УДК 313.42
JEL: C250

КРИЗОВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

© 2019 **ЛЮБЧИК Л. М., ГРІНБЕРГ Г. Л., ВОРОНІН А. В.**

УДК 313.42
JEL: C250

Любчик Л. М., Грінберг Г. Л., Воронін А. В. Кризові моделі економічної динаміки

Основне завдання дослідження полягає в аналізі процедури побудови диференціальних рівнянь, які використовуються для моделювання макроекономічних процесів. Досліджено коректність моделі економічного зростання у диференціальній формі. Встановлено неадекватність експоненціального зростання економіки. Отримано альтернативний результат у вигляді гіперболічного зростання значущих економічних показників. Виявлено невідповідність пропорційного зростання капіталу і доходу. Висунуто міркування для ідентифікації моменту появи кризисних явищ. Зроблено відповідні корегування моделей економічного зростання. Узагальнено підхід до використання балансових рівнянь для моделювання економічної динаміки з метою одержання прогнозних оцінок.

Ключові слова: *міжнародна торгівля, біфуркація, хаос, баланс, ресурс, динаміка, стійкість, рівновага.*

DOI:

Формул: *26. Бібл.: 10.*

Любчик Леонід Михайлович *– доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри компьютерної математики й аналізу даних, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, Харків, 61002, Україна)*

E-mail: *lyubchyk.leonid@ukr.net*

Грінберг Галина Леонідівна *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри економічної кібернетики та маркетингового менеджменту, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут» (вул. Кирпичова, 2, Харків, 61002, Україна)*

E-mail: *glngrinberg@gmail.com*

Воронін Анатолій Віталійович *– кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця (просп. Науки, 9а, Харків, 61166, Україна)*

E-mail: *voronin61@ ukr.net*

УДК 313.42
JEL: C250

Любчик Л. М., Гринберг Г. Л., Воронин А. В. Кризисные модели экономической динамики

Основная задача исследования состоит в анализе процедуры построения дифференциальных уравнений, используемых для моделирования макроэкономических процессов. Исследована корректность модели экономического роста в дифференциальной форме. Установлена неадекватность экспоненциального роста экономики. Получен альтернативный результат в виде гиперболического роста значимых экономических показателей. Выявлено несоответствие пропорционального роста капитала и дохода. Выдвинуты соображения для идентификации момента появления кризисных явлений. Сделаны соответствующие корректировки моделей экономического роста. Обобщен подход к использованию балансовых уравнений для моделирования экономической динамики с целью получения прогнозных оценок.

Ключевые слова: *международная торговля, бифуркация, хаос, баланс, ресурс, динамика, устойчивость, равновесие.*

Формул: *26.* ***Библ.:*** *10.*

Любчик Леонид Михайлович *– доктор технических наук, профессор, заведующий кафедрой компьютерной математики и анализа данных, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичёва, 2, Харьков, 61002, Украина)*

E-mail: *lyubchyk.leonid@ukr.net*

Гринберг Галина Леонидовна *– кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры экономической кибернетики и маркетингового менеджмента, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (ул. Кирпичёва, 2, Харьков, 61002, Украина)*

E-mail: *glngrinberg@gmail.com*

Воронин Анатолий Витальевич *– кандидат технических наук, доцент, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный экономический университет им. С. Кузнеца (просп. Науки, 9а, Харьков, 61166, Украина)*

E-mail: *voronin61@ ukr.net*

UDC 313.42
JEL: C250

Lyubchyk L. M., Grinberg G. L., Voronin A. V. Crisis Models of Economic Dynamics

The main aim of the study is to analyze the procedure for constructing differential equations used to model macroeconomic processes. The correctness of the model of economic growth in differential form is investigated. The inadequacy of the exponential growth of the economy is established. An alternative result is obtained in the form of a hyperbolic growth of significant economic indicators. A discrepancy between the proportional growth of capital and income is revealed. Considerations are put forward to identify the moment of occurrence of crisis phenomena. Corresponding adjustments to economic growth models are made. An approach to the use of balance equations for modeling economic dynamics for the purpose of obtaining prediction estimates is generalized.

Keywords: *international trade, bifurcation, chaos, balance, resource, dynamics, stability, equilibrium.*

Formulae: *26.* ***Bibl.:*** *10.*

Lyubchyk Leonid M. *– Doctor of Sciences (Engineering), Professor, Head of the Department, Department of Computer Mathematics and Data Analysis, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (2 Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine)*

E-mail: *lyubchyk.leonid@ukr.net*

Grinberg Galina L. *– Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Associate Professor, Department of Economic Cybernetics and Marketing Management, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute» (2 Kyrpychova Str., Kharkiv, 61002, Ukraine)*

E-mail: *glngrinberg@gmail.com*

Voronin Anatolii V. *– Candidate of Sciences (Engineering), Associate Professor, Associate Professor of the Department of Mathematics and Mathematical Methods in Economics, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9a Nauky Ave. , Kharkiv, 61166, Ukraine)*

E-mail: *voronin61@ ukr.net*

У теперішній час не бракує прогнозів. Прогнозують усе – світові кліматичні зміни, новий політичний порядок, стабілізацію курсів долара та євро або заміну їх новітніми криптовалютами. Взагалі більшість прогнозів, у тому числі економічних, з'являються з урахуванням загальної ситуації на момент їх складання, в кращому випадку враховуються реалії останніх десятиріч. На початок третього тисячоліття яскраво відокремилась як найважливіша проблема сталого розвитку у загальносвітовому масштабі економічної системи. Прагнення до досягнення цієї мети актуалізує розробку адекватної прогностичної методології. Добре відомо, що традиційне соціально-економічне прогнозування реалізується на різних часових інтервалах – від короткострокових (до одного року), середньострокових (від одного року до п'яти) до довгострокових (від п'яти до п'ятидесяти років). Очевидно, якщо короткострокове прогнозування орієнтовано на досягнення локальних кон'юнктурних цілей, а середньострокові прогнози застосовуються для розробки політики розвитку у найближчій перспективі, то довгострокові моделі призначені для вивчення глобального економічного зростання.

Якщо казати про застосування кейнсіанської теорії для прогнозування економічного зростання, то треба нагадати про те, що протягом багатьох років відомі світові науковці цілеспрямовано запроваджували у свідомість світової спільноти тезу про можливість експоненційного зростання доходу і капіталу у нескінченій перспективі. Така закономірність випливає з відомої динамічної моделі Харода у формі диференціального рівняння першого порядку. Тому домінантою в управлінні макроекономікою до теперішнього часу є фактична підтримка однакових постійних темпів зростання доходу і капіталу. Таку аксіоматику заклали фундатори макроекономіки що, своєю чергою, гранично політизувала економічну науку. У зв'язку з цим доцільно навести вислів Кейнса про те, що ідеї економістів та політичних діячів, коли вони праві та коли вони помиляються, мають значно більше значення, ніж взагалі гадають.

У 2001 р. А. Меддісоном [1; 2] були опубліковані дані з динаміки світового валового внутрішнього продукту (ВВП) за 1–1973 рр. н. е., що висвітлюють тенденцію зростання ВВП як квадратично-гіперболічну залежність доходу від часових змін. У цій публікації також наведений момент часу, так званий «момент загострення», – 23 липня 2005 року, що символізує «економічний кінець всесвіту». Але приблизно з 1970 року темп економічного розвитку став спадати, тому і не виправдався алармістський прогноз на 2005 рік.

Вищевказаний факт квадратично-гіперболічного зростання доходу підтверджує належним чином неадекватність експоненційного зростання економіки, що спонукає до критичного аналізу наявної макроекономічної теорії [3].

Модель теорії зростання економіки у трактуванні Л. Канторовича [4] визначається співвідношеннями:

$$Y(\tau)=C(\tau)+S(\tau);\, S(\tau)=I(\tau);\, S(\tau)=\mu Y(\tau),$$
$$d_\tau K(\tau)=I(\tau);\, K(\tau)=\nu Y(\tau), \qquad (1)$$

де $Y(\tau)$ – національний дохід;

$C(\tau)$, $S(\tau)$ – обсяг накопичення;

$I(\tau)$ – дійсний обсяг інвестицій;

$K(\tau)$ – капітал.

Розмірність усіх зазначених величин є грошові одиниці; $d_\tau = d/d\tau$, τ – часова змінна; μ – гранична схильність до накопичення $(0<\mu<1)$; ν – коефіцієнт обігу капіталу $(\nu\approx 10)$. При цьому ν характеризується як кількість років, за яку річний дохід «урівноважує» капітал. Диференціальне рівняння, що формально випливає з (1), і його розв'язок мають вигляд відповідно:

$$d_\tau K(\tau)=\sigma K(\tau),\, \sigma=\mu/\nu;$$
$$K(\tau)=K_0 e^{\sigma\tau};\, I(\tau)=I_0 e^{\sigma\tau};\, Y(\tau)=Y_0 e^{\sigma\tau}, \qquad (2)$$

де

$$I_0=\sigma K_0;\, Y_0=K_0/\nu,\, K_0=K(0);\, I_0=I(0);\, Y_0=Y(0).$$

Оскільки в (1) використовуються фіксовані обсяги грошових потоків, ці співвідношення дискретні й можуть бути представлені у вигляді:

$$I_n=\mu Y_n; \qquad (3)$$

$$d_\tau K_n=I_n; \qquad (4)$$

$$K_n=\nu Y_n,\, n=0,1,2,\ldots; \qquad (5)$$

де $I_n=I(\tau_n); Y_n=Y(\tau_n); K_n=K(\tau_n), \tau_n=n$, n – дискретна часова змінна.

Але диференціювання дискретної змінної капіталу $K(\tau)$ передбачає застосування математичної теорії узагальнених функцій [5]. Маємо:

$$d_\tau K(\tau)=\sum_{j=0}^{n-1} I_j \delta(\tau-\tau_j),$$

$$\delta(\tau)=\begin{cases}0, \tau\neq 0;\\ \infty, \tau=0,\end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(\eta)d\eta=1,$$

тому замість (4) скористаємося виразом для формування капіталу, який має природне представлення:

$$K_n=K_0+\sum_{j=0}^{n-1} I_j, \qquad (6)$$

де $K_n=K(\tau_n);\, I_j=I(\tau_j),\, \tau_j=j.$

З (3), (5), (6) випливає, що:

$$K_1=K_0(1+\sigma);\, K_2=K_0(1+\sigma)^2;\ldots;$$

$$K_n=K_0(1+\sigma)^n=K_0 e^{n\ln(1+\sigma)}; \qquad (7)$$

$$Y_n=(K_0/\nu)e^{n\ln(1+\sigma)};\, I_n=\sigma K_0 e^{n\ln(1+\sigma)}$$

за формулою геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{N} I_n = \sigma K_0 e^{\ln(1+\sigma)} \frac{e^{N\ln(1+\sigma)}-1}{e^{\ln(1+\sigma)}-1}$$

і зіставлення цієї суми з капіталом N-го року $K_N = K_n$, $n = N$ показує, що рівність між ними досягається при значенні N, близькому до σ^{-1}. З іншого боку, збільшення капіталу за період часу від $\tau = 1$ до $\tau = N$ виявляється рівним капіталу K_N, який, однак, включає ще й початковий капітал K_0.

Маємо невідповідність, яка повинна бути проаналізована:

- на відміну (1), моделі економічного зростання більш властива різницева форма (3), (5) і (6), тому що підкреслює уявно особливий вигляд розв'язку при $\tau \sim \sigma^{-1}$;
- невірним було б ототожнювати у (7) $\ln(1+\sigma) \approx \sigma$, оскільки величина σ є малою, що відповідає розв'язку у формі (2), що збігається з (2);
- надане перетворення уникає позначену особливість, відповідно узагальнюючи формулу розв'язку (7) на показові зростаючі функції $K(\tau)$, $I(\tau)$ і $Y(\tau)$ за наявністю необмеженого аргументу τ в (2).

Треба зазначити, що рівень доходу за *n* років є таким:

$$Y_0 + \sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{\mu}\left(I_0 + \sum_{j=1}^{n} I_j\right), \qquad (8)$$

при цьому за умови $\mu^{-1} > 1$ ця сума зростання – з більшою швидкістю, ніж у (6). Зрозуміло, що має існувати відповідний рік n, залежний від ν, коли вирази (6) і (8) повинні бути однаковими у межах точності цієї дискретизації.

Таким чином, явна форма розв'язку (2) не є адекватною дійсній тенденції макроекономічної поведінки. Суттю цього є хибне трактування співвідношення $d_\tau K(\tau) = I(\tau)$ з (1). Саме тому функції $K(\tau)$ і $I(\tau)$ є дискретними, тоді як похідна $d_\tau K(\tau)$ є неперервною функцією.

Із цієї точки зору доцільні міркування В. Кеч і П. Теодореску [5] про правомірне застосування узагальнених функцій при складанні диференціальних рівнянь для моделювання макроекономічної динаміки. Беручи до уваги, що вони призначені для математичних викладок у процесі перетворень при розв'язку задач, наданих у термінах нескінченно малих змінних.

Для цього необхідно створити відповідний аналог дискретної моделі економічного зростання (3), (5) і (6) у категоріях безперервного аналізу. Таким чином, вираз (6) перетворюється з арифметичного в інтегральну форму накопичення капіталу:

$$K(\tau) = \int_{-T}^{\tau} I(\eta)d\eta = K_0 + K_R, \qquad (9)$$

де T – період накопичення початкового капіталу K_0;

$$K_R(\tau) = \int_0^{\tau} I(\eta)d\eta; \qquad (10)$$

– капітал, реалізований за період $\tau > 0$. Відповідно, похідна:

$$d_\tau K(\tau) = I(\tau) \qquad (11)$$

має традиційний вигляд.

Функція $I(\tau)$ в (9) являє собою стандартний вигляд обсягу інвестицій. Тоді маємо реалістичні рівності:

$$Y(\tau) = C(\tau) + I(\tau), \qquad (12)$$

$$I(\tau) = \mu Y(\tau) \qquad (13)$$

(див. (1), (3)), $Y(\tau)$ і $C(\tau)$ – також обсяги потоків доходу й споживання, вимірювані аналогічно $I(\tau)$ в грошовому еквіваленті. Прив'яжемо цю одиницю до одного року, вважаючи, що тепер часова змінна τ може пробігати значення як завгодно малих змінних.

Але з наведених раніше міркувань дохід $Y(\tau)$ не може подібно (5) порівнюватися з капіталом $K(\tau)$. Поряд із цим при $\tau \to 0$ параметр $\nu \to \infty$ і з'являється невизначеність.

Для уникнення невизначеності треба співвідносити з капіталом дохід, накопичений за період часу від 0 до τ:

$$Y_R(\tau) = \int_0^{\tau} Y(\eta)d\eta.$$

Вираз (5) стає інтегральним, а саме:

$$K(\tau) = \nu \int_{\tau}^{\tau+1} Y(\eta)d\eta, \tau \ge 0;$$

- відношення $K(\tau)/Y_R(\tau)$, становить ν при $\tau = 1$, $\nu/2$ при $\tau = 2$, ..., 1 при $\tau = \nu$;
- посилаючись до цієї ж пропорції, отримаємо 2ν при $\tau = 1/2$, 3ν при $\tau = 1/3$, ..., ν/τ для довільного моменту часу τ-й, відповідно, при $\tau \to 0$ виникає особливість, яка повинна узгоджуватися з тим, що $K_0 = \nu Y_0$.

Підсумовуючи, можна вважати:

$$K(\tau) = \frac{\nu}{\tau}\int_0^{\tau} Y(\eta)d\eta, \qquad (14)$$

де особливість при $\tau = 0$ зникає за правилом Лопіталя. Співвідношення (11)–(14) являють собою модель економічного зростання в безперервній інтерпретації.

Підставляючи $Y(\tau)$ з (13) в (14) з використанням (11), отримаємо:

$$K(\tau) = \frac{K_0}{1-\sigma\tau}, \qquad (15)$$

звідки

$$I(\tau)=\frac{I_0}{(1-\sigma\tau)^2};\; Y(\tau)=\frac{Y_0}{(1-\sigma\tau)^2}. \qquad (16)$$

Цей розв'язок відповідає задачі Коші:

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\sigma}{1-\sigma\tau}K(\tau)=0,\, K(0)=K_0;$$

$$d_\tau I(\tau)-\frac{2\sigma}{1-\sigma\tau}I(\tau)=0,\, I(0)=\sigma K_0;\, Y(\tau)=\frac{1}{\mu}I(\tau).$$

Таким чином, наведена модель містить у собі вищеозначену особливість різницевого розв'язку при $\tau=N\sim\sigma^{-1}$.

Як можна пояснити критичність виразів (15), (16) при $\tau=\sigma^{-1}$? Зауважимо, що на місці τ^{-1} в (14) можна надати функцію $f(\tau)$, яка задовольняє умовам $d_\tau f(0)=1$ і $f(\nu)=\nu$:

$$K(\tau)=\frac{\nu}{f(\tau)}\int_0^\tau Y(\eta)d\eta; \qquad (18)$$

відповідно, замість (15):

$$K(\tau)=\frac{K_0}{1-\sigma f(\tau)}.$$

Також можемо вважати, що μ залежить від змінної τ. Тоді дохід (12) розподіляється між інвестиціями та споживанням у різні моменти часу нерівномірно. Очевидно, що капітал визначається за допомогою розв'язку задачі Коші, що випливає зі співвідношень (11), (13) і (14):

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\mu(\tau)}{\nu-\tau\mu(\tau)}K(\tau)=0, \quad K(0)=K_0. \qquad (19)$$

Але внаслідок (13) при $\tau=\sigma^{-1}$ величина капіталу в (14) становить

$$K(\sigma^{-1})=\int_0^{\sigma^{-1}} I(\eta)d\eta.$$

Маємо збіг із $K_R(\sigma^{-1})$ із (10). Відповідно, отримаємо, що:

$$K(\sigma^{-1})=K_R(\sigma^{-1}),$$

і згідно з (9) у розглянутий момент часу $K_0=0$.

Початковий сумарний дохід $Y_R(\tau)$ досягає при $\tau=\nu$ величини, що рівна капіталу $K(\nu)$. Наступне зростання доходу приводить до того, що вже сумарний обсяг вкладених інвестицій досягає при $\tau=\sigma^{-1}$ величини, рівної капіталу $K(\sigma^{-1})$. При цьому початковий капітал K_0 перетікає у дохід $Y_R(\tau)$, і вирази (15), (16) обертаються в невизначеність. Тому й задача Коші (17) при $K_0=0$ втрачає зміст. Подібна ситуація можна визначити як кризову з позицій класичних теорій економічного зростання з урахуванням обмеженого часового періоду – так званого «горизонту прогнозу».

У зазначеному сенсі врахуємо умови зростання використовуваних функцій, що випливають із (15), (16):

$$K(\nu)=K_0/(1-\mu);\, I(\nu)=I_0/(1-\mu)^2;$$
$$Y(\nu)=Y_0/(1-\mu)^2$$

так при $\mu=0{,}5$ виходить $K(\nu)=2K_0$; $I(\nu)=4I_0$; $Y(\nu)=4Y_0$.

Таким чином, практично контролюючи наближення, зокрема, доходу $Y(\tau)$ до $Y_0/(1-\mu)^2$, можна фіксувати значення ν, що є досить важливим для визначення моменту кризи, коли $\tau=\nu/\mu$.

Якщо використати замість (14) загальну залежність (18), установлену по факту на інтервалі, наприклад, $\tau\in[0,\nu]$, функція $f(\tau)$ може бути продовжена до критичного моменту часу τ_k, коли $f(\tau_k)=\sigma^{-1}$. Тому можна вважати, що ми маємо можливість визначати момент настання кризи («момент загострення») у контексті прогнозованого розвитку економічної ситуації. Її визначають як функцію $f(\tau)$, так і як розв'язок задачі (19).

Наведені аргументи дозволяють прийняти, наприклад, $K(\nu)$ як K_0 для наступного етапу розвитку економіки. Відповідний процес організаційних перетворень можна уявити як взаємозалежність ν з амортизацією капіталу K_0. Зазначимо, що амортизацію неважко врахувати, використовуючи в (9) і (14) на місці функції $K(\tau)$ вираження виду $(1-\alpha\tau)K(\tau)$, $\alpha>0$. Визначення $K(\tau)$ зводиться в цьому випадку до розв'язку задачі Коші:

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\alpha+\sigma-2\alpha\sigma\tau}{1-(\alpha+\sigma)\tau+\alpha\sigma\tau^2}K(\tau)=0,$$

$$K(0)=K_0.$$

Треба зазначити, що модель (11)–(14) не враховує накопичування інвестицій з перетворенням їх на капітал, оскільки в (9) вони просто підсумовуються. Нехай:

$$K(\tau)=\int_{-T}^{\tau}(1+\rho\eta)I(\eta)d\eta,$$

де $\rho>0$ – константа. Тому замість (11) отримаємо:

$$d_\tau K(\tau)=(1+\rho\tau)I(\tau)=\mu(1+\rho\tau)Y(\tau).$$

Підставляючи із цього виразу $Y(\tau)$ в (14) маємо диференціальне рівняння:

$$d_\tau K(\tau)-\frac{\sigma(1+\rho\tau)}{1-\sigma\tau-\sigma\rho\tau^2}K(\tau)=0,$$

розв'язок якого:

$$K(\tau)=K_0\left[1+\left(\frac{\sigma+\kappa}{\sigma-\kappa}\right)^{\frac{\sigma}{2\kappa}}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[\frac{1}{\sqrt{1-\sigma\tau-\sigma\tau^2}}+\left(\frac{2\sigma\rho\tau+\sigma+\kappa}{2\sigma\rho\tau+\sigma-\kappa}\right)^{\frac{\sigma}{2\kappa}}\right],$$

$$\kappa=\sqrt{4\sigma\rho+\sigma^2}$$

обертається в невизначеність при:

$$\tau=-\frac{1}{2\rho}+\sqrt{\frac{1}{4\rho^2}+\frac{1}{\sigma\rho}}$$

і зі збільшенням ρ настання кризи наближається.

Вертаючись до моделі (1) помітимо, що завжди її розглядали в кінцево-різницевій постановці [6; 7]. Розв'язок (2), що виник у результаті сполучення безперервного й дискретного аналізу, є помилковим. Це поєднання є типовим для ряду найбільш відомих праць у галузі макроекономічного моделювання [8–10].

Модель розвитку економіки Харрода – Домара наведено Р. Алленом у вигляді [9]:

$$Y(t)=C(t)+I(t);\,C(t)=(1-\mu)Y(t);\qquad (20)$$
$$I(t)=\nu_* d_t Y(t),$$

де $Y(t)$, $C(t)$ і $I(t)$ – інтенсивності потоків відповідно доходу, споживання й інвестицій; постійна $0<\mu<1$;

постійна $\nu_*>0$ має розмірність часу;

t – розмірний час. Диференціальне рівняння задачі і його розв'язок мають вигляд відповідно:

$$d_t Y(t)=(\mu/\nu_*)Y(t);\qquad (21)$$
$$Y(t)=Y_0 e^{\mu t/\nu_*},\,Y_0=Y(0).$$

У силу відомої залежності:

$$d_t K(t)=I(t),\qquad (22)$$

останнє співвідношення еквівалентно наступному:

$$d_t K(t)=\nu_* d_t Y(t),\qquad (23)$$
або $K(t)=\nu_* Y(t)+K_0-\nu_* Y_0,\,K_0=K(0).$

Крім функцій $Y(t)$ і $I(t)$, приходимо до рівняння:

$$d_t K(t)-(\mu/\nu_*)K(t)=\mu Y_0-(\mu/\nu_*)K_0,\qquad (24)$$

розв'язок якого має вигляд:

$$K(t)=(K_0-\nu_* Y0)(e^{\mu t/\nu_*}-1),$$

а отже, $K_0=0$, або ж у (23) $K_0=\nu_* Y_0$.

У першому із цих випадків виходить, що початковий капітал K_0 відсутній, тоді як інвестиції $I_0=I(0)$ й дохід Y_0 існують, що не відповідає дійсності.

У другому – рівняння (24) стає однорідним, і його розв'язок аналогічний (21):

$$K(t)=\nu_* Y(t),\qquad (25)$$

що випливає також з (23). Однак така залежність суперечить використанню поняття нескінченно малої величини. Дійсно, інтенсивність доходу при $t=t_i$ визначається в такий спосіб:

$$Y(t_i)=\frac{1}{t_*}\int_{t_i-0,5t_*}^{t_i+0,5t_*}Y(\eta)d\eta,$$

де t_* – малий проміжок часу. Відповідно, з (25) капітал:

$$K(t_i)=\nu\int_{t_i-0,5t_*}^{t_i+0,5t_*}Y(\eta)d\eta,\,\nu=\frac{\nu_*}{t_*};\qquad (26)$$

інакше кажучи, $K(t_i)$ являє собою величину доходу, усереднену на інтервалі t_* й, мабуть, при $t_*\to 0$ безрозмірний параметр $\nu\to\infty$.

Проте уникає відмінність між поняттями доходу й інтенсивності доходу в точці $t=t_i$. Вважаємо, що на підставі (26) співвідношення (25) може розглядатися лише для кінцевої довжини t_*, а отже, має суто дискретний характер. При цьому використання поряд з ν безрозмірного часу $\tau=t/t_*$ переводить співвідношення (20) – (22) і (25) у модель [4], яка некоректна.

ВИСНОВКИ

Таким чином, згідно з поставленим у статті завдання – проаналізувати процедури побудови диференціальних рівнянь, які використовуються для моделювання макроекономічних процесів, було отримано значною мірою несподівані результати через виявлення цілого ряду протиріч. Під час досліджень, присвячених пошуку шляхів їх подолання, сформувалися альтернативні концепції математичного моделювання економічної динаміки. Проведений аналіз дозволив довести некоректність відомої моделі економічного зростання Харрода, з якої випливає можливість макроекономічного зростання на необмеженому інтервалі часу. Згадана некоректність обумовлена застосуванням апарату безперервного аналізу до співвідношень, які свідомо дискретні. Дослідження різницевої моделі Харрода дозволило дійти висновку про те, що на певному відрізку часу в розв'язку виникає протиріччя, та сформулювати у категоріях безперервного аналізу коректну модель Харрода, яка свідчить про неминучість виникнення економічної кризи. Запропонована модель базується на інтегральній залежності капіталу від інтенсивності доходу й надає конструктивні можливості для попередження кризи, у першу чергу, за допомогою апріорної оцінки відповідного моменту часу показано, зокрема, що активізація економіки наближає настання кризи. Слід підкреслити, що ця криза і задзначена вище особливість різницевого розв'язку узгодяться за часом. ■

ЛІТЕРАТУРА

1. Малярец Л. М., Воронин А. В., Гунько О. В. Теоретические проблемы экономического роста. *УСиМ*. 2016. № 1. С. 50–55.

2. Акаев А. А., Коротаев А. В., Малинецкий Г. Г. Прогноз и моделирование кризисов и мировой динамики. М. : Изд-во ЛКИ, 2010. 352 с.

3. Математичні методи в сучасних економічних дослідженнях : монографія / за заг. ред. Л. М. Малярець. Харків : Вид-во ХНЕУ, 2011. 272 с.

4. Канторович Л. В., Горстко А. Б. Оптимальные решения в экономике. М. : Наука, 1972. 229 с.

5. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. М. : Мир, 1978. 518 с.

6. Харрод Р. К теории экономической динамики. Новые выводы экономической теории и их применение в экономической политике // Классики кейнсианства. М. : Экономика, 1997. Т. 1. С. 39–194.

7. Теория капитала и экономического роста / под ред. С. С. Дзарасова. М. : Изд-во Москов. ун-та, 2004. 397 с.

8. Самуэльсон П. А. Основания экономического анализа. СПб. : Экономическая школа, 2002. 604 с.

9. Аллен Р. Математическая экономия. М. : Изд-во иностран. лит., 1963. 667 с.

10. Бергстром А. Построение и применение экономических моделей. М. : Прогресс, 1970. 176 с.

REFERENCES

Akayev, A. A., Korotayev, A. V., and Malinetskiy, G. G. *Prognoz i modelirovaniye krizisov i mirovoy dinamiki* [Forecasting and modeling of crises and world dynamics]. Moscow: Izd-vo LKI, 2010.

Allen, R. *Matematicheskaya ekonomiya* [Mathematical savings]. Moscow: Izd-vo inostran. lit., 1963.

Bergstrom, A. *Postroyeniye i primeneniye ekonomicheskikh modeley* [Construction and application of economic models]. Moscow: Progress, 1970.

Kantorovich, L. V., and Gorstko, A. B. *Optimalnyye resheniya v ekonomike* [Optimal solutions in the economy]. Moscow: Nauka, 1972.

Kech, V., and Teodoresku, P. *Vvedeniye v teoriyu obobshchennykh funktsiy s prilozheniyami v tekhnike* [Introduction to the theory of generalized functions with applications in engineering]. Moscow: Mir, 1978.

Kharrod, R. "K teorii ekonomicheskoy dinamiki. Novyye vyvody ekonomicheskoy teorii i ikh primeneniye v ekonomicheskoy politike" [To the theory of economic dynamics. New conclusions of economic theory and their application in economic policy]. In *Klassiki keynsianstva*, vol. 1, 39-194. Moscow: Ekonomika, 1997.

Malyarets, L. M., Voronin, A. V., and Gunko, O. V. "Teoreticheskiye problemy ekonomicheskogo rosta" [Theoretical problems of economic growth]. *USiM*, no. 1 (2016): 50-55.

Matematychni metody v suchasnykh ekonomichnykh doslidzhenniakh [Mathematical methods in modern economic research]. Kharkiv: Vyd-vo KhNEU, 2011.

Samuelson, P. A. *Osnovaniya ekonomicheskogo analiza* [Grounds for economic analysis]. St. Petersburg: Ekonomicheskaya shkola, 2002.

Teoriya kapitala i ekonomicheskogo rosta [The theory of capital and economic growth]. Moscow: Izd-vo Moskov. un-ta, 2004.