Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 27. № 2. С. 38-46. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-38-46

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9

ОБ ОДНОЙ ОБОБЩЕННОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ МАЛЬТУСА

Ф. М. Лосанова, Р. О. Кенетова

Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН, 360000, Республика Кабардино-Балкария, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89 А

E-mail: losanovaf@gmail.com, raisa.kenetova@mail.ru

В работе рассмотрено обобщенное уравнение Мальтуса, описывающее одновидную популяцию. Решена задача Коши для случаев $0 < \alpha < 1$ и $1 < \alpha < 2$.

Ключевые слова: обобщенное уравнение Мальтуса, задача Коши, дробная производная, дробный интеграл, функция Миттаг-Леффлера

MATHEMATICAL MODELING

MSC 26A33

ON A GENERALIZED MATHEMATICAL MODEL OF MALTHUS

F. M. Losanova, R. O. Kenetova

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Republic of Kabardino-Balkariya, Nalchik Shortanova st., 89 A, Russia

E-mail: losanovaf@gmail.com, raisa.kenetova@mail.ru

The paper considers the generalized Malthus equation describing a single-species population. Solved the Cauchy problem for cases $0 < \alpha < 1$ and $1 < \alpha < 2$.

Key words: generalized Malthus equation, Cauchy problem, fractional derivative, fractional integral, Mittag-Leffler function

Введение

Попытки количественного математического описания как динамики отдельных биологических популяций, так и сообществ, состоящих из многих взаимодействующих между собой популяций различных видов, имеют солидную историю.

Одна из первых моделей динамики роста популяций, в основе которой лежит задача о динамике численности популяции, является классическая модель неограниченного роста - геометрическая прогрессия в дискретном представлении $x_{n+1} = qx_n$, или экспонента в непрерывном случае была предложена Мальтусом [1]. Эта модель может быть записана в виде

$$\frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t), \qquad N(t) = N(0)e^{\mu t}, \tag{1}$$

где $N(t)$ – численность популяции, μ – разность между коэффициентами рождаемости и смертности.

При $\mu > 0$ модель (17) дает безграничный экспоненциальный рост численности популяции. Но этот эффект не наблюдается в природных популяциях, где ресурсы, обеспечивающие рост, всегда ограничены.

Пусть K – предельная численность, которой может достигнуть популяция в условиях ограниченности ресурса (величину K обычно называют "емкостью" среды). При $t \to \infty$, $N(t) \to K$. Первая модель, учитывающая этот факт, была предложена в 1825 г. Гомпертцем [2]

$$\frac{dN}{dt} = -\mu N(t)\frac{\ln(N(t)/K)}{\ln K}, \qquad N(t) = K\left(\frac{N(0)}{K}\right)^{\exp\left[-\frac{\mu t}{\ln K}\right]}. \tag{2}$$

Эта модель описывает эффект "насыщения но эксперименты с животными показали, что этот эффект наступает гораздо быстрее, чем это следует из модели Гомпертца [2].

Наконец, в 1983 г. появилась "логистическая" модель Ферхюльста [3], достаточно хорошо описывающая динамику многих природных популяций:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{\mu N(t)}{K}(K - N(t)), \qquad N(t) = \frac{KN(0)}{N(0) + [K - N(0)]e^{-\mu t}}. \tag{3}$$

К настоящему времени существует много самых различных популяционных моделей.

Что касается взаимодействующих популяций, то и здесь у Вольтерра, начавшего математическое изучение непрерывных биоценозов [4], были предшественники. В 1925 году Лотка выпускает книгу "Элементы физической биологии"[5]. Он пришел к системе дифференциальных уравнений описывающих динамику двух взаимодействующих биологических популяций:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)(\varepsilon_1 + \nu_1 N_2(t)), \qquad \frac{dN_2(t)}{dt} = N_2(t)(\varepsilon_2 + \nu_2 N_1(t)). \tag{4}$$

где ε_i – коэффициенты естественного прироста (или гибели), ν_i – коэффициенты, описывающие межпопуляционные взаимодействия. В зависимости от выбора знаков этих коэффициентов эта модель описывает либо конкуренцию видов за один ресурс, либо взаимоотношения типа "хищник-жертва либо "паразит-хозяин".

Исходные положения Вольтерра и Лотки были очень близки, но Вольтерра пошел дальше и глубже в разработке моделей биологических сообществ. Если книга Лотки при всех своих достоинствах, - это все же собрание самых различных моделей, которое не может претендовать на звание общей теории, то труд Вольтерра, - это несомненно, теория биологических сообществ, построенная именно как математическая теория. С этой книги началась современная математическая экология. После чего Вольтерра занялся изучением экологических проблем с более общих позиций.

Математическое исследование биологических проблем началось недавно. Лотка в своей книге "Элементы физической биологии содержащей многочисленные приложения математики к вопросам химии и биологии, рассмотрел случай двух видов, получил геометрическую интерпретацию вариаций, оценил период колебаний.

В данной работе рассматривается уравнение, описывающее одновидную популяцию. Для того, чтобы охарактеризовать одним единственным числом некоторую популяцию в ограниченной области, сделаем допущение, что индивидуумы каждого вида однородны (пренебрегая возрастом и размерами). Будем также считать, что тип индивидуума не меняется со временем.

Вместо разрывных целочисленных функций, представляющих численность индивидуумов, введем непрерывные дифференцируемые функции, имеющие в каждый момент времени ту же целую часть, что и разрывные.

Нужно теперь найти для этих функций условия, достаточные для их определения, так, чтобы их целые части соответствовали бы полученным из опыта функциям-численностям популяций видов, живущих в биологических сообществах.

Рассмотрим вид животных, который живет изолированно в неизменной среде или сосуществует с другими видами без прямого влияния в некоторой среде, представляющей всегда одни и те же возможности существования для этого вида. В этом случае, пренебрежем периодичностью рождаемости или смертности. Тогда можно сказать, что для короткого интервала времени заданной длины в достаточно многочисленной популяции число рождений и число смертей пропорциональны общей численности индивидуумов, существующих в данный момент. Прирост числа индивидуумов N в некотором интервале будет пропорционален числу N. Этот прирост, очевидно, пропорционален длине интервала, пока последний мал. Приписывая это свойство функции, рассматриваемой как непрерывная, получаем

$$dN(t) = \varepsilon N(t)dt,$$

где ε – постоянный коэффициент пропорциональности, выражающий отношение скорости прироста $dN(t)/dt$ к числу $N(t)$. Назовем его коэффициентом прироста. Из уравнения

$$dN(t)/dt = \varepsilon N(t)$$

при условии, что интегрированием получаем решение

$$N(t) = N_0 e^{\varepsilon(t-t_0)}.$$

Это хорошо известный экспоненциальный закон развития видов, состоящий в том, что если время возрастает в арифметической прогрессии, то численность индивидуумов вида изменяется, следуя геометрической прогрессии. При $\varepsilon > 0$ вид разрастается, $\varepsilon < 0$ вид уменьшается, $\varepsilon = 0$ вид остается постоянным, рождаемость в точности компенсирует смертность.

Решение задачи Коши для обобщенного уравнения Мальтуса

В теории популяции уравнение экспоненциального роста популяции, уравнение Мальтуса, записывается в виде:

$$\frac{dN(t)}{dt} = (B-D)N(t) = \varepsilon N(t), \tag{5}$$

где $N(t)$ – численность или плотность популяций в ограниченной области Ω, B и D – коэффициенты рождаемости и смертности соответственно, являющиеся постоянными величинами, если учесть, что внутривидовая конкуренция за ограниченные жизненные ресурсы с ростом плотности популяции приводит к снижению плодовитости и увеличению смертности в момент времени $t \in [t_0, T]$, T – расчетное время.

Если теперь заменить в уравнении (21) производную первого порядка оператором дробного дифференцирования порядка $0 < \alpha < 1$, при $t_0 = 0$, то мы получим уравнение, учитывающее предысторию в популяции.

Исследуемая задача формулируется следующим образом

Задача А. *Найти решение $N(t)$ уравнения*

$$D_{0t}^{\alpha} N(t) = \varepsilon N(t) + f(t), \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{6}$$

удовлетворяющее условию

$$D_{0t}^{\alpha-1} N(t)\Big|_{t=0} = N_0, \tag{7}$$

где D_{0t}^{α} – оператор дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α, определяемый следующим образом [6, с. 28]

$$D_{0t}^{\alpha} u(\eta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int\limits_0^t \frac{u(\eta)}{(t-\eta)^{\alpha+1}} d\eta, & \alpha < 0, \\ u(t), & \alpha = 0, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)^p D_{0t}^{\alpha-p} u(\eta), & p-1 < \alpha \leq p, \, p \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

$\Gamma(\alpha)$ – *гамма-функция Эйлера.*

Перепишем уравнение (22) в виде

$$D_{0t}^{\alpha} N(t) - \varepsilon N(t) - f(t) = 0, \qquad 0 < \alpha < 1, \tag{8}$$

и воспользуемся формулой дифференцирования интеграла $\frac{d}{dt} D_{0t}^{-1} N(t) = N(t)$.

Тогда

$$\frac{d}{dt}\left[D_{0t}^{\alpha-1} N(t) - \varepsilon D_{0t}^{-1} N(t) - D_{0t}^{-1} f(t)\right] = 0, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{9}$$

Из равенства (25) следует, что

$$D_{0t}^{\alpha-1} N(t) - \varepsilon D_{0t}^{-1} N(t) - D_{0t}^{-1} f(t) = C,$$

где $C = const$, или же

$$D_{0t}^{\alpha-1} N(t) - \varepsilon D_{0t}^{-1} N(t) = D_{0t}^{-1} f(t) + C, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{10}$$

Подействуем на обе части соотношения (10) оператором $D_{0t}^{1-\alpha}$. Тогда получим

$$N(t)-\varepsilon D_{0t}^{-\alpha}N(t)=D_{0t}^{-\alpha}f(t)+C\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},\qquad 0<\alpha<1, \tag{11}$$

т.к. $D_{0t}^{1-\alpha}1=\dfrac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$.

Лемма 1. *Любое решение уравнения (22) является решением интегрального уравнения (11). Верно и обратное утверждение, т.е. решение интегрального уравнения (11) есть решение уравнения (22).*

Перепишем уравнение (11) в виде интегрального уравнения Вольтерра II-го рода

$$N(t)-\varepsilon D_{0t}^{-\alpha}N(t)=F(t), \tag{12}$$

где

$$F(t)=D_{0t}^{-\alpha}f(t)+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, \tag{13}$$

решение которого дается в виде [7]

$$N(t)=F(t)+\varepsilon\int\limits_0^t F(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^{\alpha}]ds$$

или же, подставляя вместо $F(t)$ выражение (13), получим

$$N(t)=D_{0t}^{-\alpha}f(t)+\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon\int\limits_0^t D_{0s}^{-\alpha}f(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^{\alpha}]ds+$$

$$+\varepsilon\int\limits_0^t \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^{\alpha}]ds, \tag{14}$$

где $E_{\alpha,\mu}(z)$ – функция типа Миттаг-Леффлера [7].

В силу определения оператора дробного интегрирования, имеем, что

$$D_{0t}^{-\alpha}f(t)=\int\limits_0^t f(s)\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds;$$

$$\int\limits_0^t D_{0s}^{-\alpha}f(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^{\alpha}]ds=$$

$$=\int\limits_0^t\int\limits_0^s f(\xi)\frac{(s-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}d\xi(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^{\alpha}]ds=$$

$$=\int\limits_0^t f(\xi)d\xi\int\limits_{\xi}^t \frac{(s-\xi)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^{\alpha}]ds=$$

$$\int\limits_0^t f(s)(t-s)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds.$$

Подставляя последние выражения в формулу (14), получим:

$$N(t)=\int\limits_0^t f(s)\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}ds+C\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon\int\limits_0^t f(s)(t-s)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds+$$

$$+\varepsilon t^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(\varepsilon t^\alpha)=\int\limits_0^t f(s)\left[\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon(t-s)^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]\right]ds+$$

$$+C\left[\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+\varepsilon t^{2\alpha-1}E_{\alpha,2\alpha}(\varepsilon t^\alpha)\right]. \tag{15}$$

Применяя формулу автотрансформации функции типа Миттаг-Леффлера к выражениям в квадратных скобках (15), окончательно получим:

$$N(t)=\int\limits_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds+Ct^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\varepsilon t^\alpha). \tag{16}$$

Формула (16) есть общее решение уравнения (22). Удовлетворяя начальному условию (23), имеем

$$D_{0t}^{\alpha-1}N(t)=\Big|_{t=0}D_{0t}^{\alpha-1}\int\limits_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds\Big|_{t=0}+$$

$$+CD_{0t}^{\alpha-1}t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\varepsilon t^\alpha)\Big|_{t=0}=\int\limits_0^t f(s)E_{\alpha,1}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds\Big|_{t=0}+CE_{\alpha,1}(\varepsilon t^\alpha)\Big|_{t=0}=N_0.$$

Так как

$$\int\limits_0^t f(s)E_{\alpha,1}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds\Big|_{t=0}=0$$

и

$$E_{\alpha,1}(\varepsilon t^\alpha)\Big|_{t=0}=1,$$

тогда $C=N_0$.

Значит решение задачи (22), (23) имеет вид:

$$N(t)=\int\limits_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds+N_0t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\varepsilon t^\alpha).$$

Случай, когда $1 < \alpha < 2$

Далее пусть $1 < \alpha < 2$. Тогда Задача A ставится следующим образом

Задача B. *Найти решение $u(t)$ уравнения*

$$D_{0t}^{\alpha} N(t) = \varepsilon N(t) + f(t), \qquad 1 < \alpha < 2, \tag{17}$$

удовлетворяющее условиям

$$D_{0t}^{\alpha-2} N(t)\Big|_{t=0} = N_0, \qquad D_{0t}^{\alpha-1} N(t)\Big|_{t=0} = N_1. \tag{18}$$

Так как по определению

$$D_{0t}^{\alpha} N(t) = \frac{d^2}{dt^2} D_{0t}^{\alpha-2} N(t),$$

то как и в случае $\alpha \in (0,1)$ перепишем уравнение (17) в виде

$$\frac{d^2}{dt^2}\left[D_{0t}^{\alpha-2} N(t) - \varepsilon D_{0t}^{-2} N(t) - D_{0t}^{-2} f(t)\right] = 0,$$

или же

$$D_{0t}^{\alpha-2} N(t) - \varepsilon D_{0t}^{-2} N(t) = D_{0t}^{-2} f(t) + C_1 t + C_2, \tag{19}$$

где C_1 и C_2 – постоянные интегрирования.

Подействуем на обе части равенства (19) оператором $D_{0t}^{2-\alpha}$. В силу законов композиции операторов интегро-дифференцирования будем иметь

$$N(t) - \varepsilon D_{0t}^{-\alpha} N(t) = D_{0t}^{-\alpha} f(t) + C_1 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + C_2 \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}, \tag{20}$$

т.к.

$$D_{0t}^{2-\alpha} t = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, D_{0t}^{2-\alpha} 1 = \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}.$$

Лемма 2. *Любое решение уравнения (17) является решением интегрального уравнения (20), и наоборот, решение интегрального уравнения (20) есть решение уравнения (17).*

Решение уравнения Вольтерра второго рода (20) выписывается в виде

$$N(t) = \varepsilon \int_0^t \left[D_{0s}^{-\alpha} f(s) + C_1 \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + C_2 \frac{s^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right] (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon (t-s)^{\alpha}] ds +$$

$$+ D_{0t}^{-\alpha} f(t) + C_1 \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + C_2 \frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}. \tag{21}$$

Удовлетворим формулу (21) начальным условиям (18) для определения C_1 и C_2. Для этого, учитывая обобщенную формулу Ньютона-Лейбница, находим

$$D_{0t}^{\alpha-2} N(t) = \varepsilon D_{0t}^{\alpha-2} \int_0^t \left[D_{0s}^{-\alpha} f(s) + C_1 \frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + C_2 \frac{s^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right] (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon (t-s)^{\alpha}] ds +$$

$$+D_{0t}^{-2}f(t)+C_1\frac{t}{\Gamma(2)}+C_2. \quad (22)$$

При $t=0$ из формулы (22) получим

$$D_{0t}^{\alpha-2}N(t)=C_2=N_2.$$

Аналогично, используя обобщенную формулу Ньютона-Лейбница, получим

$$D_{0t}^{\alpha-1}N(t)=\varepsilon D_{0t}^{\alpha-1}\int_0^t\left[D_{0s}^{-\alpha}f(s)+C_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+C_2\frac{s^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right](t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds+$$

$$+D_{0t}^{-1}f(t)+C_1+N_2\frac{t^{-1}}{\Gamma(0)}. \quad (23)$$

При $t=0$ из равенства (23), учитывая, что $\dfrac{1}{\Gamma(0)}=0$ имеем $D_{0t}^{\alpha-1}N(t)\Big|_{t=0}=C_1=N_1$.

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулу (21) найдем решение задачи (17), (18) в виде

$$N(t)=\varepsilon\int_0^t\left[D_{0s}^{-\alpha}f(s)+N_1\frac{s^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+N_2\frac{s^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}\right](t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds+$$

$$+D_{0t}^{-\alpha}f(t)+N_1\frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}+N_2\frac{t^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)}. \quad (24)$$

После элементарных преобразований окончательно получим

$$N(t)=\int_0^t f(s)(t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}[\varepsilon(t-s)^\alpha]ds+N_1t^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(\varepsilon t^\alpha)+N_2t^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(\varepsilon t^\alpha). \quad (25)$$

Формула (25) дает решение задачи (17), (18).

Заключение

В настоящее время наиболее актуальным является применение дробного исчисления в различных областях науки, техники, естествознания и других отраслях человеческой деятельности, использующих как математические методы, так и средства компьютерного моделирования. В работе рассмотрено обобщённое уравнение Мальтуса, описывающее одновидную популяцию. Была рассмотрена задача Коши для случаев $0<\alpha<1$ и $1<\alpha<2$.

Список литературы/References

[1] Malthus T. R., *An Essay on the principe of population Johnson*, London, 1788.

[2] Gomperz B., “On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies”, *Philosophical Transactions Royal Society (London)*, **115** (1825), 513-583.

[3] Verhulst P. F., “Notice sur la loi gue la population suit daus son accroissement”, *Corresp. Math. et Phys.*, **10** (1938), 113–121.

[4] Вольтера В., *Математическая теория борьбы за существование*, Наука, М., 1976, 199 с. [Vol'tera V., *Matematicheskaya teoriya bor'by za sushchestvovaniye*, Nauka, M., 1976, 199 pp.]

[5] Lotka A. J., *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins, Baltimore, 1925, 495 с.

[6] Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995, 301 с. [Нахушев А. М., *Уравнения математической биологии*, Высш. шк., М., 1995, 301 pp.]

[7] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 670 с. [Dzhrbashyan M. M., *Integral'nyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti*, Nauka, M., 1966, 670 pp.]

[8] Нахушев А. М., "Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах", *ДАН СССР*, **234**:2 (1977), 308–311. [Nakhushev A. M., "Zadacha Shturma-Liuvillya dlya obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya vtorogo poryadka s drobnymi proizvodnymi v mladshikh chlenakh", *DAN SSSR*, **234**:2 (1977), 308–311].

[9] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., *Интегралы и прозводные дробного порядка и некоторые их приложения*, Наука и техника, Минск, 1987, 687 с. [Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I., *Integraly i prozvodnyye drobnogo poryadka i nekotoryye ikh prilozheniya*, Nauka i tehnika, Minsk, 1987, 687 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Malthus T. R. An Essay on the principe of population Johnson. London. 1788

[2] Gomperz B. On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies // Philosophical Transactions Royal Society (London). 1825. vol 115. pp. 513-583

[3] Verhulst P. F. Notice sur la loi gue la population suit daus son accroissement // Corresp. Math. et Phys. 1938. vol. 10. pp. 113–121.

[4] Вольтера В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 199 с.

[5] Lotka A. J. Elements of physical biology. Baltimore: Williams and Wilkins, 1925. 495 p.

[6] Нахушев А. М. Уравнения математической биологии. М.: Высш. шк., 1995. 301 с.

[7] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 670 с.

[8] Нахушев А. М. Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // ДАН СССР. 1977. Т. 234. №2. С. 308–311.

[9] Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И. Интегралы и прозводные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987. 687 с.

Для цитирования: Лосанова Ф. М., Кенетова Р. О. Об одной обобщенной математической модели Мальтуса // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 27. № 2. С. 38-46. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-38-46

For citation: Losanova F. M., Kenetova R. O. On a generalized mathematical model of Malthus, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki.* 2019, **27**: 2, 38-46. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-38-46

Поступила в редакцию / Original article submitted: 14.06.2019