-пучков с индексами $(0, -50)$ (а), $(8, 0)$ (в) и $(25, -25)$ (д) до (а, в, г) и после (б, г, е) цилиндрической линзы с $f = 18$ см (инвертированные изображения)

2. Тонкая структура пучков Лагерра–Гаусса в базе мод Эрмита–Гаусса

В этом параграфе мы коснемся проблемы измерения тонкой структуры возмущённых пучков Лагерра–Гаусса на основе моментов интенсивности в базе мод Эрмита–Гаусса. Подход моментов интенсивности хорошо зарекомендовал себя при описании процессов возмущения вихревых пучков различными непрозрачными препятствиями, где было достаточно учитывать только события рождения-уничтожения оптических вихрей с различными топологическими зарядами, не затрагивая вопрос рождения мод с различными радиальными числами. Однако, как мы упоминали в предыдущем параграфе, малые возмущения, например, голографической решётки, или неточная юстировка лазерного пучка на голографическом элементе могут вызвать существенные изменения структуры вихревых пучков высших порядков, хотя их топологический заряд не изменяется. Простой моделью таких возмущений может служить вариация амплитуд ЭГ-мод в спектре ЛГ-пучка.

Запишем комплексную амплитуду ЛГ-пучка в виде суммы ЭГ-мод [17, 18]

$$\begin{aligned} \text{LG}_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) &= \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \times \\ &\times \sum_{k=0}^{2n+\ell} (\pm 2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \text{HG}_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$P_k^{(n-k, m-k)}(0) = \frac{(-1)^k}{2^k k!} \frac{d^k}{dt^k} \left\{ (1-t)^n (1+t)^m \right\} \Big|_{t=0} \quad (11)$$

– многочлен Якоби с нулевым аргументом.

Выражение (10) описывает ЛГ-пучок с ТЗ ($\pm\ell$). Изменение знака ТЗ соответствует изменению знака перед мнимой единицей в правой части (10). Отметим также, что ЛГ-и ЭГ-моды в (10) не нормированы.

Будем рассматривать такие возмущения ЛГ-пучка, которые оставляют постоянным состав ЭГ-мод в суперпозиции (10). Мы выбрали две модели возмущения, удовлетворяющие этому требованию. Первая модель – жёсткое возмущение – позволяет резко изменять амплитуды ЭГ-мод и имеет вид

$$LG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}, \varepsilon, \nu) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \times \sum_{k=0}^{2n+\ell} (1 - \varepsilon P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(\nu)) \times (\pm 2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) HG_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r}), \quad (12)$$

где ε и ν – управляющие параметры возмущения.

Вторая модель – мягкое возмущение – слабо изменяет амплитуды ЭГ-мод при изменении возмущения:

$$LG_{n,\pm\ell}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell} \varepsilon_k \times (\pm 2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) HG_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r}), \quad (13)$$

где

$$\varepsilon_k = 1 - \varepsilon(-1)^k \sin \frac{\pi k}{2}. \quad (14)$$

Характерное распределение интенсивности пучка в жёстком режиме возмущения показано на рис. 3.

В этом случае второй член в круглых скобках в (12) быстро подавляет первый член, и волновая система слабо реагирует на возмущения. Характеристики второй модели (13) оказались более приемлемыми для наших исследований, поскольку система откликается на возмущение в широком диапазоне изменения управляющего параметра ε . Разнообразие режима возмущения для этого случая показано на рис. 4.

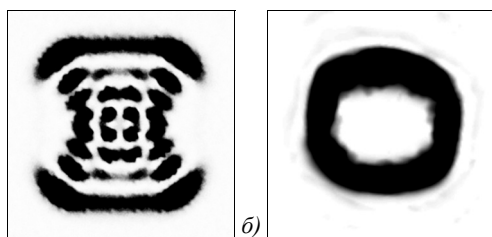


Рис. 3. Экспериментальное распределение интенсивности ЛГ-пучка с индексами (0, 10) в жёстком режиме возмущения (12) с параметрами $\varepsilon = 0, 1$, $\nu = 0, 2$ (а) и $\varepsilon = 0, 1$, $\nu = 0, 4$ (б) (инвертированные изображения)

Удобно выделить три области возмущения ε : 1) малые значения параметра $\varepsilon \ll 1$, когда возмущение расщепляет осевой вихрь высшего порядка на единичные вихри (рис. 4а, г, ж), а ТЗ пучка не изменяется; 2) режим $\varepsilon \sim 1$, когда рождаются топологические диполи

(вихри с противоположными знаками ТЗ) и быстро изменяется ОУМ, а ТЗ всего пучка может менять знак (рис. 4б, д, з); 3) режим $\varepsilon \gg 1$, когда основной вклад вносит второе слагаемое в (14), а ОУМ монотонно стремится к нулю (рис. 4в, е, и) и, как мы покажем далее, ТЗ пучка не изменяется. При жёстком возмущении три такие области стираются из-за осцилляций многочлена Якоби при изменении его аргумента ν .

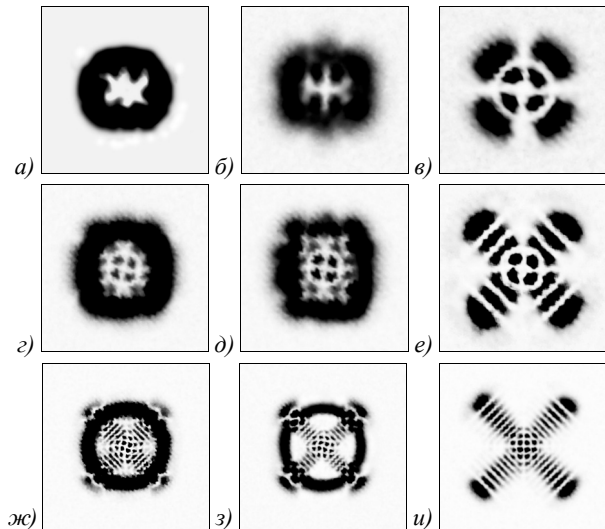


Рис. 4. Распределение интенсивности возмущённого ЛГ-пучка с индексами (0, 4) (а, б, в), (0, 8) (г, д, е) и (0, 20) (ж, з, и) в плоскости растяжки для возмущения $\varepsilon = 0, 5$ (а, г, ж), $\varepsilon = 1$ (б, д, з) и $\varepsilon = 50$ (в, е, и) (инвертированные изображения)

Наглядное представление режимов возмущения иллюстрирует рис. 5 на примере дифракционных решёток на рабочем элементе пространственного модулятора света (SLM), формирующего ЛГ-пучок с исходным ТЗ $\ell = 8$. Заметим, что возмущение располагается в окрестности сердцевины вихря. Отношение площади участка возмущения к рабочей площади SLM-матрицы менялось от 0,03 до 0,04.

Небольшое возмущение $\varepsilon = 0, 01$ расщепляет оптический вихрь высокого порядка на единичные вихри (рис. 5б). Возрастание возмущения (рис. 5в) приводит к формированию топологических диполей, а при очень большом параметре возмущения (рис. 5г) формируется система краевых дислокаций в виде вложенных квадратов и две краевые дислокации вдоль осей x и y .

Теперь рассмотрим проблему регистрации спектра ЭГ-мод для режима мягкого возмущения ЛГ-пучка с теоретической точки зрения. Как и в случае измерения спектров ЛГ-мод [9, 10], в нашем случае основой изучения спектров ЭГ-мод будет анализ распределения интенсивности возмущённого ЛГ-пучка:

$$LG_{n,\ell}^{(ex)}(\mathbf{r}, z = 0) = \sum_{k=0}^{2n+\ell} e^{i\beta_k} C_{2n+\ell-k, k} HG_{2n+\ell-k, k}(\mathbf{r}), \quad (15)$$

$$\mathfrak{I}_{n,\ell}(\mathbf{r}) = |LG_{n,\ell}^{(ex)}(\mathbf{r}, z = 0)|^2,$$

где $C_{2n+\ell-k,k}$ – действительные амплитуды, включающие параметр возмущения ε_k , и β_k – начальные фазы ЭГ-мод.

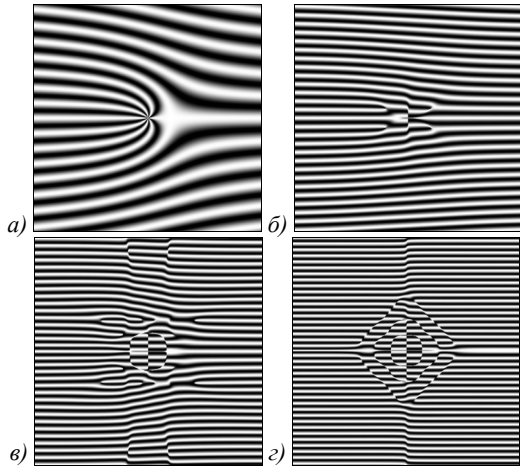


Рис. 5. Дифракционные решетки возмущённого ЛГ-пучка с индексами (0,8) и параметром возмущения $\varepsilon = 0$ (а), $\varepsilon = 0,01$ (б), $\varepsilon = 1$ (в) и $\varepsilon = 20$ (г)

Для анализа представим распределение интенсивности (15) в терминах моментов интенсивности в соответствии с нашей работой [10]

$$J_{p,q} = \frac{1}{J_{00}} \iint_{\mathbb{R}^2} M_{p,q} \mathfrak{Z}_{n,\ell}(x,y) dx dy, \quad (16)$$

где $M_{p,q}$ – функция моментов, J_{00} – интенсивность возмущённого ЛГ-пучка,

$$J_{00} = \sum_{k=0}^{2n+\ell} |C_{2n+\ell-k,k}|^2 j_k,$$

j_k – элементы ЭГ-базиса. Моменты интенсивности $J_{p,q}$ измеряются в эксперименте и являются действительными величинами. Функцию моментов следует выбирать таким образом, чтобы из (16) можно было получить две независимых системы линейных уравнений для квадратов амплитуд и перекрёстных членов для различных чисел p и q . Можно показать, что этому требованию отвечает функция моментов в виде

$$M_{p,q} = H_p(\sqrt{2}x)H_q(\sqrt{2}y). \quad (17)$$

В такой записи функции моментов элементы ЭГ-базиса определяются интегралом

$$j_n = \int_{\mathbb{R}} e^{-2x^2} H_p(\sqrt{2}x)H_m(\sqrt{2}x)H_n(\sqrt{2}x)dx = \frac{2^{(p+m+n-1)/2} \sqrt{\pi} p! m! n!}{(\frac{1}{2}N-p)! (\frac{1}{2}N-m)! (\frac{1}{2}N-n)!}, \quad (18)$$

при условии, что $N=n+m+p=0, 2, 4, \dots$ и индексы m, n, p удовлетворяют неравенству треугольника (т.е. сумма любых двух индексов не может быть больше третьего). В остальных случаях интеграл обращается в ноль.

Для интенсивности пучка J_{00} индекс $p=0$ из (18) становится условием ортогональности ЭГ-мод.

Рассмотрим процесс измерения спектров возмущённых ЛГ-пучков с топологическим зарядом $\ell=4$ и нулевым радиальным числом $n=0$. Как мы уже отмечали, моменты интенсивности (16) измеряются на эксперименте. Элементы ЭГ-базиса нетрудно вычислить. Поэтому задача нахождения спектральных амплитуд $C_{2n+\ell-k,k}$ и их фаз β_k сводится к составлению $2(\ell+1)$ линейных уравнений для амплитуд, косинусов и синусов разности фаз. Заметим, что уравнения для квадратов амплитуд и фаз можно разделить. Однако при решении уравнений для разности фаз необходимо учитывать квадраты амплитуд. Чтобы записать уравнения для квадратов амплитуд, выберем только чётные индексы $p=2, 4, 6, 8, q=0$ и $p=0, q=2, 4, 6, 8$. В результате получим систему линейных уравнений для квадратов амплитуд:

$$\begin{aligned} J_{0,2} &= 16C_{0,4}^2 + 12C_{1,3}^2 + 8C_{2,2}^2 + 4C_{3,1}^2, \\ J_{0,4} &= 48C_{2,2}^2 + 144C_{1,3}^2 + 288C_{4,0}^2, \\ J_{0,6} &= 960C_{1,3}^2 + 3840C_{0,4}^2, \\ J_{0,8} &= 2680C_{0,4}^2, \\ J_{8,0} &= 2680C_{4,0}^2, \\ J_{6,0} &= 3840C_{4,0}^2 + 960C_{3,1}^2. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученная система уравнений позволяет найти все квадраты амплитуд возмущённого пучка. Для определения перекрёстных членов с синусами и косинусами разностей фаз $\beta_{kj} = \beta_k - \beta_j$ выберем только чётные и только нечётные p и q индексы

$$\begin{aligned} J_{2,2} &= 48C_{1,3}^2 + 65C_{2,2}^2 + 48C_{3,1}^2 - \\ &\quad - 16\sqrt{6}C_{4,0}C_{2,2} \cos\beta_{0,2} + \\ &\quad + 48C_{1,3}C_{3,1} \cos\beta_{1,3} + 16\sqrt{6}C_{0,4}C_{2,2} \cos\beta_{2,4}, \\ J_{4,2} &= 384C_{2,2}^2 + 576C_{3,1}^2 + \\ &\quad + 256\sqrt{6}C_{4,0}C_{2,2} \cos\beta_{0,2} + \\ &\quad + 384C_{1,3}C_{3,1} \cos\beta_{1,3}, \\ J_{6,2} &= 3840C_{3,1}^2 + 1920\sqrt{6}C_{4,0}C_{2,2} \cos\beta_{0,2}, \\ J_{7,1} &= 13440C_{3,1}C_{4,0} \cos\beta_{0,1}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение системы уравнений (20) имеет некоторую специфику, поскольку уравнения содержат как квадраты амплитуд, так и амплитуды. Мы выбирали амплитуды ЭГ-мод как положительные вещественные величины, поэтому их можно найти из уравнений (19), а фазы β_k учитывают знаки членов амплитуд. Чтобы из уравнений (20) найти фазы, достаточно положить $\beta_0=0$, откуда находим начальные фазы $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ и β_4 .

Процесс измерения спектров ЛГ-мод подробно обсуждался в наших статьях [9–12]. В случае измерения спектров ЭГ-мод и ОУМ схема экспериментальной установки не изменилась (см. рис. 1 в [9] и рис. 10 в [14]). Анализ моментов интенсивности $J_{p,q}$ осуществлялся в плоскости перетяжки возмущённого пучка. На рис. 6 приведены типичные спектры квадратов амплитуд и начальных фаз.

Для сравнения там же приведены теоретические спектры, рассчитанные в соответствии с выражением (13). Небольшое рассогласование теории и эксперимента демонстрирует относительную ошибку измерений $\Delta C^2 \approx 3\%$, $\Delta \beta^2 \approx 6\%$. Заметим, что ошибка измерений начальных фаз существенно зависит от точности измерений спектра квадратов амплитуд. Фактически, проведённые измерения осуществляли цифровую сортировку ЭГ-мод с учётом их амплитуд и начальных фаз. При необходимости можно восстановить весь возмущённый пучок, избавившись от паразитных шумов.

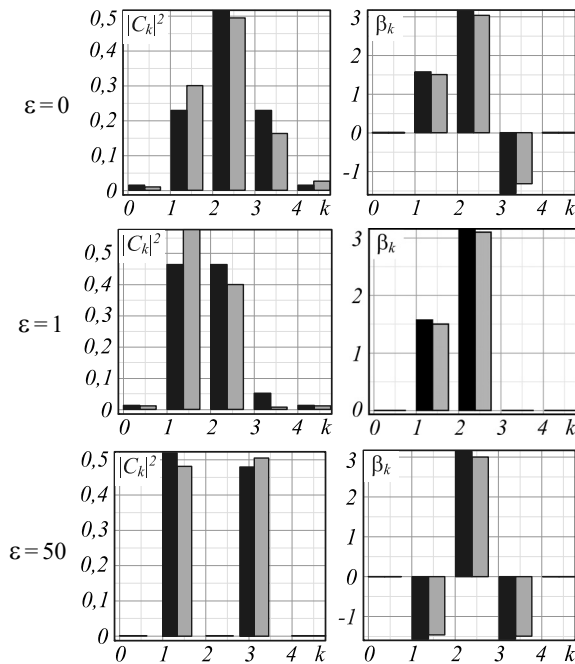


Рис. 6. Квадраты амплитуд $|C_k|^2$ и начальные фазы β_k ЭГ-мод в спектре возмущенного ЛГ-пучка с индексами (0,4), чёрный – теория, серый – эксперимент

3. Анализ спектров ЭГ-мод

Важным шагом при анализе спектров ЭГ-мод является их согласование с привычными спектрами ЛГ-мод, ОУМ и оценка ТЗ. В Приложении показано, как найти разложение спектра возмущённого ЛГ-пучка (13) по базису ЛГ-мод:

$$\begin{aligned}
 & LG_{n,\pm\ell}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = LG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) \mp \\
 & \mp \varepsilon \cdot \frac{(-1)^n e^{\pi i \ell / 4}}{2^{2n+3\ell/2} n!} \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \times \\
 & \times (-1)^{\min} 2^{\max} (\min)! \cdot \text{Im} \{ LG_{\min, 2n+\ell-2k}(\mathbf{r}) \},
 \end{aligned} \quad (21)$$

где $\min = \min(2n + \ell - k, k)$ и $\max = \max(2n + \ell - k, k)$.

Запишем несколько частных случаев при $n = 0$:

$$\begin{aligned}
 & LG_{0,1}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = e^{-r^2} (x + i[1 - \varepsilon]y), \\
 & LG_{0,2}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = e^{-r^2} (x^2 - y^2 + 2i[1 - \varepsilon]xy), \\
 & LG_{0,3}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon) = e^{-r^2} ((x + iy)^3 - \\
 & - \frac{1}{2}i\varepsilon(3x^2 - y^2 + 3y[x^2 + y^2 - 1])).
 \end{aligned} \quad (22)$$

Для первых двух пучков при возмущении $\varepsilon = 1$, соответствующие второй области возмущений, возникает переключение знака ТЗ и ОУМ L_z . Для третьего пучка переключение знака ТЗ и ОУМ происходит при $\varepsilon = 2$, но при увеличении возмущения ТЗ не достигнет максимального значения -3 , как в двух предыдущих случаях, но ожидается стремление ОУМ к нулю в связи с конкуренцией трёх членов в (22).

Расчёт ОУМ в базисе ЭГ-пучков легко осуществить, воспользовавшись стандартным подходом [10–11] и формулой (21), поскольку известны амплитуды при ЛГ-модах. Запишем удельный ОУМ для $n > 0, m \geq 2$ в виде

$$\ell_z = \frac{L_z}{J_{00}} = \frac{m + 2\varepsilon \left(\frac{\Lambda_{n-1} + \Lambda_{n+1}}{2^{n+m/2}} \right) \sin \frac{\pi(2n+m)}{4}}{1 - 2\varepsilon \frac{\lambda_n}{2^{n+m/2}} \sin \frac{\pi(2n+m)}{4} + \frac{\varepsilon^2}{2}}, \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_{n-1} = (n + m + 1)\lambda_{n-1}, \quad \Lambda_{n+1} = (n + 1)\lambda_{n+1}, \\
 & \lambda_k = (-2)^k P_k^{(n,m)}.
 \end{aligned}$$

Например, для $LG_{0,3}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ находим интенсивность пучка

$$J_{00} = C_{1,2}^2 + 4C_{2,1}^2 + 3C_{3,0}^2 \quad (24)$$

и орбитальный угловой момент

$$L_z = C_{1,2}C_{2,1} \sin(\beta_1 - \beta_2) - 12C_{2,1}C_{3,0} \sin(\beta_1 - \beta_0). \quad (25)$$

Фазы и амплитуды получаем из спектров ЭГ-мод, тогда из (24) и (25) находим ОУМ на фотон $\ell_z = L_z/J_{00}$. Типичные теоретические кривые ОУМ и соответствующие им экспериментальные точки (кружки, треугольники и квадратики) приведены на рис. 7. Как и ожидалось, действие возмущения на ЛГ-пучки разделяются на две группы. К первой группе относятся пучки с топологическим зарядом $|\ell| \leq 3$. Во вторую группу можно отнести все остальные пучки. Из рис. 7а видно, что орбитальный момент $\ell_z = 0$ для $l = 1, l = 2$ при $\varepsilon = 1$, а для $l = 3$ ОУМ обращается в ноль при $\varepsilon = 2$. В то же время увеличение возмущения на пучки с $l = 1, l = 2$ приводит к достижению ОУМ с противоположным знаком $\ell_z = -1$ и $\ell_z = -2$, что сопровождается также переключением знака ТЗ. Однако ОУМ пучков с $l = 3$ не достигает значения $\ell_z = -3$, но постепенно стремится к нулю. Переключение знака ТЗ в этом пучке легко оценить из уравнения (22). Основной вклад в ТЗ даёт первый член до тех пор, пока его амплитуда превышает амплитуду второго члена $1 - \varepsilon/2 > \varepsilon/2$ для ЛГ-моды с $\ell = -3$. Нарушение этого условия приводит к переключению знака ТЗ (см. также [14]). ОУМ второй группы пучков с $l > 3$ на рис. 7б постепенно уменьшается до нуля, $\ell_z \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow \infty$, но при этом изменения ТЗ не происходит.

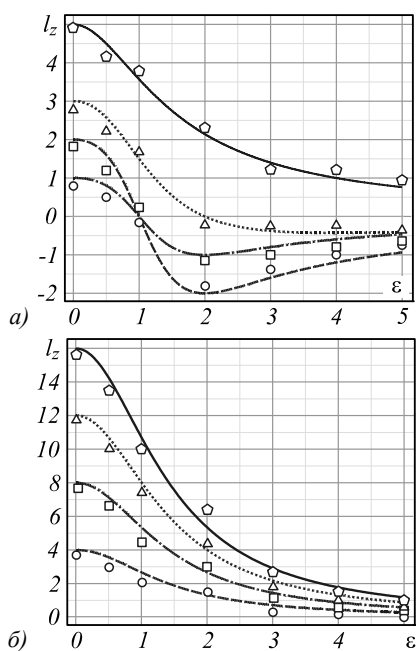


Рис. 7. Зависимость ОУМ на фотон $l_z = L_z / J_{00}$ от параметра возмущения ε для возмущённого ЛГ-пучка с индексами $(0, \ell)$, где значение ℓ указано для каждой кривой $\ell = 1, 2, 3, 5$ (а), $\ell = 4, 8, 12, 16$ (б)

Для оценки ТЗ возмущённого пучка воспользуемся выражением (ПЗ) в Приложении и результатами оценки ТЗ, приведёнными в статье [17]. В левой части выражения (ПЗ) стоит разность между полями LG возмущённого и невозмущённого пучка. Вклад суммы полей в правой части можно оценить посредством члена с максимальным ТЗ, пропорциональным $\sin(2n+l)\varphi$. Поскольку он является топологически нейтральным, т.е. содержит поля с одинаковыми амплитудами и противоположными знаками ТЗ, то можно заключить, что ТЗ возмущённого пучка с радиальными числами $n > 2$ и $2n+l > 3$ не изменяется при действии возмущения.

Измерения ОУМ осуществлялось двумя путями. С одной стороны, выражение (22) позволяет вычислить ОУМ, используя спектр квадратов амплитуд и фаз ЭГ-мод. С другой стороны, наша экспериментальная установка позволяет проводить независимые измерения ОУМ с помощью метода моментов интенсивности [9]. Поэтому в случае отклонения результатов измерения ОУМ в первом случае более чем на 5%, измерения дублируются непосредственным измерением ОУМ на основе моментов интенсивности. Как видно из рис. 7, отклонение экспериментальных точек от теоретических кривых не превышает 5% в области $\varepsilon \in (0, 5)$.

Выводы

Проанализирована вихревая структура возмущённых пучков Лагерра–Гаусса в базисе мод Эрмита–Гаусса. Сначала проведён теоретический и экспериментальный анализ метода измерения топологического заряда невозмущённых ЛГ-пучков с ненулевым

радиальным числом и большими значениями азимутального числа на основе астигматических преобразований на цилиндрической линзе. Возмущение ЛГ-пучка осуществляется за счёт изменения амплитуд ЭГ-мод, образующих невозмущённый ЛГ-пучок. Был разработан и экспериментально реализован метод измерения спектра амплитуд и начальных фаз ЭГ-мод на основе анализа моментов интенсивности, не нарушающих структуру ЛГ-пучка. На конкретных примерах продемонстрирован алгоритм измерения спектра амплитуд и начальных фаз ЭГ-мод, ОУМ и топологического заряда. Показано, что при малых параметрах возмущения происходит локальное нарушение структуры области сердцевинки вихря. Дальнейшее повышение параметра возмущения приводит к конкуренции оптического вихря в основной моде с массивом топологических диполей, порождённых интерференцией остальных мод. В результате межмодовой конкуренции возникает переключение знака ОУМ и ТЗ для мод с исходным ТЗ меньше или равным трём. Переключение знака ОУМ у остальных мод не происходит, но их ОУМ постепенно стремится к нулю по мере увеличения возмущения, в то время как их ТЗ не меняется. Измерение спектра амплитуд и начальных фаз даёт полную информацию о волновом состоянии пучка и фактически позволяет осуществлять цифровую сортировку ЭГ-мод с последующим восстановлением пучка в реальном режиме.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований Грант РФФИ 19-29-01233).

Литература

1. **Soifer, V.A.** Laser beam mode selection by computer-generated holograms / V.A. Soifer, M.A. Golub. – Boca Raton: CRC Press, 1994. – 215 p. – ISBN: 978-0-8493-2476-5.
2. **Khonina, S.N.** Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics / S.N. Khonina, V.V. Kotlyar, V.A. Soifer, K. Jefimovs, J. Turunen // Journal of Modern Optics. – 2004. – Vol. 51, Issue 5. – P. 761-773. – DOI: 10.1080/09500340408235551.
3. **Kotlyar, V.V.** Vortex laser beams / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev. – Boca Raton: CRC Press, 2018. – 404 p. – ISBN: 978-1-1385-4211-2.
4. **Khonina, S.N.** Optical vortices in a fiber: Mode division multiplexing and multimode self-imaging / S.N. Khonina, N.L. Kazanskiy, V.A. Soifer. – In: Recent Progress in Optical Fiber Research / ed. by M. Yasin. – Ch. 15. – London: InTech, 2012. – ISBN: 978-953-307-823-6. – P. 327-352.
5. **Izdebskaya, Y.** Focusing of wedge-generated higher-order optical vortices / Y. Izdebskaya, V. Shvedov, A. Volyar // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, Issue 19. – P. 2530-2532. – DOI: 10.1364/OL.30.002530.
6. **Berkhout, G.C.G.** Efficient sorting of orbital angular momentum states of light / G.C.G. Berkhout, M.P.J. Lavery, J. Courtial, M.W. Beijersbergen, M.J. Padgett // Physical Review Letters. – 2010. – Vol. 105. – 153601. – DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.153601.

7. **Bouchard, F.** Measuring azimuthal and radial modes of photons / F. Bouchard, N.H. Valencia, F. Brandt, R. Fickler, M. Huber, M. Malik // *Opt. Express.* – 2018. – Vol. 26, Issue 24. – P. 31925-31941. – DOI: 10.1364/OE.26.031925.
8. **Andersen, J.M.** Characterizing vortex beams from a spatial light modulator with collinear phase-shifting holography / J.M. Andersen, S.N. Alperin, A.A. Voitev, W.G. Holtzmann, J.T. Gopinath, M.E. Simens // *Applied Optics.* – 2019. – Vol. 58. – P. 404-409. – DOI: 10.1364/AO.58.000404.
9. **Volyar, A.V.** Measurement of the vortex spectrum in a vortex beam array without cuts and gluing of the wavefront / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Optics Letters.* – 2018. – Vol. 43, Issue 22. – P. 5635-5638. – DOI: 10.1364/OL.43.005635.
10. **Volyar, A.V.** Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Applied Optics.* – 2019. – Vol. 58, Issue 21. – P. 5748-5755. – DOI: 10.1364/AO.58.005748.
11. **Volyar, A.V.** Orbital angular momentum and informational entropy in perturbed vortex beams / A. Volyar, M. Bretsko, Ya. Akimova, Yu. Egorov // *Optics Letters.* – 2019. – Vol. 44, Issue 21. – P. 5687-5690. – DOI: 10.1364/OL.44.005687.
12. **Volyar, A.V.** Digital sorting of optical vortices in perturbed singular beams / A.V. Volyar, M.V. Bretsko, Ya.E. Akimova, Yu.A. Egorov. – In: *Nonlinear optics – From solitons to similaritons / I. Bakirtaş, N. Antar.* – London: InTech, 2020. – 23 p. – DOI: 10.5772/intechopen.91419.
13. **Volyar, A.** Vortex avalanche in the perturbed singular beams / A. Volyar, M. Bretsko, Y. Akimova, Y. Egorov // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2019. – Vol. 36, Issue 6. – P. 1064-1071. – DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
14. **Kotlyar, V.V.** Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.V. Volyar // *Optics Express.* – 2020. – Vol. 28, Issue 6. – P. 8266-8281. – DOI: 10.1364/OE.386401.
15. **Котляр, В.В.** Топологическая стабильность оптических вихрей при дифракции на случайном фазовом экране / В.В. Котляр, А.А. Ковалёв, А.П. Порфирьев // *Компьютерная оптика.* – 2019. – Т. 43, Вып. 6. – С. 917-925. – DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-917-925.
16. **Kotlyar, V.V.** Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge / V.V. Kotlyar, A.A. Kovalev, A.P. Porfirev // *Applied Optics.* – 2017. – Vol. 56, Issue 14. – P. 4095-4104. – DOI: 10.1364/AO.56.004095.
17. **Abramochkin, E.** General astigmatic transform of Hermite–Laguerre–Gaussian beams / E. Abramochkin, E. Razuveva, V. Volostnikov // *Journal of the Optical Society of America A.* – 2010. – Vol. 27, Issue 11. – P. 2506-2513. – DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
18. **Абрамочкин, Е.Г.** Современная оптика гауссовых пучков / Е.Г. Абрамочкин, В.Г. Волостников. – М.: Физматлит, 2010. – 184 с. – ISBN: 978-5-9221-1216-1.
19. **Chen, Y.F.** Originating an integral formula and using the quantum Fourier transform to decompose the Hermite–Laguerre–Gaussian modes into elliptical orbital modes / Y.F. Chen, Y.H. Hsieh, K.F. Huang // *OSA Continuum.* – 2018. – Vol. 1, Issue 2. – P. 744-754. – DOI: 10.1364/OSAC.1.000744.
20. **Allen, L.** Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre–Gaussian laser modes / L. Allen, M.W. Beijersbergen, R.J.C. Spreeuw, J.P. Woerdman // *Physical Review A.* – 1992. – Vol. 45, Issue 11. – P. 8185-8189. – DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

Приложение

Упростим формулу (13), подставляя вместо ε_k представление из двух слагаемых (14). Очевидно, что первое (единичное) слагаемое даст в $LG_{n,\pm\ell}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon)$ вклад в виде исходной невозмущённой ЛГ-моды, поскольку при $\varepsilon=0$ формула (13) превращается в формулу (10). Поэтому

$$\begin{aligned}
 & LG_{n,\pm\ell}^{(pert)}(\mathbf{r}, \varepsilon) - LG_{n,\pm\ell}(\mathbf{r}) = \\
 & = \pm i\varepsilon \cdot \frac{(-1)^n}{2^{n+\ell+1} n!} \left\{ HG_{n+\ell,n} \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) - \right. \\
 & \left. - HG_{n+\ell,n} \left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}, \frac{x-y}{\sqrt{2}} \right) \right\}, \tag{П1}
 \end{aligned}$$

где использовалась формула (3.10) из [18].

Таким образом, чтобы разложить разность ЭГ-мод в фигурных скобках по ЛГ-модам, воспользуемся ещё одной формулой из [16]. Это формула (4.20), которая показывает разложение некоторой ЭЛГ-моды с аргументами, повернутыми на некоторый угол, по аналогичным ЭЛГ-модам без поворота. Как частный слу-

чай, находим разложение первой ЭГ-моды в фигурных скобках по ЛГ-модам:

$$\begin{aligned}
 & HG_{n+\ell,n} \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{x+y}{\sqrt{2}} \right) = \\
 & = \frac{e^{i\pi\ell/4}}{2^{n+\ell/2}} \sum_{k=0}^{2n+\ell} (-2i)^k P_k^{(n+\ell-k, n-k)}(0) \times \\
 & \times (-1)^{\min} 2^{\max} (\min)! \cdot LG_{\min, 2n+\ell-2k}(x, y), \tag{П2}
 \end{aligned}$$

где $\min = \min(2n + \ell - k, k)$ и $\max = \max(2n + \ell - k, k)$. Разложение второй ЭГ-моды получается заменой $y \rightarrow -y$. При этом ЛГ-моды справа становятся сопряжёнными:

$$LG_{\min, 2n+\ell-2k}(x, -y) = LG_{\min, 2n+\ell-2k}^*(x, y).$$

Поэтому разложение разности ЭГ-мод в (П2) выражается через

$$\begin{aligned}
 & LG_{\min, 2n+\ell-2k}(x, y) - LG_{\min, 2n+\ell-2k}^*(x, y) = \\
 & = 2i \cdot \text{Im} LG_{\min, 2n+\ell-2k}(x, y), \tag{П3}
 \end{aligned}$$

что приводит к формуле (21).

Сведения об авторах

Воляр Александр Владимирович – доктор физико-математических наук (1992). С 1993 г. – профессор, с 1999 г. – заведующий кафедрой общей физики. Сфера научных интересов: оптика, лазерная физика. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com.

Абрамочкин Евгений Григорьевич – доктор физико-математических наук (2006 год), ведущий научный сотрудник Самарского филиала ФГБУН Физического института им. П.Н. Лебедева РАН. E-mail: ega@fian.smr.ru.

Егоров Юрий Александрович – кандидат физико-математических наук в области оптики и лазерной физики, доцент кафедры общей физики. E-mail: yurivegorov@cfuv.ru.

Брецько Михаил Владимирович – аспирант второго курса кафедры общей физики физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. E-mail: mihailbretcko4@gmail.com.

Акимова Яна Евгеньевна – аспирант второго курса кафедры общей физики физико-технического института КФУ им. В.И. Вернадского. E-mail: aklmovalyana@yandex.ru.

ГРНТИ: 29.31.15

Поступила в редакцию 28 апреля 2020 г. Окончательный вариант – 13 мая 2020 г.

Digital sorting of Hermite-Gauss beams: mode spectra and topological charge of a perturbed Laguerre-Gauss beam

A.V. Volyar¹, E.G. Abramochkin², Yu. Egorov¹, M. Bretsko¹, Ya. Akimova¹

¹Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University,
Simferopol, Republic of Crimea, Russia,

²Samara Branch of P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences, Samara, Russia

Abstract

We developed and implemented an intensity moments technique for measuring amplitude and initial phase spectra, the topological charge (TC) and orbital angular momentum (OAM) of the Laguerre-Gauss (LG) beams decomposed into the basis of Hermite-Gaussian (HG) modes. A rigorous theoretical justification is given for measuring the TC of unperturbed LG beams with different values of radial and azimuthal numbers by means of an astigmatic transformation on a cylindrical lens. We have shown that the measured amplitude and phase spectra of the HG modes make it possible to find the orbital OAM and TC, as well as digitally sorting the HG modes and then restoring the initial singular beam.

Keywords: diffraction optics, orbital angular momentum, intensity moments technique.

Citation: Volyar AV, Abramochkin EG, Egorov YuA, Bretsko MV, Akimova YaE. Digital sorting of Hermite-Gauss beams: mode spectra and topological charge of a perturbed Laguerre-Gauss beam. *Computer Optics* 2020; 44(4): 501-509. DOI: 10.18287/2412-6179-CO-747.

Acknowledgements: The work was funded by the Russian Foundation for Basic Research under RFBR research project No. 19-29-01233.

References

- [1] Soifer VA, Golub MA. Laser beam mode selection by computer-generated holograms. Boca Raton: CRC Press; 1994. ISBN: 978-0-8493-2476-5.
 - [2] Khonina SN, Kotlyar VV, Soifer VA, Jefimovs K, Turunen J. Generation and selection of laser beams represented by a superposition of two angular harmonics. *J Mod Opt* 2004; 51(5): 761-773. DOI: 10.1080/09500340408235551.
 - [3] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Vortex laser beams. Boca Raton: CRC Press; 2018. ISBN: 978-1-1385-4211-2.
 - [4] Khonina SN, Kazanskiy NL, Soifer VA. Optical vortices in a fiber: Mode division multiplexing and multimode self-imaging. In Book: Yasin M, ed. Recent progress in optical fiber research. Ch 15. London: InTech; 2012. ISBN: 978-953-307-823-6.
 - [5] Izdebskaya Y, Shvedov V, Volyar A. Focusing of wedge-generated higher-order optical vortices. *Opt Lett* 2005; 30(19): 2530-2532. DOI: 10.1364/OL.30.002530.
 - [6] Berkhout GCG, Lavery MPJ, Courtial J, Beijersbergen MW, Padgett MJ. Efficient sorting of orbital angular momentum states of light. *Phys Rev Lett* 2010; 105: 153601. DOI: 10.1103/PhysRevLett.105.153601.
 - [7] Bouchard F, Valencia NH, Brandt F, Fickler R, Huber M, Malik M. Measuring azimuthal and radial modes of photons. *Opt Express* 2018; 26(24): 31925-31941. DOI: 10.1364/OE.26.031925.
 - [8] Andersen JM, Alperin SN, Voitev AA, Holtzmann WG, Gopinath JT, Simens ME. Characterizing vortex beams from a spatial light modulator with collinear phase-shifting holography. *Appl Opt* 2019; 58: 404-409. DOI: 10.1364/AO.58.000404.
 - [9] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex spectrum in a vortex-beam array without cuts and gluing of the wavefront. *Opt Lett* 2018; 43(22): 5635-5638. DOI: 10.1364/OL.43.005635.
 - [10] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Measurement of the vortex and orbital angular momentum spectra with a single cylindrical lens. *Appl Opt* 2019; 58(21): 5748-5755. DOI: 10.1364/AO.58.005748.
 - [11] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Orbital angular momentum and informational entropy in perturbed vortex beams. *Opt Lett* 2019; 44 (21): 5687-5690. DOI: 10.1364/OL.44.005687.
 - [12] Volyar AV, Bretsko MV, Akimova YaE, Egorov YuA. Digital sorting of optical vortices in perturbed singular beams. In Book: Bakırtaş İ, Antar N. Nonlinear optics – From solitons to similaritons. London: InTech; 2020. DOI: 10.5772/intechopen.91419.
 - [13] Volyar A, Bretsko M, Akimova Ya, Egorov Yu. Vortex avalanche in the perturbed singular beams. *J Opt Soc Am A* 2019; 36(6): 1064-1071. DOI: 10.1364/JOSAA.36.001064.
 - [14] Kotlyar VV, Kovalev AA, Volyar AV. Topological charge of a linear combination of optical vortices: topological competition. *Opt. Express* 2020; 28(6): 8266-8281. DOI: 10.1364/OE.386401.
 - [15] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Topological stability of optical vortices diffracted by a random phase screen. *Computer Optics* 2019; 43(6): 917-925. DOI: 10.18287/2412-6179-2019-43-6-917-925.
 - [16] Kotlyar VV, Kovalev AA, Porfirev AP. Astigmatic transforms of an optical vortex for measurement of its topological charge. *Appl Opt* 2017; 56(14): 4095-4104. DOI: 10.1364/AO.56.004095.
 - [17] Abramochkin E, Razuvaeva E, Volostnikov V. General astigmatic transform of Hermite-Laguerre-Gaussian beams. *J Opt Soc Am A* 2010; 27(11): 2506-2513. DOI: 10.1364/JOSAA.27.002506.
 - [18] Abramochkin EG, Volostnikov VG. Modern optics of Gaussian beams [In Russian]. Moscow: "Fizmatlit" Publisher; 2010. ISBN: 978-5-9221-1216-1.
 - [19] Chen YF, Hsieh YH, Huang KF. Originating an integral formula and using the quantum Fourier transform to decompose the Hermite-Laguerre-Gaussian modes into el-
-

liptical orbital modes. OSA Continuum 2018; 1(2): 744-754. DOI: 10.1364/OSAC.1.000744.
[20] Allen L, Beijersbergen MW, Spreeuw RJC, Woerdman JP. Orbital angular momentum of light and the transformation

of Laguerre-Gaussian laser modes. Phys Rev A 1992; 45(11): 8185-8189. DOI: 10.1103/PhysRevA.45.8185.

Authors' information

Alexander Vladimirovich Volyar (b. 1949). A graduate of Simferopol State University (1972), and after graduation – his employee. Doctor of Physical and Mathematical Sciences (1992). Since 1993, he has been a professor, since 1999, he has become the head of the General Physics department. The sphere of scientific interests is optics, laser physics. E-mail: volyar.singular.optics@gmail.com.

Eugeny Grigor'evich Abramochkin (b. 1962), graduated (1984) from Kuibyshev State University, majoring in Mathematical Physics. He received his Doctor in Physics & Maths degree in 2006. He is a leading researcher of Samara Branch of the P.N. Lebedev Physical Institute of Russian Academy of Sciences. He is a co-author of nearly 50 scientific papers. His research interests are related with complex analysis, special functions, and theory of mathematical physics equations. E-mail: ega@fian.smr.ru.

Yuriy Alexandrovich Egorov (b. 1975). A graduate of Taurida National University (2001). Received the degree of Candidate of Physical and Mathematical Sciences in the field of Optics and Laser Physics at the Taurida National V.I. Vernadsky University (Crimean Federal University is now) in 2005. Since 2006, he has been a Associate Professor at the Physics and Technology Institute of V.I. Vernadsky Crimean Federal University. The sphere of scientific interests is singular optics, diffraction optics. E-mail: yuriyegorov@cfuv.ru.

Mikhail Vladimirovich Bretsko (b. 1994). Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the second-year postgraduate student of the General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, processing of graphic images, programming. E-mail: mikhailbretcko4@gmail.com.

Yana Evgenievna Akimova (b. 1994). Since 2012, a student of the V.I. Vernadsky Crimean Federal University. At the moment, the second-year postgraduate student of the of General Physics department, the V.I. Vernadsky Physico-Technical Institute of KFU. Scope of scientific interests – singular optics, diffraction optics. E-mail: akimova.yana@yandex.ru.

Received April 28, 2020. The final version – May 13, 2020.
