

DOI: 10.18454/2079-6641-2018-25-5-74-82

УДК 519.25 +519.237+ 550.34.01

МОДЕЛЬ ПРОЦЕССОВ РЕЛАКСАЦИИ В РАЗЛИЧНЫХ РЕЖИМАХ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЙ

О.В. Шереметьева^{1, 2}

¹ Институт космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН, 684034, Камчатский край, с. Паратунка, ул. Мирная, 7

² Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032, г. Петропавловск-Камчатский край, ул. Пограничная, 4

E-mail: olga.v.sheremetyeva@gmail.com

Рассмотрена модель пяти режимов деформационной активности на основе составного процесса Пуассона и его фрактальных обобщений. Проведено сравнение с зависимостями экспериментально полученными авторами работ [1, 2].

Ключевые слова: функция Миттаг-Леффлёра, масштабные законы, стохастическая модель, пластические деформации, релаксационные процессы.

© Шереметьева О. В., 2018

MSC 60G99

MODEL RELAXATION PROCESSES IN THE DIFFERENT MODES OF PLASTIC DEFORMATION

O. V. Sheremetyeva^{1, 2}

¹ Institute of Cosmophysical Researches and Radio Wave Propagation Far-Eastern Branch, Russian Academy of Sciences, 684034, Kamchatskiy Kray, Paratunka, Mirnaya st., 7, Russia

² Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky, Pogranichnaya st., 4, Russia

E-mail: olga.v.sheremetyeva@gmail.com

A model of five modes of deformation activity based on the compound Poisson process and its fractal generalizations is considered. Comparison of the analytical dependences with the experimental ones obtained by the authors Carbon and Buck, was carried out [1, 2].

Key words: Mittag-Leffler function, scale laws, stochastic model, plastic deformations, relaxation processes.

© Sheremetyeva O.V., 2018

Введение

В рамках работы [3] обсуждались пять видов деформационного процесса: нормальные (фоновые) пульсации, их замедление (замирания), затем активизация (разрядка), которая имеет три фазы: форшоков, главного удара и афтершоков, - это реализуются те события, которые не состоялись при замирании, и снова фоновый режим. Процесс рассматривался с точки зрения дислокационных изменений, вызванных работой внешних сил, которые поддерживают критический уровень упругих напряжений. Случайные дислокационные изменения в заданном объеме V и временном интервале T рассматривались как однопараметрический процесс

$$L_{V,T}(t) = \sum_{k=0}^N L(x_k, t_k),$$

где x_k, t_k – координаты, а $L(x_k, t_k)$ – пространственный масштаб k -ой дислокации.

В первом приближении случайные величины x_k, t_k и $L(x_k, t_k)$ можно считать независимыми и процесс – пуассоновским. Такое описание неприменимо в случае роста плотности дислокаций, а следовательно, увеличения их связанности и образования дислокационного кластера, в котором плотность дислокаций велика настолько, что перекрываются пространственно-временные радиусы влияния, зависящие от $L(x_k, t_k)$ [4, 5]. Такие кластеры образуют последовательности форшоков и афтершоков (разреженная упаковка дислокаций), главный удар (плотная упаковка). С этой точки зрения процесс Пуассона может рассматриваться как фоновый режим, а отклонения от него, связанные с локальным упрочнением или ослаблением среды, описываются фрактальным процессом Пуассона.

Данное исследование является логическим продолжением работ [4, 5]. В нём будет рассмотрена математическая модель деформационной активности, построены зависимости, описывающие различные режимы деформационного процесса и проведено сравнение полученных аналитических закономерностей с имеющимися результатами обработки данных сейсмических каталогов.

Математическая модель режимов деформационного процесса

Процессы дислокационных изменений имеют одинаковую структуру на разных масштабных уровнях деформационного процесса, поэтому достаточно рассмотреть процесс пластических деформаций для одного из них.

Пусть зафиксирован пространственный масштаб L . Пять режимов деформационной активности можем рассматривать как пять состояний, в которых может находиться деформационный процесс: s_1 – фоновый режим (фоновые или нормальные пульсации), s_2 – замирания (замедление пульсаций), s_3 – режим активизации в фазе форшоков, s_4 – режим активизации в фазе главного удара, s_5 – режим активизации в фазе афтершоков. Опишем каждое состояние и вероятность его сохранения или перехода в другое состояние используя понятие фрактального процесса Пуассона и функцию Миттаг-Леффлёра – фрактальное обобщение экспоненты

$$E_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(1 + \nu k)},$$

где $0 < \nu \leq 1$, в случае $\nu = 1$ получаем обычную экспоненциальную зависимость, описывающую простейший поток событий (процесс Пуассона).

Релаксационной характеристикой деформационного процесса является фрактальная функция Миттаг-Леффлёра со степенным аргументом

$$E_{\nu}(-(\mu t)^{\tilde{\nu}}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu t)^{\tilde{\nu}k}}{\Gamma(1 + \nu k)}, \quad (1)$$

выражающая вероятностные характеристики этого процесса. Сама функция $E_{\nu}(x)$ даёт описание эффектов памяти (эридитарность процесса, при уменьшении ν память увеличивается) (рис. 1б), а степенной аргумент $(\mu t)^{\tilde{\nu}}$ фрактальной функции Миттаг-Леффлёра отвечает за эффекты последействия (нелокальность процесса, процессы ветвления, которые проявляются как фрактальное замедление потока, чем ближе к нулю значение $\tilde{\nu}$, тем меньше интенсивность потока) (рис. 1а). Вместе $(\mu t)^{\tilde{\nu}}$ и $E_{\nu}(x)$ дают замедленную релаксацию [3].

Таким образом, при варьировании параметров ν , $\tilde{\nu}$ можно получить различные режимы деформационного процесса либо с преобладанием памяти (нелокальности во времени), либо процессов ветвления (пространственной нелокальности). В данном исследовании будем считать параметры равными друг другу $\nu = \tilde{\nu}$.

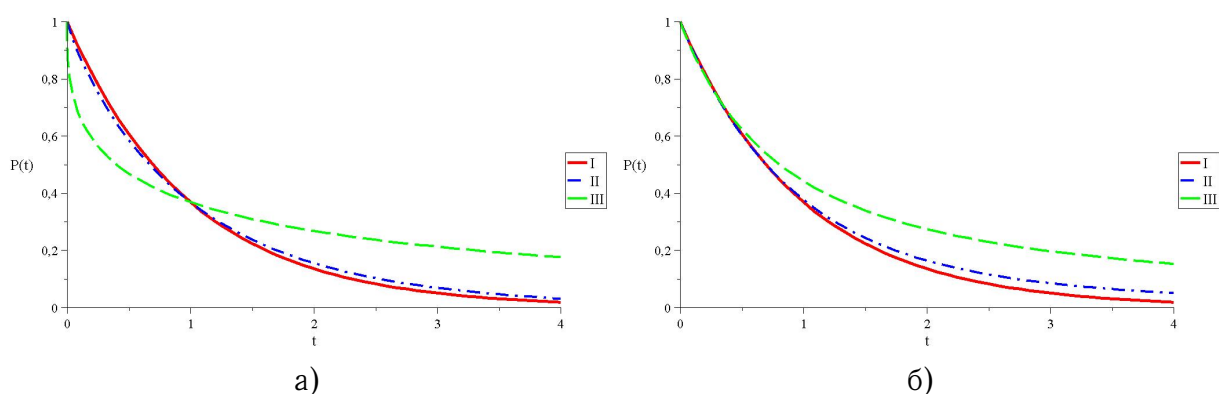


Рис. 1. Изменение характера поведения функции Миттаг-Леффлёра при вариации параметров ν , $\tilde{\nu}$: а) график I – график функции $e^{-\mu t}$ ($\nu = \tilde{\nu} = 1$), график II – график функции (1) при $\nu = 1$, $\tilde{\nu} = 0.9$, график III – график функции (1) при $\nu = 1$, $\tilde{\nu} = 0.4$, б) график I – график функции $e^{-\mu t}$ ($\nu = \tilde{\nu} = 1$), график II – график функции (1) при $\nu = 0.9$, $\tilde{\nu} = 1$, график III – график функции (1) при $\nu = 0.4$, $\tilde{\nu} = 1$

Состояние s_1 . В фоновом режиме деформационный процесс является пуассоновским (поток независимых событий) со средней интенсивностью μ . Тогда вероятность перехода процесса в следующее состояние зависит от времени экспоненциально и определяется как

$$P_{12}(t) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - E_1(-\mu t),$$

а вероятность сохранения процесса в исходном состоянии (рис.2)

$$P_{11}(t) = e^{-\mu t} = E_1(-\mu t).$$

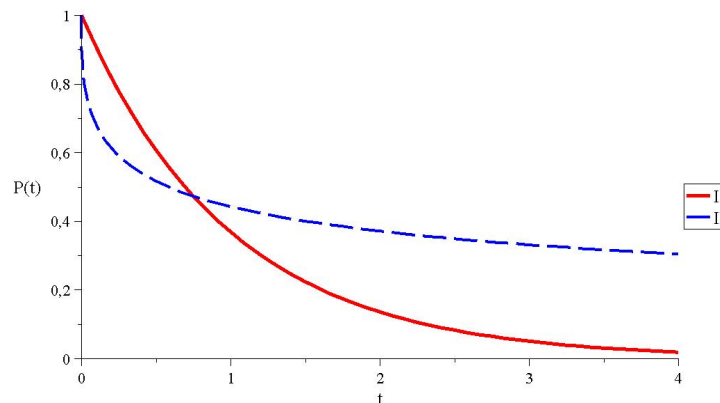


Рис. 2. I – график экспоненциального распределения P_{11} , II – график распределения вероятности P_{22}

Состояние s_2 . Отклонение от фонового режима может произойти, если возникает локальное упрочнение или ослабление среды (изменение реологии). При упрочнении среды возникает область, в которой пластический процесс замедляется, и поток событий ослабевает (область сейсмического затишья или сейсмической брешы [6], в которой формируется деформационная неоднородность). В результате возникновения неоднородности в объёме V исходная интенсивность μ потока событий падает. Временной промежуток ожидания каждого последующего события увеличивается, что говорит о появлении памяти (эредитарности) у процесса, которая связана с поведением вероятности сохранения его в исходном состоянии [7, 8] и может быть описана с помощью фрактальной функции Миттаг-Леффлёра с параметрами $\mu t > 1$ и $0 < \nu < 1$ (рис.2)

$$P_{22}(t) = E_{\nu}(-(\mu t)^{\nu}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\mu t)^{\nu k}}{\Gamma(1 + \nu k)}.$$

Как видно, вероятность $P_{22}(t)$ сохранения процесса в исходном состоянии в начальный момент времени убывает сильнее, чем вероятность $P_{11}(t)$ для потока независимых событий, но с увеличением временного промежутка вероятность $P_{22}(t)$ меняется медленнее, появляется затянутость процесса во времени (рис.2). Отклонение $P_{22}(t)$ от обычной экспоненты указывает на наличие эффектов последействия и памяти у фрактального процесса, которые обусловлены тем, что несостоявшиеся события локализованы и образуют кластер связанных между собой событий.

Отметим, что параметр ν отвечает за фрактальную размерность распределения событий на временном интервале [9]. Таким образом, упрочнение среды меняет фрактальность процесса (статистику событий), что проявляется как замедленная релаксация, обусловленная эффектами памяти, которые возникли в результате упрочнения.

Состояние s_3 . Несостоявшиеся в затишье события можно рассматривать как кластер, энергия которого приводит к росту упругих напряжений, в результате чего упрочнение среды преодолевается, а накопленная дополнительная упругая энергия высвобождается. Эту активизацию можно рассматривать как событие более высокого масштаба по отношению к тем событиям, которые не состоялись во время затишья, вызванного локальным упрочнением среды, и энергетика деформационного

возмущения должна соответствовать сумме энергий несостоявшихся событий. Результатом накопления упругой энергии в состоянии s_2 является возникающее в некоторый момент времени t_1 деформационное возмущение и переход в состояние s_3 – фазу форшоков. Для аналитического описания состояния s_3 воспользуемся вероятностью возникновения главного удара в момент времени t^* , т. е. вероятностью P_{34} перехода из состояния s_3 в состояние s_4 , которую зададим также с помощью возрастающей фрактальной функции Миттаг-Леффлёра следующим образом (рис.3а):

$$P_{34}(t) = E_{\nu}(-[-\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-[-\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu})^k}{\Gamma(1+\nu k)},$$

где $\tilde{\mu}$ – средний поток событий в деформационном возмущении, $0 < \nu \leq 1$. Тогда вероятностью сохранения состояния s_3 (рис. 3а), т. е. отсутствия главного удара, будет

$$P_{33}(t) = 1 - P_{34}(t) = 1 - E_{\nu}(-[-\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu}).$$

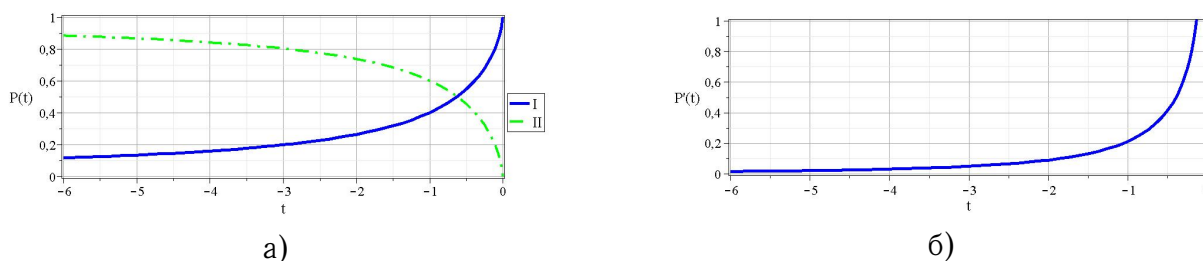


Рис. 3. а) I – график распределения вероятности P_{34} , II – график распределения вероятности P_{33} , б) график распределения плотности потока форшоков (обратный закон Омори)

При дифференцировании выражения P_{34} получается распределение нарастающего потока форшоков, которое можно интерпретировать как обратный закон Омори (рис.3б)

$$\frac{dP_{34}(t)}{dt} = \frac{dE_{\nu}(-[-\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu})}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \tilde{\mu} \nu k (-\tilde{\mu}(t-t^*))^{\nu k-1}}{\Gamma(1+\nu k)}.$$

Состояние s_5 . По достижении функцией $P_{34}(t)$ значения единица процесс переходит в состояние s_4 . Фаза афтершоков может быть определена аналогичным образом, используя выражение для вероятности сохранения главного удара (рис.4а), т. е. вероятности сохранения состояния s_4 ,

$$P_{44}(t) = E_{\nu'}(-[\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu'}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-[\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu'})^k}{\Gamma(1+\nu'k)},$$

где $0 < \nu' \leq 1$.

Дифференцируя это выражение, получим плотность убывающего потока афтершоков, т. е. закон Омори (рис.4б),

$$\frac{dP_{44}(t)}{dt} = \frac{dE_{\nu'}(-[\tilde{\mu}(t-t^*)]^{\nu'})}{dt} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \tilde{\mu} \nu' k (\tilde{\mu}(t-t^*))^{\nu'k-1}}{\Gamma(1+\nu'k)}. \quad (2)$$

В таком случае, вероятность не сохранения главного удара (рис.4а), т. е. перехода из состояния s_4 в состояние s_5 к фазе афтершоков, будет

$$P_{45}(t) = 1 - P_{44}(t).$$

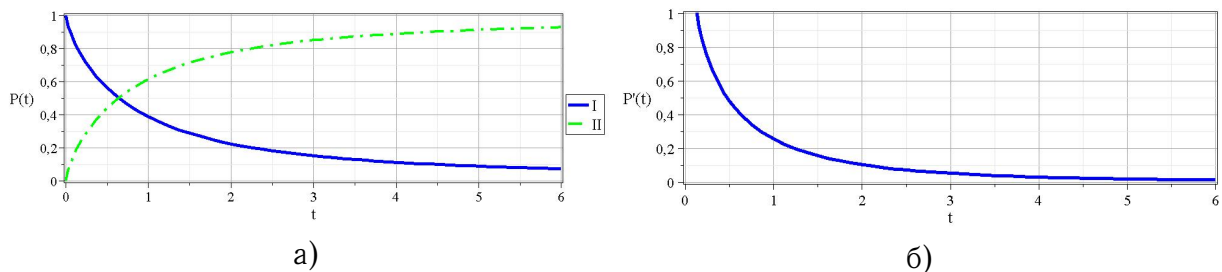


Рис. 4. а) I – график распределения вероятности P_{44} , II – график распределения плотности вероятности P_{45} , б) график распределения убывающего потока афтершоков (закон Омори)

Сравнение с зависимостями, полученными по данным сейсмических каталогов

На основании построенной модели аппроксимируем зависимости, полученные авторами статей [1, 2]. В них исследуются полные каталоги сейсмических событий [1, 2] и афтершоковые последовательности [1]. В исследовании [1] показано, что масштабный закон для афтершоковых последовательностей отличается от аналогичного закона для последовательностей главных событий из общих каталогов. Как считают авторы, это связано с тем, что даже слабые корреляции между афтершоками сохраняются в течение длительного времени в одном и том же регионе, и это существенно отличается от того, что наблюдается для некоррелированных основных сейсмических событий (главных ударов) [2]. Полученные распределения плотности потока событий представлены в двойном логарифмическом масштабе, множества A и B взяты из полных каталогов главных событий, а множества C и D – это афтершоковые последовательности.

Для аппроксимации использовалась плотность вероятности P_{45} не сохранения главного удара (2).

На масштабный закон, полученный авторами [1] для афтершоковых последовательностей, достаточно хорошо ложится кривая с параметрами $\tilde{\mu} = 0.75$ и $\tilde{\nu} = 0.5$ (рис.5а). Отметим, что хорошее приближение получается и при помощи плотности вероятности, заданной функцией (1), и в этом случае наилучшее приближение получено для параметров $\nu = 0.7$ и $\tilde{\nu} = 0.4$. Масштабный закон, полученный на основе последовательностей из общих каталогов, аппроксимировать при одинаковых значениях ν и $\tilde{\nu}$ не удалось. График, близкий к экспериментальному закону, получен для значений параметров $\tilde{\mu} = 2$, $\nu = 1.15$ и $\tilde{\nu} = 0.4$ (рис.5б).

В работе [2] исследовались только последовательности событий из общего каталога землетрясений. Авторами были выбраны пять пространственных масштабов разложения и три ограничения на энергии сейсмических событий.

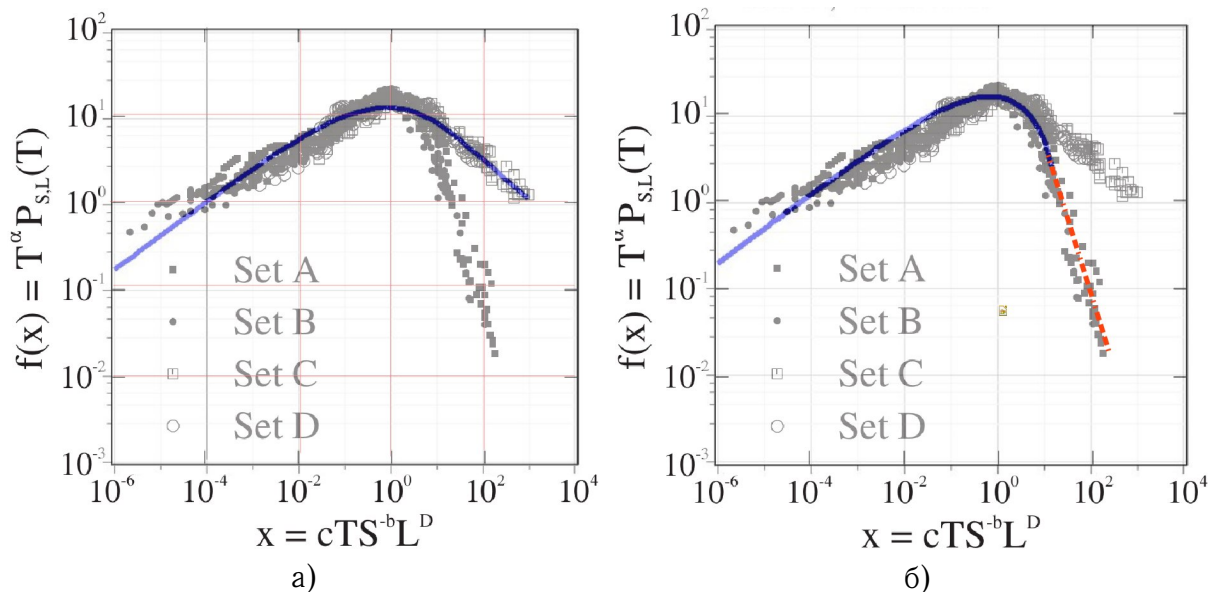


Рис. 5. а) I – аппроксимация масштабного закона для aftershockовых последовательностей (график синего цвета), б) аппроксимация масштабного закона для последовательностей главных событий (график синего цвета, асимптотика выделена красным цветом)

Полученные экспериментальные законы масштабирования аппроксимированы с использованием фрактальной функции Миттаг-Леффлера (1) для значений параметров равных $\tilde{\mu} = 100$, $\nu = 1.3$ и $\tilde{\nu} = 0.2$ (рис.6а) и $\tilde{\mu} = 500$, $\nu = 0.85$ и $\tilde{\nu} = 0.2$ (рис.6б). Изменяя параметр ν и масштабный коэффициент $\tilde{\mu}$ могут быть получены графики для остальных случаев.

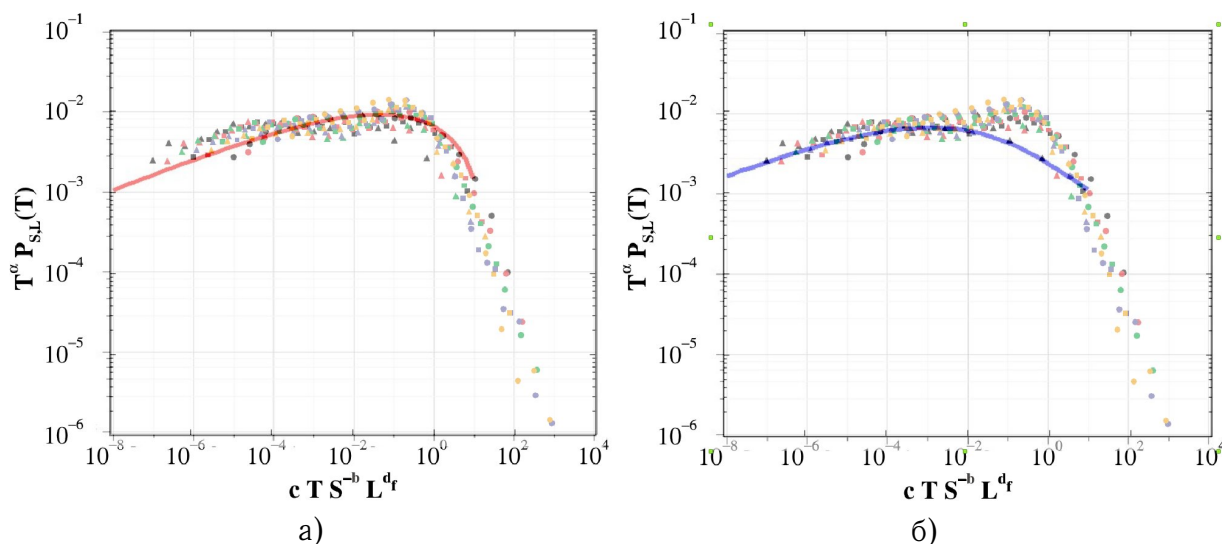


Рис. 6. Аппроксимация масштабного закона для последовательностей главных событий [2] (графики красного и синего цветов)

Обсуждение и выводы

В работе деформационный процесс рассмотрен с вероятностной точки зрения как переход из одного состояния (режима) в другое. Предложенная аппроксимация с использованием фрактальной функции Миттаг-Леффлёра учитывает историю процесса (свойства нелокальности и во времени, и в пространстве) и является логическим продолжением и расширением модели пуассоновского процесса с независимыми событиями. Кроме того, фрактальный параметр ν определяется параметрами среды, что открывает возможности для более полного описания её свойств.

На данный момент хорошо исследованными являются закономерности в последовательностях афтершоков. Проведённое сравнение зависимостей, полученных авторами исследований [1, 2] в результате обработки данных сейсмических каталогов, с модельными показало, что варьирование фрактальных параметров и масштабного коэффициента позволяет достаточно хорошо аппроксимировать эти зависимости с помощью функции Миттаг-Леффлёра. Отметим, что в случае афтершоковых последовательностей аппроксимация функцией (2) достигалась при близких значениях параметров ν и $\tilde{\nu}$. Для полных каталогов аппроксимация получена только при значительно отличающихся значениях фрактальных параметров.

Список литературы

- [1] Carbone V., Sorriso-Valvo L., Harabaglia P., Guerra I., “Unified scaling law for waiting times between seismic events”, *Europhys. Lett.*, **6**:71 (2005), 1036–104210.
- [2] Bak P., Christensen K., Danon L., Scanlon T., “Unified Scaling Law for Earthquakes”, *Phys. Rev. Lett.*, **88**:17. (2002), 178501-1–178501-4..
- [3] Shevtsov B., Sheremetyeva O., “Fractional models of seismoacoustic and electromagnetic activity”, *E3S Web of Conferences*, **20** (2017), 02013. DOI: 10.1051/e3sconf/20172002013.
- [4] Шевцов Б. М., Сагитова Р. Н., “Статистический анализ сейсмических процессов на основе диффузионного подхода”, *ДАН*, **426**:2 (2009), 254–256. [Shevtsov B. M., Sagitova R. N., “Statistical analysis of seismic processes on the basis of the diffusion approach”, *Doklady Earth Sciences*, **426**:1 (2009), 642–644].
- [5] Шевцов Б. М., Сагитова Р. Н., “Диффузионный подход в статистическом анализе сейсмичности Камчатки”, *Вулканология и сейсмология*, 2012, № 2, 56–66. [Shevtsov B. M., Sagitova R. N., “A diffusion approach to the statistical analysis of Kamchatka Seismicity”, *Journal of Vulcanology and Seismology*, **6**:2 (2012), 116–125].
- [6] Федотов С. А., “О закономерностях распределения сильных землетрясений Камчатки, Курильских островов и северо-восточной Японии”, *Тр. ИФЗАН СССР*, Наука, М., 1968, 121–150. [Fedotov S. A., “O zakonomernostyakh raspredeleniya sil’nyh zemletryasenij Kamchatki, Kuril’skih ostrovov i severo-vostochnoj Yaponii”, *Tr. IFZAN SSSR*, Nauka, M., 1968, 121–150].
- [7] Cahoy D. O., Uhaikin V. V., Woyczyski W. A., “Parameter estimation for fractional Poisson processes”, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 2010, № 140, 3106–3120.
- [8] Laskin N., “Fractional Poisson processes”, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 2003, № 8, 201–213.
- [9] Учайкин В. В., “Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы”, *УФН*, 2003, № 173, 847–876. [Uchajkin V. V., “Avtomodel’naya anomal’naya diffuziya i ustojchivye zakony”, *UFN*, 2003, № 173, 847–876].

Список литературы (ГОСТ)

- [1] Carbone V., Sorriso-Valvo L., Harabaglia P., Guerra I. Unified scaling law for waiting times between seismic events // *Europhys. Lett.* 2005. vol. 6. no 71. p. 1036–1042. DOI: 10.1209/epl/i2005-10185-0
- [2] Bak P., Christensen K., Danon L., Scanlon T. Unified Scaling Law for Earthquakes // *Phys. Rev. Lett.* 2002. vol. 88. no 17. p. 178501-1–178501-4.
- [3] Shevtsov B., Sheremetyeva O. Fractional models of seismoacoustic and electromagnetic activity // *E3S Web of Conferences.* 2017. vol. 20, 02013. DOI: 10.1051/e3sconf/20172002013
- [4] Шевцов Б.М., Сагитова Р. Н. Статистический анализ сейсмических процессов на основе диффузионного подхода // *ДАН.* 2009. Т. 426. № 2. С. 254–256.
- [5] Шевцов Б.М., Сагитова Р.Н. Диффузионный подход в статистическом анализе сейсмичности Камчатки // *Вулканология и сейсмология.* 2012. № 2. С. 56–66.
- [6] Федотов С.А. О закономерностях распределения сильных землетрясений Камчатки, Курильских островов и северо-восточной Японии // *Тр. ИФЗАН СССР. М.: Наука,* 1968. С. 121–150.
- [7] Cahoy D.O., Uhaikin V.V., Woyczynski W.A. Parameter estimation for fractional Poisson processes // *Journal of Statistical Planning and Inference.* 2010. no 140. pp. 3106-3120.
- [8] Laskin N. Fractional Poisson processes // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation.* 2003. no. 8. pp. 201-213.
- [9] Учайкин В.В. Автомодельная аномальная диффузия и устойчивые законы // *УФН.* 2003. № 173. С. 847–876.

Для цитирования: Шереметьева О.В. Модель процессов релаксации в различных режимах пластических деформаций // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.* 2018. № 5(25). С. 74-82. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-25-5-74-82

For citation: Sheremetyeva O. V. Model relaxation processes in the different modes of plastic deformation, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2018, **25**: 5, 74-82. DOI: 10.18454/2079-6641-2018-25-5-74-82

Поступила в редакцию / Original article submitted: 25.10.2018