SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS
International Scientific Journal
Theoretical & Applied Science

**p-ISSN:** 2308-4944 (print) **e-ISSN:** 2409-0085 (online)

**Year:** 2018 **Issue:** 04 **Volume:** 60

**Published:** 30.04.2018 http://T-Science.org

**Unona Krahmaleva**
Candidate of Science
Taraz State University named M.H.Dulaty

**Gaukhar Ray**
graduate student of the 2nd course of the specialty "Mathematics»
Taraz State University named M.H.Dulaty

**SECTION 2. Applied mathematics. Mathematical modeling.**

# THE SOLUTION OF INHOMOGENEOUS PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN THE MAPLE ENVIRONMENT

***Abstract***: *The main analytical methods for solving inhomogeneous problems of mathematical physics are known to be the method of bringing to a homogeneous problem and the Greenberg method. The use of the mathematical package Maple in solving these problems, despite the fact that the tools package is highly developed and easy to use, requires special developments and approaches.*

***Key words***: *analytical methods, inhomogeneous problems, Maple.*
***Language***: *Russian*
***Citation***: Krahmaleva U, Ray G (2018) THE SOLUTION OF INHOMOGENEOUS PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS IN THE MAPLE ENVIRONMENT. ISJ Theoretical & Applied Science, 04 (60): 301-304.
***Soi***: http://s-o-i.org/1.1/TAS-04-60-54 ***Doi***: crossref https://dx.doi.org/10.15863/TAS.2018.04.60.54

## РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В СРЕДЕ MAPLE

***Аннотация***: *Основными аналитическими методами решения неоднородных задач математической физики, как известно, являются метод приведения к однородной задаче и метод Гринберга. Использование математического пакета Maple при решении данных задач, несмотря на то, что инструментарий пакета высоко развит и удобен для применения, требует особых разработок и подходов.*

***Ключевые слова***: *аналитические методы, неоднородные задачи, Maple.*

### Introduction

Рассмотрим неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных:

$$L_x(u)+M_y(u)=F(x,y),\quad a<x<b, c<y<d \qquad (1)$$

$(a,b)$ - конечный интервал, $(c,d)$ - конечный или бесконечный интервал, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ - непрерывные функции в $(a,b)$, $L_x(u)$, $M_y(u)$ - дифференциальные линейные операторы:

$$L_x(u)=\frac{1}{r(x)}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u\right], \qquad (2)$$

$$M_y(u)=A\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu , \qquad (3)$$

### Materials and Methods

Искомая функция $u=u(x,y)$ по переменной $x$ удовлетворяет одному из условий первого, второго или третьего рода соответственно:

$$u\big|_{x=a}=f_a(y),\quad u\big|_{x=b}=f_b(y), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=a}=f_a(y),\quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=b}=f_b(y), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_a u\big|_{x=a} = f_a(y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + h_b u\big|_{x=b} = f_b(y), h_a > 0, h_b > 0 \qquad (6)$$

Также для функции $u = u(x, y)$ выполняются условия по переменной $y$, зависящие от типа уравнения (1). Тип уравнения определяется знаком $A$. Если $A > 0$, то (1) - уравнение эллиптического типа и на концах интервала $(c, d)$ выполняются условия $(c, d)$ первого, второго, или третьего рода:

$$u\big|_{y=c} = \varphi_c(x), \quad u\big|_{y=d} = \varphi_d(x), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=c} = \varphi_c(x), \quad \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{y=d} = \varphi_d(x), \qquad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} - h_c u\big|_{y=c} = \varphi_c(x),$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + h_d u\big|_{y=d} = \varphi_d(x) \qquad (6)$$

Уравнение (1) гиперболического типа, если $A < 0$. В этом случае, переменная $y$ - время, $y \in (c, +\infty)$ и условия имеют вид

$$u\big|_{y=c} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=c} = \psi(x). \qquad (7)$$

Если $A = 0$, то (1) - уравнение параболического типа; переменная $y$ - время, $y \in (c, +\infty)$. Тогда условия таковы

$$u\big|_{y=c} = \varphi(x). \qquad (8)$$

Применяя метод приведения к однородной задаче, искомую функцию необходимо представить в виде суммы двух неизвестных функций $u = u_1 + u_2$. Одну из функций подбирают таким образом, чтобы и уравнение для этой функции было однородным и граничные условия по какой-либо переменной относились к однородным. Вторую функцию определяют из полученной однородной задачи, решение которой находят методом Фурье.

Решение неоднородной задачи методом Гринберга находится, как и по методу приведения к однородной задаче в виде двух функций $u = u_1 + u_2$. Но одна из функций подбирается так, чтобы удовлетворяла только неоднородным граничным условиям. Вторая функция является решением однородной задачи.

Рассмотрим методику решения дифференциального уравнения в частных производных с неодородными граничными условиями. Подключаем специальный пакет для решения дифференциальных уравнений в частных производных PDEtools , пакет линейной алгебры linalg :

*restart*; *with*(*PDEtools*) : *with*(*linalg*) :

Вводятся значения $a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_1, a_2, a_0, d$ уравнения, само уравнение, начальные и граничные данные :

```
a11 := _; b := _ : a22 := _; a1 := _; a2 := _; a0 := _; d := _; a12 := b/2; a21 := a12;
PDE1 := a11·diff(u(x, t), x, x) + 2·a12·diff(u(x, t), x, t) + a22·diff(u(x, t), t, t) + a1
    ·diff(u(x, t), x) + a2·diff(u(x, t), t) + a0·u(x, t) + d = 0;
inC`:=_`;
```

Задаем решение в виде функции с соответствующими переменными по уравнению. Например, $u(x,t) = v(x) + v(x,t)$ для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

Функцию $v(x)$ подбираем, решая уравнение:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

```
u := (x, t) →v(x) + v(x, t); eq1 := diff(v(x), x$2) = 0; dsolve(eq1, v(x));
```

Вторую функцию $v(x,t)$ находим из однородного уравнения:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

и вводим $c_{11}, c_{12}, c_{22}, c_1, c_2, c_0, d$ уравнения, само уравнение:

$$c11 := \_;\ b1 := \_ : c22 := \_;\ c1 := \_;\ c2 := \_;\ c0 := \_;\ d1 := \_;\ c12 := \frac{b1}{2};\ c21 := c12;$$

$$PDE2 := c11 \cdot diff(v(x,t),x,x) + 2 \cdot c12 \cdot diff(v(x,t),x,t) + c22 \cdot diff(v(x,t),t,t) + c1 \cdot diff(v(x,t),x) + c2 \cdot diff(v(x,t),t) + c0 \cdot v(x,t) + d1 = 0;$$

Выполняем разделение переменных:

$res := pdsolve(PDE2, HINT = F1(x) \cdot F2(t));$
$res1 := op(1, res);\ res2 := op(2, res);$
$res2[1];$
$s1 := op(1, res2[1]);\ s2 := op(2, res2[1]);$

Получим два обыкновенных дифференциальных уравнения $s1$ и $s2$. Одно из полученных уравнений с начальными условиями $u(x,0) = u(l-x)$ представляет задачу Штурма – Лиувилля с однородными условиями по переменной $x$. Находим общее решение этого уравнения, для определенности , пусть это уравнение $s2$ и составляем систему однородных условий по граничным условиям:

$assume(\text{lambda} > 0) : dsolve(\text{PDE2}, \text{F1}(x));$
$F1 := unapply(rhs(\%), x);$
$\text{e1} := \text{F1}(0) = 0;\ \text{e2} := \text{F1}(1) = 0;$
$sist := \{\text{e1}, \text{e2}\};$

Вычисляем определитель полученной системы $sist := \{\text{e1}, \text{e2}\};$ Затем приравниваем определитель нулю и получим уравнение для нахождения собственных значений:

$assume(\text{lambda} > 0) : dsolve(\text{PDE2}, \text{F1}(x));$
$F1 := unapply(rhs(\%), x);$
$\text{e1} := \text{F1}(0) = 0;\ \text{e2} := \text{F1}(1) = 0;$
$sist := \{\text{e1}, \text{e2}\};$
$A := linalg[\text{genmatrix}](sist, \{\_C1, \_C2\});$
$\text{Delta} := convert(linalg[\det](A), trig);$

Зная собственные значения, находим соответствующие собственные функции:

$F1 := F1;\ assume(k, posint);$
$subs(\text{lambda} = ev(\text{k}), \text{PDE2});$
$dsolve(\{\%, F1(0) = 0, F1(1) = 0\}, F1(x));$

Найденные собственные функции нормируем. Таким образом, уравнение $s2$ решено. Находим общее решение уравнения $s1$:

$\text{PDE3} := \text{lhs}(s1) + a^2 \cdot ev(k) \cdot F2(t);\quad dsolve(\text{PDE3}, \text{F2}(t));$

Решение исходной задачи находим в виде ряда:

$$spr := Sum\left(C(k) \cdot exp\left(-ev(k) \cdot a^2 \cdot t\right) \cdot ef(k,x), k = 1..infinity\right);$$

Из начальных условий определяем коэффициенты этого ряда.

**Conclusion**

Решение неоднородных задач уравнения математической физики, согласно вышеописанной методики показывает о введении необходимых поправок, исходя из исходных данных решаемой задачи. И эти поправки вводятся , начиная с подбора функции.

**References:**


1. Bitsadze A.V. (1982) Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1982,-336 p.
2. Vladimirov V.S. (1981) Uravneniya matematicheskoy fiziki. M.: Nauka, 1981,-512 p.
3. Mikhaylov V.P. (1983) Differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi. M.: Nauka, 1983,-424 p.
4. D.P. Goloskokov (2004) Uravneniya matematicheskoy fiziki. Reshenie zadach v

sisteme Maple uchebnik dlya vuzov - SPb.: Piter, 2004.-539 p.
5. D'yakonov V.P. (2006) Maple 9.5/10 v matematike, fizike i obrazovanii Izd: Piter.
6. Govorukhin V. N., Tsibulin V. G. (1997) Vvedenie v Maple. Matematicheskiy paket dlya vsekh. — M.: Mir, 1997. — p. 208. — ISBN 5-03-003255-X.
7. D'yakonov V.P. (1998) Matematicheskaya sistema Maple V R3/R4/R5. — M.: SOLON=Press, 1998. — p. 400. — ISBN 5-85954-081-7.
8. D'yakonov V. P. (2001) Komp'yuternaya matematika. Teoriya i praktika. — M.: Nolidzh, Piter, 1999, 2001. — p. 1296. — ISBN 5-89251-065-4.
9. Tsyganov A.V. (2000) Kurs lektsiy Kvantovaya mekhanika s Maple. Sankt-Peterburg, 2000. http://www.exponenta.ru/educat/systemat/tsiganov/00.asp
10. D'yakonov V. P. (2001) Maple 6 Uchebnyy kurs. — SPb.: Piter, 2001. — p. 608. — ISBN 5-318-00183-1.
11. Matrosov A. V. (2001) Maple 6: Reshenie zadach vysshey matematiki i mekhaniki: Prakticheskoe rukovodstvo. 2001 g. 528 p. ISBN 5-94157-021-X
12. D'yakonov V. P. (2002) Maple 7 Uchebnyy kurs. — SPb.: Piter, 2002. — p. 672. — ISBN 5-318-00719-8.
13. D'yakonov V. P. (2003) Maple 8 v matematike, fizike i obrazovanii. — M.: SOLON=Press, 2003. — p. 656. — ISBN 5-98003-038-7.
14. Vasil'ev A. N. (2003) Maple 8. Samouchitel'. — M.: Dialektika, 2003. — p. 352. — ISBN 5-8459-0452-8.


THOMSON REUTERS
Indexed in Thomson Reuters