Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 27. № 2. С. 6-11. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-6-11

МАТЕМАТИКА

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОДНОЙ РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ

О. Х. Масаева

Институт прикладной математики и автоматизации, 360000, Кабардино-Балкарская республика, г. Нальчик, ул. Шортанова, 89а

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

Доказано существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения второго порядка с дробной производной. Исследуемое уравнение переходит в волновое уравнение при целом значении порядка дробной производной.

Ключевые слова: задача Дирихле, дробная производная Римана-Лиувилля, дробная производная Капуто, волновое уравнение

MATHEMATICS

MSC 35L05

DIRCHLET PROBLEM FOR A NONLOCAL WAVE EQUATION WITH RIEMANN-LIOUVILLE DERIVATIVE

O. Kh. Masaeva

Institute of Applied Mathematics and Automation, 360000, Kabardino-Balkarian Republic, Nalchik, st. Shortanova, 89a

E-mail: olesya.masaeva@yandex.ru

The existence and uniqueness of the solution to Dirichlet problem for a second-order equation with a fractional derivative is proved. The equation under study is a wave equation for a integer value of the order of the fractional derivative.

Key words: Dirichlet problem, Riemann-Liouville fractional derivative, Caputo fractional derivative, wave equation

Введение

Рассмотрим в области $D=\{(x,y):0<x<r,0<y<a\}$ уравнение

$$\mathbf{L}u(x,y)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-D_{0y}^{\alpha}\right)u(x,y)=0, \tag{1}$$

где $1<\alpha<2$, D_{0y}^{α} — оператор дробного дифференцирования Римана-Лиувилля порядка α, с началом в точке $y=0$, по переменной y [1]. При $\alpha=2$ уравнение (1) совпадает с волновым уравнением.

Дифференциальные уравнения дробного порядка возникают при математическом моделировании различных физических процессов и явлений [1].

Уравнения второго порядка вида (1) с частными производными дробного порядка $\alpha\in(0,2)$ исследовались в работах [1]-[6] и др. (см. библиографию, приведенную в [2] и [6]). В указанных работах рассматривались задача Коши, первая, вторая и смешанные краевые задачи, найдено фундаментальное решение, построено общее представление решений.

В работах [7] и [8] была исследована задача Дирихле для уравнения (1) с дробной производной в смысле Капуто, было получено необходимое и достаточное условие единственности решения задачи, доказана теорема существования решения.

В данной работе доказано существование и единственность решения задачи Дирихле для уравнения (1).

Постановка задачи

Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $u=u(x,y)$ такую, что $y^{2-\alpha}u\in C(\bar{D})$, $u_{xx},D_{0y}^{\alpha}u\in C(D)$ и удовлетворяющую уравнению (1) во всех точках области D.

В данной работе исследуется следующая задача:*найти регулярное решение уравнения (1) в области D, удовлетворяющее краевым условиям*

$$u(0,y)=0,\quad u(r,y)=0,\ \ 0<y<a, \tag{2}$$

$$[D_{0y}^{\alpha-2}u(x,y)]_{y=0}=\phi(x),\quad 0<x<r, \tag{3}$$

$$[D_{0y}^{\alpha-2}u(x,y)]_{y=a}=\psi(x),\quad 0<x<r, \tag{4}$$

где $\phi(x)$, $\psi(x)$ – заданные непрерывные функции на $[0,r]$.

Существование решения

Введем в рассмотрение множество $\mathbb{Q}^{\alpha}$ — подмножество действительных чисел вида

$$\frac{\lambda^{1/\alpha}}{(\pi n)^{2/\alpha}},$$

где $n\in\mathbb{N}$, $\lambda>0$ такое, что $E_{\alpha,2}(-\lambda)=0$.

Здесь

$$E_{\rho,\mu}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\rho k+\mu)},\rho>0, \tag{5}$$

– функция типа Миттаг-Леффлера.

Известно, что если $\rho\geq\frac{5}{3}$, $\mu=2$ функция (5) имеет не менее двух нулей [11], если $\rho\leq\frac{4}{3}$, $\mu=2$ функция не имеет нулей [10]. Вообще говоря, при $\rho<2$ функция типа Миттаг-Леффлера (5) может иметь лишь конечное число вещественных нулей [9, с. 142].

Очевидно, что множество $\mathbb{Q}^{\alpha}$ ограничено, точка 0 является точкой сгущения.

Теорема. *Пусть* $\psi(x)\in C^1[0,r]$, $\phi(x)\in C^1[0,r]$, *функции* $\psi''(x)$ *и* $\phi''(x)$ *кусочно-непрерывны на отрезке* $[0,r],\psi''(0)=\psi''(r)=0,\quad \phi''(0)=\phi''(r)=0.$

$$\frac{a}{r^{\frac{\alpha}{2}}}\notin\mathbb{Q}^{\alpha}, \tag{6}$$

тогда существует регулярное решение задачи (1)–(4).

Доказательство. Методом разделения переменных можно найти формальное решение задачи (1)-(4) в виде

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y), \tag{7}$$

где $u_n(x,y)=\left(C(\lambda_n,y)\psi_n+\left[y^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n y^{\alpha})-C(\lambda_n,y)E_{\alpha,1}(-\lambda_n a^{\alpha})\right]\phi_n\right)\sin(\sqrt{\lambda}_n x)$,

$C(\lambda_n,y)=\frac{y^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n y^{\alpha})}{aE_{\alpha,2}(-\lambda_n a^{\alpha})}$, $\quad\lambda_n=\frac{(\pi n)^2}{r^2}$. Оценим функцию $C(\lambda_n,y)$. Известно, что при больших значениях аргумента $t>0$ [9, с. 134]:

$$E_{\alpha,\alpha}(-t)=-\frac{t^{-2}}{\Gamma(-\alpha)}+O\left(t^{-3}\right),\quad t\to\infty \tag{8}$$

$$E_{\alpha,2}(-t)=\frac{t^{-1}}{\Gamma(2-\alpha)}+O\left(t^{-2}\right),\quad t\to\infty. \tag{9}$$

Тогда учитывая асимптотическое представление (8) приходим к оценке $|E_{\alpha,\alpha}(-t)|\leq\frac{C}{1+t^2}$, $\quad t\geq 0$, C – некоторая положительная постоянная. Так как из оценки (9) следует $\lim\limits_{t\to\infty}tE_{\alpha,2}(-t)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}>0$, и в силу (6) $E_{\alpha,2}(-\lambda_n a^{\alpha})\neq 0, n=1,2,...$, то имеем

$$|\lambda_n a^{\alpha}E_{\alpha,2}(-\lambda_n a^{\alpha})|>C_1,$$

C_1 –некоторая постоянная. Тогда

$$|C(\lambda_n,y)|\leq C_2\frac{y^{\alpha-1}\lambda_n}{1+\lambda_n^2 y^{2\alpha}},\quad \lambda_n y^{\alpha}\geq 0. \tag{10}$$

Принимая во внимание формулу (10), а также представления

$$E_{\alpha,\alpha-1}(-t)=-\frac{t^{-2}}{\Gamma(-\alpha-1)}+O\left(t^{-3}\right),\quad t\to\infty, \tag{11}$$

$$E_{\alpha,1}(-t) = \frac{t^{-1}}{\Gamma(1-\alpha)} + O\left(t^{-2}\right), \quad t \to \infty, \tag{12}$$

получаем

$$|y^{\alpha-2}E_{\alpha,\alpha-1}(-\lambda_n y^\alpha) - C(\lambda_n, y)E_{\alpha,1}(-\lambda_n a^\alpha)| \le \frac{C_3 y^{\alpha-2}}{1+\lambda_n^2 y^{2\alpha}}, \tag{13}$$

C_3 – константа, зависящая от y. Учитывая оценки (10), (13) заключаем

$$|u_n(x,y)\lambda_n| \le \left(\frac{y^{\alpha-1}C_2}{1+\lambda_n^2 y^{2\alpha}}|\psi_n| + \frac{y^{\alpha-2}C_3}{1+\lambda_n^2 y^{2\alpha}}|\phi_n|\right)\lambda_n$$

Так как справедливы оценки $\psi_n = o(n^{-2})$, $\phi_n = o(n^{-2})$ [12, с. 530], то

$$|\lambda_n u_n(x,y)| \le \frac{y^{\alpha-2}K}{1+\lambda_n^2 y^{2\alpha}}.$$

Отсюда заключаем равномерную сходимость ряда (7), точнее ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y^{2-\alpha}u_n(x,y)$ в области $\bar{D}$. Ряды, получаемые из него после двукратного дифференцирования по переменной x под знаком суммы, $u_{xx} = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n$, и применения оператора D_{0y}^α, $D_{0y}^\alpha u = -\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lambda_n u_n$, также сходятся абсолютно и равномерно относительно любого замкнутого подмножества области D. □

Единственность решения

Теорема. *Задача (1)–(4) может иметь не более одного регулярного решения $u \in C^1(D)$ тогда и только тогда, когда*

$$\frac{a}{r^{\frac{\alpha}{2}}} \notin \mathbb{Q}^\alpha. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $v(x,y) = (a-y)E_{\alpha,2}(-\lambda_n(a-y)^\alpha)\sin\sqrt{\lambda}_n x$. Функция $v(x,y)$ является решением уравнения

$$\mathbf{L}^* v \equiv v_{xx} - \partial_{ay}^\alpha v = 0,$$

и выполнены условия

$$v(0,y) = v(r,y) = 0, \quad v(x,a) = 0.$$

Так как

$$v\mathbf{L}u = (vu_x - v_x u)_x + uv_{xx} + (v_y D_{0y}^{\alpha-2}u - vD_{0y}^{\alpha-1}u)_y - v_{yy}D_{0y}^{\alpha-2}u,$$

имеем

$$\int\limits_0^a\int\limits_0^r v\mathbf{L}u\,dx\,dy = \int\limits_0^a\int\limits_0^r u\mathbf{L}^* v\,dx\,dy + \int\limits_0^a (u_x v - uv_x)|_0^r dy +$$

$$+\int\limits_0^r (v_y D_{0y}^{\alpha-2}u - vD_{0y}^{\alpha-1}u)|_0^a dx. \tag{15}$$

Из (15) при однородных краевых условиях (2)–(4) имеем

$$aE_{\alpha,2}(-\lambda_n a^{\alpha})\int_0^r [D_{0y}^{\alpha-1}u]_{y=0}\sin\sqrt{\lambda}_n x dx = 0. \tag{16}$$

Отсюда в силу (14) $E_{\alpha,2}(-\lambda_n a^{\alpha}) \neq 0, n = 1,2,...$, следовательно, по лемме Лагранжа

$$[D_{0y}^{\alpha-1}u]_{y=0} = 0, x \in [0,r]. \tag{17}$$

Таким образом, задача (1)–(4) при $\phi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$ редуцировалась к задаче (1)–(3), (17). Известно [2], что решение этой задачи тривиально.

Допустим, что $\frac{a}{r^{\frac{\alpha}{2}}} \in \mathbb{Q}^{\alpha}$, т. е. при фиксированных n и λ

$$\frac{a}{r^{\alpha/2}} = \frac{\lambda^{1/\alpha}}{(\pi n)^{2/\alpha}}.$$

Тогда нетрудно показать, что функция

$$u(x,y) = yE_{\alpha,2}(-\lambda_n y^{\alpha})\sin\frac{\pi n}{a}x,$$

удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2)–(4) при $\phi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$.

Таким образом, функция $u(x,y) \equiv 0$, $(x,y) \in D$, что и требовалось доказать. □

Список литературы/References

[1] Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, Физматлит, М., 2003, 272 с. [Nakhushev A. M., *Drobnoye ischisleniye i yego primeneniye*, Fizmatlit, M., 2003, 272 pp.]

[2] Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука, М., 2005, 199 с. [Pskhu A. B., *Uravneniya v chastnykh proizvodnykh drobnogo poryadka*, Nauka, M., 2005, 199 pp.]

[3] Керефов М. А., “Решение одной краевой задачи для волнового уравнения дробного порядка”, *Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики*, Сб. научных трудов института математики НАН Украины, Киев, 1997, 144-145. [Kerefov M. A., “Resheniye odnoy krayevoy zadachi dlya volnovogo uravneniya drobnogo poryadka”, *Nelineynyye problemy differentsial'nykh uravneniy i matematicheskoy fiziki*, Sb. nauchnykh trudov instituta matematiki NAN Ukrainy, Kiyev, 1997, 144-145].

[4] Agrawal O. P., “Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain”, *Nonlinear Dynam*, **(29)-1**:4 (2002), 145–155.

[5] Mainardi F., “The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation”, *Appl. Math. Lett.*, **9**:6 (1996), 23–28..

[6] Псху А.В., “Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка”, *Изв. РАН*, **73**:2 (2009), 141-182. [Pskhu A.V., “Fundamental'noye resheniye diffuzionno-volnovogo uravneniya drobnogo poryadka”, *Izv. RAN*, **73**:2 (2009), 141-182].

[7] Масаева О. Х., “Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения”, *Дифференц. уравнения*, **49**:12 (2013), 1554-1559. [Masayeva O. KH., “Zadacha Dirikhle dlya nelokal'nogo volnovogo uravneniya”, *Differents. uravneniya*, **49**:12 (2013), 1554-1559].

[8] Масаева О. Х., “Необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки.*, **11**:2 (2015), 16-20. [Masaeva O. Kh., “Necessary and sufficient conditions for the uniqueness od Dirichlet problem solution for nonlocal wave equation”, *Bulletin KRASEC. Physical and Mathematical Sciences*, **11**:2 (2015), 19-23].

[9] Джрбашян М. М., *Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области*, Наука, М., 1966, 672 с. [Dzhrbashyan M. M., *Integral'nyye preobrazovaniya i predstavleniya funktsiy v kompleksnoy oblasti*, Nauka, M., 1966, 672 pp.]

[10] Псху А. В., “О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера”, *Мат. заметки*, **77**:4 (2005), 592–599. [Pskhu A. V., “O veshchestvennykh nulyakh funktsii tipa Mittag-Lefflera”, *Mat. zametki*, **77**:4 (2005), 592–599].

[11] Попов А. Ю., “О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной”, *Фундаментальная и прикладная математика*, **12**:6 (2006), 137–155. [Popov A. YU., “O kolichestve veshchestvennykh sobstvennykh znacheniy odnoy krayevoy zadachi dlya uravneniya vtorogo poryadka s drobnoy proizvodnoy”, *Fundamental'naya i prikladnaya matematika*, **12**:6 (2006), 137–155].

[12] Зорич В. А., *Математический анализ*. Т. II, Наука, М., 1984, 640 с. [Zorich V. A., *Matematicheskiy analiz*. V. II, Nauka, M., 1984, 640 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Нахушев А. М. Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003. 272 с.

[2] Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 199 с.

[3] Керефов М. А. Решение одной краевой задачи для волнового уравнения дробного порядка. Нелинейные проблемы дифференциальных уравнений и математической физики // Сб. научных трудов института математики НАН Украины. Киев, 1997. С. 144-145.

[4] Agrawal O. P. Solution for a fractional diffusion-wave equation defined in a bounded domain // Nonlinear Dynam. 2002. vol 29-1. no. 4. C. 145–155.

[5] Mainardi F. The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation // Appl. Math. Lett. 1996. vol. 9. no. 6. pp. 23–28.

[6] Псху А.В. Фундаментальное решение диффузионно-волнового уравнения дробного порядка // Изв. РАН. 2009. Т. 73. № 2. С. 141-182.

[7] Масаева О. Х. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49. № 12. С. 1554-1559.

[8] Масаева О. Х. Необходимое и достаточное условие единственности решения задачи Дирихле для нелокального волнового уравнения // Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2015. Т. 11. № 2. С. 16-20.

[9] Джрбашян М. М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. М.: Наука, 1966. 672 с.

[10] Псху А. В. О вещественных нулях функции типа Миттаг-Леффлера // Мат. заметки. 2005. Т. 77. №. 4. С. 592–599.

[11] Попов А. Ю.О количестве вещественных собственных значений одной краевой задачи для уравнения второго порядка с дробной производной // Фундаментальная и прикладная математика. 2006. Т. 12. № 6. С. 137–155.

[12] Зорич В.А. Математический анализ. Т. II. М.: Наука, 1984. 640 с.

Для цитирования: Масаева О. Х. Задача Дирихле для нелокального волнового уравнения с производной Римана-Лиувилля // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 27. № 2. С. 6-11. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-6-11

For citation: Masaeva O. Kh. Dirichlet problem for a nonlocal wave equation with Riemann-Liouville derivative, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **27**: 2, 6-11. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-27-2-6-11

Поступила в редакцию / Original article submitted: 02.06.2019