Педагогическо списание на
Великотърновския университет
„Св. св. Кирил и Методий“

Брой 1, 2017

ДИДАКТИЧЕСКИ МОДЕЛ ЗА РЕШАВАНЕ НА ПОКАЗАТЕЛНИ УРАВНЕНИЯ В ОБУЧЕНИЕТО ПО МАТЕМАТИКА

Иванка Минчева, Иво Андреев

DIDACTIC MODEL FOR SOLVING INDICATIVE OF EQUATIONS IN MATHEMATICS EDUCATION

Ivanka Mincheva, Ivo Andreev

Abstract: *The paper discusses the process of solving indicative equations. Some didactic modules like stages of solving, problems-components of any given problem, strategies for solving a problem, difficulties and mistakes that are expected to be made by pupils are analyzed. As a way of overcoming these issues and achieving understanding as well as efficient learning, teaching and mastering the indicative equations solving skills, systems of problems are proposed.*

Key words: *indicative equation, problem solving, system of problems*

Резюме: *Разработката разглежда процеса на решаване на показателни уравнения. Анализират се някои дидактически модули като етапи на решаване, задачи-компоненти на дадена задача, стратегии за решаване на задача, трудности и грешки, които се очаква да бъдат направени от учениците. Като начин за преодоляване на тези проблеми и достигане до разбиране, ефективно обучение и усвояване и усъвършенстване уменията за решаване на показателни уравнения се предлагат системи задачи.*

Ключови думи: *показателно уравнение, решаване на задачи, системи задачи*

ВЪВЕДЕНИЕ

Темата „Уравнения” е централна тема в училищния курс по математика, изучаването на която започва в първи и завършва в последния клас. Освен като цел на изучаване, уравненията в обучението по математика се използват и като средство при изучаване на почти всички теми от училищния курс по математика: изрази, функции и графики, лица и обеми, неравенства и др. Една от важните цели на обучението по математика е формирането на умение за моделиране с помощта на уравнения (Ганчев и др., 1997: 160).

Много задачи от практиката довеждат до решаване на показателни уравнения. Такива са например задачите от радиоактивно разпадане, задачите от триене на въже, намотано на барабан, задачите, свързани с охлаждане на телата, движение на телата по инерция в съпротивителна среда и т.н. (Русев, Барбарова, 1979: 66). Поради тези факти и често срещаните трудности при решаване на показателни уравнения е необходимо по-детайлно и задълбочено изследване и анализиране на проблемите в това отношение.

ИЗЛОЖЕНИЕ

Математическото моделиране на избраната тема преминава през следните етапи:

- Етапи на решаване на задачи;
- Понятия – компоненти и задачи – компоненти на дадена задача;
- Трудности и грешки при решаване на дадена група задачи;

- Системи задачи за усвояване решаването на уравнения от вида $a^{f(x)} = b$.

1. Етапи на решаване на задачи – дидактически и математически аспекти. Етапи на решаване на уравнение от вида $a^{f(x)} = b$.

Класическият модел на етапите на решаване на задачи, предложен от Дйорд Пойа, е следният:

- Разбиране (на задачата);
- Избор на стратегия (за решаване на задачата);
- Решаване (на задачата);
- Поглед назад.

Разбирането на уравнение от вида $a^{f(x)} = b$ е свързано основно с познаването, разпознаването на вида на задачата, откриване на елементите ѝ – лява, дясна страна на уравнението, коефициент/и, неизвестно, сравняване на даденото уравнение с общия вид на уравнението $a^{f(x)} = b$ и присъединяване или неприсъединяване на даденото уравнение към уравнение в общ вид.

Изборът на стратегия за решаване на даденото уравнение включва откриване на тъждествените преобразования над изразите в уравнението и на съответните теореми за еквивалентни уравнения. Тук от особена важност е познаване на етапите на решаване на показателно уравнение от вида $a^{f(x)} = b$, $a > 0$ и $a \neq 1$.

Решаването е последователно следване стъпките от предходния етап, като се внимава за пропуски и грешки при преобразованията и записване на отговора.

Погледът назад традиционно включва проверка за грешки, насочване на вниманието към основните етапи на решението, отнасянето на конкретното уравнение към други задачи от този вид и формулиране на изводи, извеждане на ключови знания и умения, необходими за решаване на дадения вид задачи.

2. Понятия – компоненти и задачи – компоненти на уравнението $a^{f(x)} = b$.

Основните понятия и задачи компоненти, необходими за решаване на уравнение от вида $a^{f(x)} = b$, са систематизирани в таблица 1 по-долу.

Таблица 1

Понятия-компоненти	Задачи-компоненти
Линейно уравнение с едно неизвестно Квадратно уравнениеи други уравнения от по-висока степен Неизвестно, решение (корен) на уравнение Тъждествени преобразования на изрази Еквивалентни преобразования на уравнения	Решаване на линейни уравнения с едно неизвестно Решаване на квадратни уравнения и други Уравнения от по-висока степен Прилагане на тъждествени преобразования на изрази Прилагане на еквивалентни преобразования на уравнения

3. Трудности и грешки при решаване на уравнение от вида $a^{f(x)} = b$.

Най-често срещаните трудности и грешки при решаване на разглежданото уравнение са свързани с дейностите:

- Разпознаване на задачата като уравнение от вида $a^{f(x)} = b$.
- Извършване на тъждествени преобразования, включващи действия с числа и изрази и прилагане на методите за разлагане на множители.
- Прилагане на теоремите за еквивалентност на уравнения.
- Коректно прилагане на свойствата на показателната функция.

- Несъобразяване на условията за дясната страна на уравнението (числото b), свързано с неразбиране на понятието степен.
- Разбиране на логическата операция дизюнкция при определяне и записване корените на уравнението.

4. Системи задачи (методи) за усвояване решаването на уравнения от вида $a^{f(x)} = b$.

С цел съобразяване с гореизложените идеи и постигане на ефективно обучение в решаване на уравнения от вида $a^{f(x)} = b$, предлагаме последователност от системи задачи, групирани според вариране (промяна) на някое несъществено свойство на уравнението (Минчева, 2014).

Система 1. Сравняване на степени с еднакви основи $\left(a^{f(x)} = a^{g(x)}\right)$.

Най-общо казано, решаването на показателни уравнения се свежда до преобразуването им в еквивалентни уравнения от вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, като се използват свойствата на степените с реален показател.

Задача 1. Да се реши уравнението $3^{x-5} = 81$.

Решение: Числото 81 може да се запише и като 3^4. Затова ще имаме $3^{x-5} = 3^4$. Това уравнение е еквивалентно на уравнението $x - 5 = 4$, следователно $x = 9$ (Ганчев, Запрянов 1969: 105).

Задача 2. Да се реши уравнението $\left(10^{5-x}\right)^{6-x} = 100\cdot$

Решение: Последователно се получава

$$\left(10^{5-x}\right)^{6-x} = 100 \Leftrightarrow 10^{(5-x)(6-x)} = 10^2 \Leftrightarrow (5-x)(6-x) = 2.$$

Следователно, даденото уравнение има два корена: $x_1 = 4$ и $x_2 = 7$.

От свойството монотонност на показателните функции следва, че ако $x_1 \neq x_2$, то $a^{x_1} \neq a^{x_2}$. Това дава основание да се формулира следното правило за решаване на уравнение от вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$:

$a^{f(x)} = a^{g(x)}$, при $a > 0$, $a \neq 1$
$a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$ (Лозанов и др. 2005: 80).

Задача 3. Да се реши уравнението $9^x - 2^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{2x-1}$.

Решение: Двете страни на даденото уравнение се делят с 2^x.

$$\frac{9^x}{2^x} - \frac{2^{x+1}}{2^x} = \frac{2^{x+2}}{2^x} - \frac{3^{2x-1}}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x - 2 = 4 - \frac{1}{3}\left(\frac{9}{2}\right)^x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x . \frac{4}{3} = 6 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{18}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^x = \frac{9}{2},$$

следователно $x = 1$ е решение (Лозанов и др., 2006: 68).

Система 2. Решаване чрез преобразуване (приложение на теоремите за еквивалентност на уравнения).

По-сложни показателни уравнения се преобразуват до основните показателни уравнения, като се използват свойствата на степените с реален показател.

Задача 4. Да се реши уравнението $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

Решение: Извършват се последователно преобразуванията:

$$3^{2x} + 3^{2x-1} = 2^{x+\frac{7}{2}} + 2^{x+\frac{1}{2}}$$

$$9^x\left(1+\frac{1}{3}\right)=2^x\left(8\sqrt{2}+\sqrt{2}\right)$$

$$\frac{4}{3}.9^x=9\sqrt{2}.2^x$$

$$\left(\frac{9}{2}\right)^x=\frac{27}{2\sqrt{2}}=\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Следователно даденото уравнение е еквивалентно на уравнението $\left(\frac{9}{2}\right)^x=\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$, единственият корен на което е $x=\frac{3}{2}$ (Давидов, Додунеков, 1984: 231).

Задача 5. Да се реши уравнението $9^x-2^{x+1}=2^{x+2}-3^{2x-1}$.

Решение: Последователно се получава

$$9^x-2^{x+1}=2^{x+2}-3^{2x-1}\Leftrightarrow 9^x+\frac{3^{2x}}{3}=2^x.2+2^x.2^2\Leftrightarrow 9^x+\frac{9^x}{3}=6.2^x\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\frac{4}{3}9^x=6.2^x\Leftrightarrow\frac{9^x}{2^x}=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\left(\frac{9}{2}\right)^x=\frac{9}{2}\Leftrightarrow x=1$ (Лозанов и др. 2006: 68).

Лесно се вижда, че Система 1. е за предпочитане, защото по-бързо се получава линейно уравнение относно x. Основните трудности и при двата метода са свързани с коректното прилагане на свойствата на показателната функция. Тези трудности могат да се преодолеят като предварително се припомнят действията със степени с еднакви основи или с еднакви степенни показатели.

Система 3. Въвеждане на ново неизвестно (субституция).

Някои показателни уравнения могат да се приведат към познато уравнение чрез подходящо полагане. Например за уравнение от вида $f\left(a^x\right)=0$ чрез полагането $a^x=u$, $u>0$, се получава $f(u)=0$.

Задача 6. Да се реши уравнението $5^{2x}-8.5^x+15=0$.

Решение: По вид уравнението “прилича” на квадратно уравнение, защото $5^{2x}=\left(5^x\right)^2$. Като се положи $5^x=u$ се получава $u^2-8u+15=0$, $u>0$. Корени на това уравнение са $u_1=3$ и $u_2=5$. От $5^x=3\Leftrightarrow 5^x=5^{\log_5 3}$ и от $5^x=5\Leftrightarrow 5^x=5^1$, се получава $x_1=\log_5 3$ и $x_2=1$ (Додунеков и др., 2002: 113).

Задача 7. Да се реши уравнението $9^x-2^{x+1}=2^{x+2}-3^{2x-1}$.

Решение: Полага се $\left(\frac{9}{2}\right)^x=y$ и тогава $9^x=y.2^x$. Получава се следното уравнение:

$$y.2^x-2.2^x=4.2^x-\frac{y.2^x}{3}\ /:2^x$$

$$y-2=4-\frac{y}{3}$$

$$\frac{4}{3}y = 6$$

$$y = \frac{9}{2}$$

$$\Rightarrow 9^{x} = \frac{9}{2}.2^{x} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{2}\right)^{x} = \frac{9}{2} \Rightarrow x = 1.$$

Като сравним това решение с решенията, свързани с прилагането на първите два метода, се вижда, че този метод води до най-бързо решение относно алгебричните преобразувания (до идеята за избора на ново неизвестно се достига, стига да се забележи, че участват само степени на 2 и 9 с еднакви степенни показатели).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Систематизирането на задачи е едно от основните дидактически средства за съзнателно и трайно усвояване на дадена група знания и за създаване на умения за решаване на разнообразни групи задачи. Така се постига и гъвкавост на мисленето, осигуряваща по-бързо и лесно решаване на задача от изучен вид, както и на задача, чието решение включва дадената задача. Считаме, че предложените идеи биха били полезни за теорията и практиката на обучението по математика и могат да се прилагат от всички, участващи в процеса на обучение или имащи отношение към него – ученици, учители, родители, студенти, подготвящи се за учители по математика, университетски преподаватели и автори на учебници по математика (Минчева, 2014).

ЛИТЕРАТУРА

Ганчев, И., З. Запрянов, (1969). *Уравнения*. София: Народна просвета. // **Ganchev, I., Z. Zapriyanov. (1969).** *Uravneniya*. Sofiya: Narodna prosveta.

Ганчев, И., Л. Портев, Б. Баев, П. Тодорова. (1997). *Методика на обучението по математика 5.-7. клас*. Пловдив: Макрос 2000. // **Ganchev, I., L. Portev, B. Baev, P. Todorova, (1997).** *Metodika na obuchenieto po matematika 5.-7. klas*. Plovdiv: Makros 2000.

Давидов, Л., С. Додунеков. (1984). *Елементарна алгебра и елементарни функции*. София: Народна просвета. // **Davidov, L., S. Dodunekov. (1984).** *Elementarna algebra i elementarni funkcii*. Sofiya: Narodna prosveta.

Додунеков, С., Г. Кожухарова, М. Христова, Д. Капралова, С. Дойчев. (2002). *Математика за 10. клас. Профилирана подготовка*. София: Регалия 6. // **Dodunekov, S., G. Kojuharova, M. Hristova, D. Kapralova, S. (2002).** *Matematikaza 10. klas. Profiliranapodgotovka*. Sofiya: Regaliya 6.

Лозанов, Ч., Т. Витанов, П. Недевски. (2005). *Математика за 11. клас. Профилирана подготовка*. София: Анубис. // **Lozanov, Ch., T. Vitanov, P. Nedevski. (2005).** *Matematika za 11. klas. Profilirana podgotovka*. Sofiya: Anubis.

Лозанов, Витанов, Недевски (2006). Лозанов, Ч., Т. Витанов, П. Недевски. *Математика за 10. клас. Профилирана подготовка*. София: Анубис. // **Lozanov, Ch., T. Vitanov, P. Nedevski. (2006).** *Matematika za 10. klas. Profilirana podgotovka*. Sofiya: Anubis.

Минчева, И. (2014). *Дидактически идеи за решаване на линейни модулни уравнения от вида* $|ax + b| = c$ *в обучението по математика*. Научни трудове на Русенския университет – 2014, том 53, серия 6.2 Педагогика и психология. Русе: Издателски център при Русенския университет "Ангел Кънчев". // **Mincheva, I. (2014).** *Didakticheski idei za reshavane na lineini modulni uravneniya ot vida* $|ax + b| = c$ *v obuchenieto po matematika*. Nauchni trudove na Rusenskiya universitet – 2014, tom 53, seriya 6.2 Pedagogika i psihologiya. Ruse: Izdatelski centar pri Rusenskiya universitet "Angel Kanchev".

Русев, Р., А. Барбарова. (1979). *Алгебра за 2. курс*. София: Народна просвета. // **Rusev, R., A. Barbarova. (1979).** *Algebra za 2. kurs*. Sofiya: Narodna prosveta.