Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. 2019. Т. 26. № 1. С. 100-109. ISSN 2079-6641

DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-100-109

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

УДК 51-8

ОТБОР КОРНЕЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ СПИРАЛИ

Л. Д. Островерхая, О.,К. Жданова

Камчатский государственный университет имени Витуса Беринга, 683032,
г. Петропавловск-Камчатский, ул. Пограничная, 4
E-mail: kafmat@mail.ru

В работе предложен эффективный метод спирали для отбора корней, принадлежащих заданному промежутку (длинной большей 2π) при решении тригонометрических уравнений.

Ключевые слова: тригонометрические уравнения, отбор корней, метод спирали

TEACHING AND METHODOLOGICAL MATERIALS

MSC 97A90

SELECTION OF ROOTS OF TRIGONOMETRIC EQUATIONS BY THE SPIRAL METHOD

L. D. Ostraverhaya, O. K. Zhdanova

Vitus Bering Kamchatka State University, 683031, Petropavlovsk-Kamchatsky,
Pogranichnaya st., 4, Russia
E-mail: kafmat@mail.ru

In this paper, an effective spiral method is proposed for selecting the roots belonging to a given interval (longer than 2π) when solving trigonometric equations.

Key words: trigonometric equations, root selection, helix method

Введение

При решении тригонометрических уравнений часто требуется произвести отбор корней, принадлежащих заданному промежутку. Это можно сделать несколькими способами, а именно: с помощью графика тригонометрических функции; перебором значений переменной $n (n \in Z)$, содержащейся в периоде найденного решения; путем отбора этих значений n с помощью неравенства [1]-[3].

Можно предложить ещё один способ отбора корней – метод спирали.

Методика

Обычно положение точки, полученной при повороте точки $A_0(1,0)$ на угол:

$$\alpha + 2\pi n \ (n \in Z)$$

на единичной (тригонометрической) окружности, изображается одной и той же точкой $A_{\alpha+2\pi n}, n \in Z$ (рис. 1).

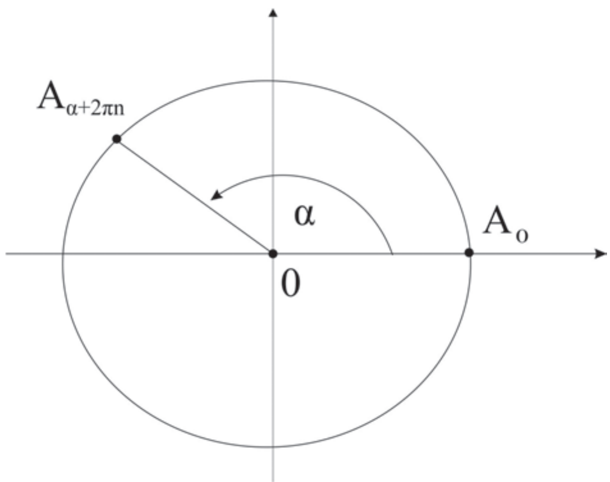

Рис. 1

Эта окружность представляет собой бесконечное множество одинаковых окружностей, наложенных друг на друга, которые получаются, когда точка A_0 поворачивается на угол, кратный 2π.

Эти окружности можно изобразить в виде витков спирали.

Будем точки $A_{\alpha+2\pi}, A_\beta$ на спирали также обозначается как $\alpha + 2\pi, \beta$ соответственно. Точка A_0, соответствующая углу поворота на 0 радиан (0°) – отправная точка (рис. 2).

Положительный угол изображается точкой спирали, полученной при повороте точки A_0 на этот угол против часовой стрелки, а отрицательный – при повороте точки A_0 по часовой стрелке.

Множество углов вида $\alpha + 2\pi n, n \in \mathscr{Z}$ изображаются точками спирали, расположенными на луче OM, независимо от значения α (рис. 3).

А множество углов вида $\alpha + \pi n, n \in \mathscr{Z}$ изображается на спирали точками, расположенными на двух лучах OM и ON, т.е. на прямой MN (рис. 4).

Примеры.

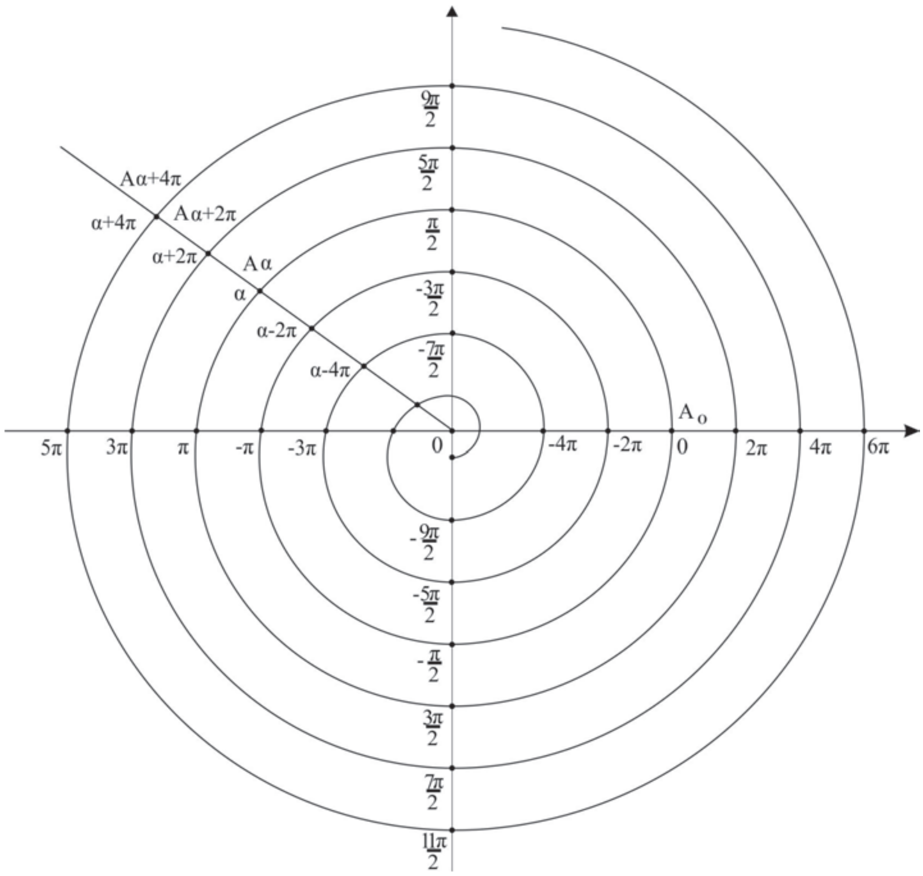

Рис. 2

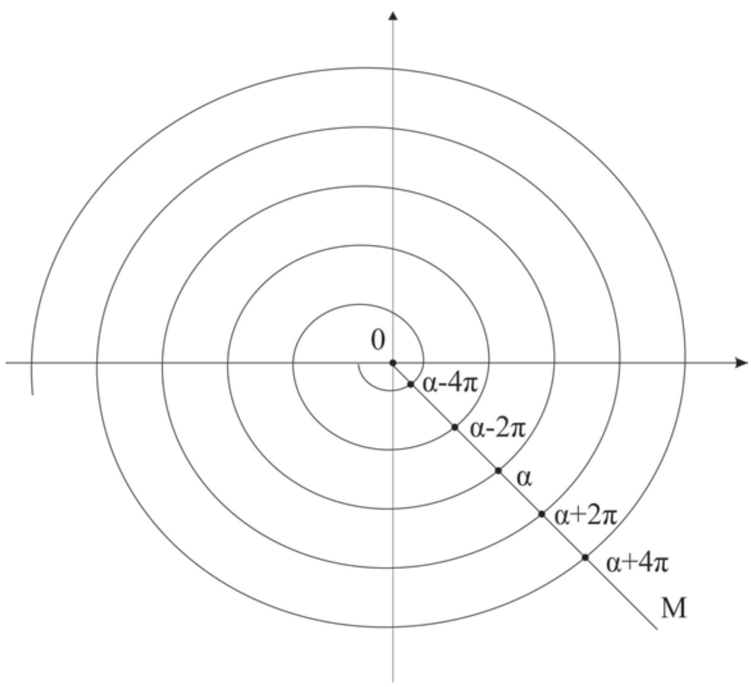

Рис. 3

1. а) Решить уравнение $2\sin 2x - 3\cos x + 8\sin x - 6 = 0$.

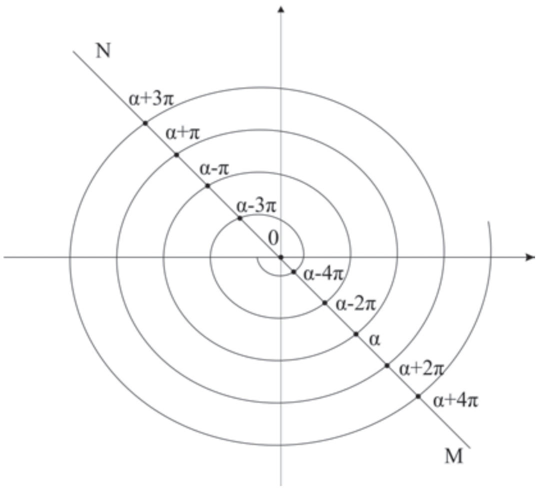

Рис. 4

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение

$2\sin 2x-3\cos x+8\sin x-6=0\ \Leftrightarrow$

$4\sin x\cos x-3\cos x+8\sin x-6=0\ \Leftrightarrow$

$(4\sin x\cos x+8\sin x)-(3\cos x+6)=0\ \Leftrightarrow$

$4\sin x(\cos x+2)-3(\cos x+2)=0\ \Leftrightarrow$

$(4\sin x-3)(\cos x+2)=0\ \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}4\sin x-3=0,\\ \cos x+2=0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \sin x=\frac{3}{4}\ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z};\\ x=\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}.\end{array}\right.$

б) Отбор корней произведем методом спирали. Выделим участок спирали, соответствующий отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ (рис. 5).

Таким образом, отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ принадлежат следующие корни уравнения:

1) На луче OM_1: $\arcsin\frac{3}{4}-2\pi$; $\arcsin\frac{3}{4}$; $\arcsin\frac{3}{4}+2\pi$.

2) На луче OM_2: $\pi-\arcsin\frac{3}{4}$; $\left(\pi-\arcsin\frac{3}{4}\right)-2\pi=-\pi-\arcsin\frac{3}{4}$;

$$\left(\pi-\arcsin\tfrac{3}{4}\right)-4\pi=-\arcsin\tfrac{3}{4}-3\pi.$$

Ответ. а) $\left[\begin{array}{l}x=\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z};\\ x=\pi-\arcsin\frac{3}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}.\end{array}\right.$

б) $-\arcsin\frac{3}{4}-3\pi$; $\arcsin\frac{3}{4}-2\pi$; $-\arcsin\frac{3}{4}-\pi$; $\arcsin\frac{3}{4}$; $\pi-\arcsin\frac{3}{4}$; $\arcsin\frac{3}{4}+2\pi$.

2. а) Решить уравнение $4\sin x+6\cos x=2\operatorname{tg}x+3$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi;2\pi)$.

Решение.

а) Решим уравнение

$4\sin x+6\cos x=2\operatorname{tg}x+3\ \Leftrightarrow$

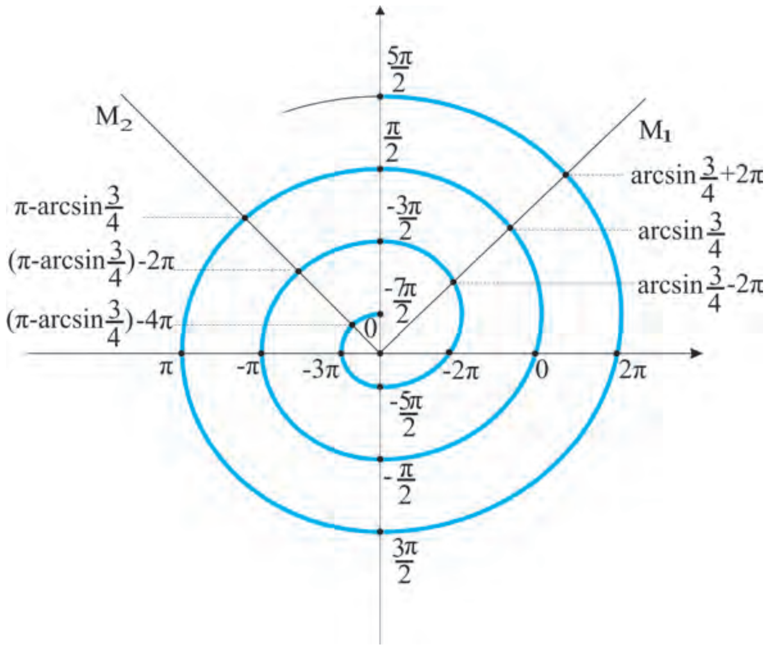

Рис. 5

$$\left(4\sin x-2\frac{\sin x}{\cos x}\right)+(6\cos x-3)=0 \Leftrightarrow$$
$$2\sin x\left(2-\frac{1}{\cos x}\right)+3(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$2\frac{\sin x}{\cos x}(2\cos x-1)+3(2\cos x-1)=0 \Leftrightarrow$$
$$(2\cos x-1)\left(2\frac{\sin x}{\cos x}+3\right) \Leftrightarrow$$
$$(2\cos x-1)(2\operatorname{tg} x+3)=0 \Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l}2\cos x-1=0,\\ 2\operatorname{tg} x+3=0.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\cos x=0.5\\ \operatorname{tg} x=-1.5\end{array}\right.\\ \cos x\neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\\ x=-\operatorname{arctg}1.5+\pi n, n\in\mathscr{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-3\pi;2\pi]$ (рис. 6).

1) Множество корней $x=-\operatorname{arctg}1.5+\pi n, n\in\mathscr{Z}$ задается формулой, содержащей период πn, поэтому отметим их на прямой M_1N и получим:

$$-\operatorname{arctg}1.5-2\pi,\ -\operatorname{arctg}1.5-\pi,\ -\operatorname{arctg}1.5,\ -\operatorname{arctg}1.5+\pi,\ -\operatorname{arctg}1.5+2\pi.$$

2) Множество корней $x=-\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}$ и $x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}$ находятся на лучах OM_2 и OM_3. Это следующие корни:

$$-\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{7\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3},\ -\frac{\pi}{3}+2\pi=\frac{5\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}.$$

Ответ. а) $\left[\begin{array}{l}x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\\ x=-\operatorname{arctg}1,5+\pi n, n\in\mathscr{Z}\end{array}\right.$

б) $-\dfrac{7\pi}{3}$, $-\operatorname{arctg}1.5-2\pi$, $-\dfrac{5\pi}{3}$, $-\operatorname{arctg}1.5-\pi$, $-\dfrac{\pi}{3}$, $-\operatorname{arctg}1.5$, $\dfrac{\pi}{3}$, $-\operatorname{arctg}1.5+\pi$, $\dfrac{5\pi}{3}$, $-\operatorname{arctg}1.5+2\pi$.

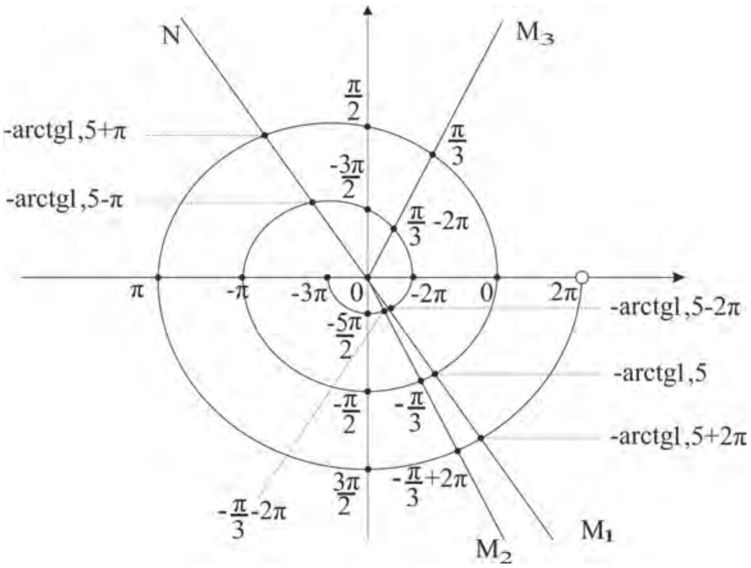

Рис. 6

3. а) Решить уравнение $2\sin^2\dfrac{x}{2}+(\sqrt{3}-4)\cos\dfrac{x}{2}+2(\sqrt{3}-1)=0$.

б) Найти все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi;\dfrac{23\pi}{4}\right)$.

Решение.

а) Решим уравнение

$2\sin^2\dfrac{x}{2}+(\sqrt{3}-4)\cos\dfrac{x}{2}+2(\sqrt{3}-1)=0 \;\Leftrightarrow$

$2-2\cos^2\dfrac{x}{2}+(\sqrt{3}-4)\cos\dfrac{x}{2}+2\sqrt{3}-2=0 \;\Leftrightarrow$

$-2\cos^2\dfrac{x}{2}+(\sqrt{3}-4)\cos\dfrac{x}{2}+2\sqrt{3}=0 \;\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=\frac{-(\sqrt{3}-4)-(\sqrt{3}+4)}{-4},\\ \cos\frac{x}{2}=\frac{-(\sqrt{3}-4)+(\sqrt{3}+4)}{-4},\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\cos\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2},\\ \cos\frac{x}{2}=-2,\end{array}\right. \;\Leftrightarrow\; \dfrac{x}{2}=\pm\dfrac{\pi}{6}+2\pi n,$

$n\in\mathscr{Z} \;\Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in\mathscr{Z}$.

б) Применим метод спирали для отбора корней, принадлежащих промежутку $\left[-4\pi;\dfrac{23\pi}{4}\right)$ (рис. 7).

Этому промежутку принадлежит множество корней, заданных формулой:

$$x=-\frac{\pi}{3}+4\pi n, n\in\mathscr{Z},$$

которые изображены точками спирали, лежащими на луче OM_1: $-\dfrac{\pi}{3}, -\dfrac{\pi}{3}+4\pi=\dfrac{11\pi}{3}$. Так как множество корней задается формулой вида $\varphi+2\pi n\cdot k, n\in\mathscr{Z}, k\in\mathscr{N}$, то ищем корни на каждом k-ом витке спирали.

Точки спирали на луче OM_2: $\dfrac{\pi}{3}-4\pi=-\dfrac{11\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}+4\pi=\dfrac{13\pi}{3}$ из множества $x=\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in\mathscr{Z}$ принадлежат промежутку $\left[-4\pi;\dfrac{23\pi}{4}\right]$.

Ответ. а) $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+4\pi n, n\in\mathscr{Z}$.

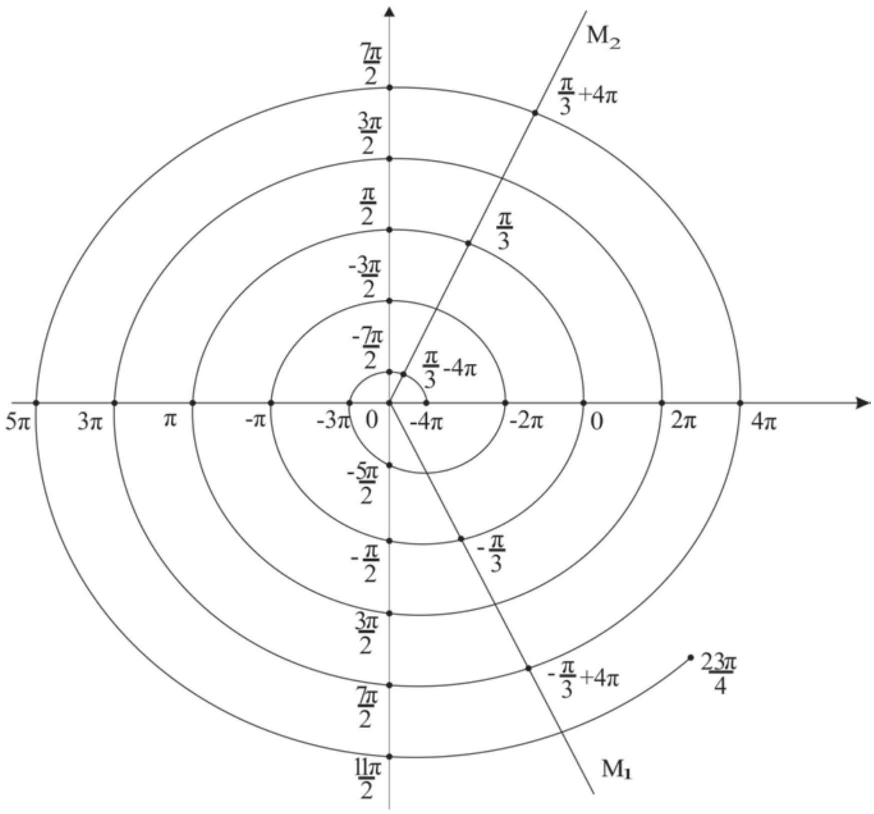

Рис. 7

б) $-\dfrac{11\pi}{3};\ -\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{11\pi}{3};\ \dfrac{13\pi}{3}.$

Рассмотрим как можно отобрать корни, принадлежащие заданному промежутку, если множество корней задается формулой $\alpha+\dfrac{\pi n}{k}, n\in\mathscr{Z}, n\neq 0, k\in\mathscr{N}$.

4. а) Решить уравнение $\sin 9x+\sin x-\sqrt{2}\cos 4x=0$.

б) Отобрать корни, принадлежащие промежутку $\left(-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{3\pi}{16}\right]$.

Решение.

а) Решим уравнение

$\sin 9x+\sin x-\sqrt{2}\cos 4x=0\ \Leftrightarrow$

$2\sin 5x\cdot\cos 4x-\sqrt{2}\cos 4x=0\ \Leftrightarrow$

$2\cos 4x\left(\sin 5x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=0\ \Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\cos 4x=0,\\ \sin 5x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\\ 5x=\dfrac{\pi}{4}+2\pi n,\\ 5x=\dfrac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{4},\\ x=\dfrac{\pi}{20}+\dfrac{2\pi n}{5},\\ x=\dfrac{3\pi}{20}+\dfrac{2\pi n}{5}, n\in\mathscr{Z}\end{array}\right.$$

б) Отберем корни уравнения, принадлежащие промежутку $\left(-\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{3\pi}{16}\right]$.

Сначала рассмотрим множество корней, заданных формулой $x=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}, n\in\mathscr{Z}$, то есть $4x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathscr{Z}$. Обозначим $4x=y$, получим $y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathscr{Z}$ и произведем отбор методом спирали, увеличив промежуток в 4 раза (рис. 8).

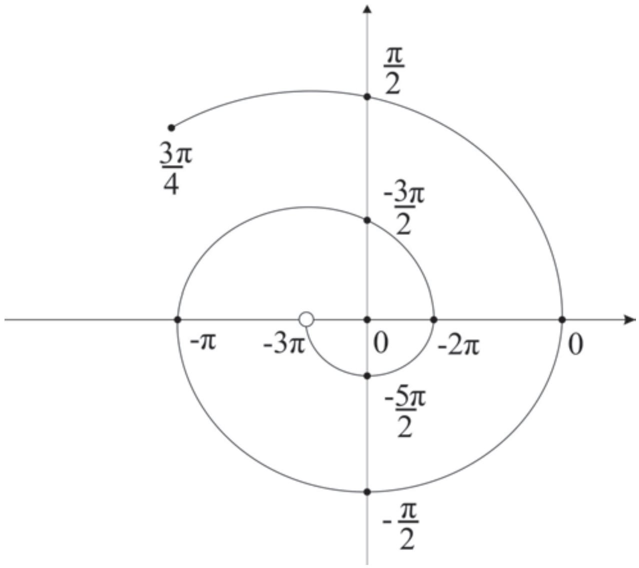

Рис. 8

Такие корни из множества $y=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathscr{Z}$, принадлежащие промежутку $\left(-3\pi;\frac{3\pi}{4}\right]$ соответствуют точкам спираи, лежащим на вертикальном диаметре: $-\frac{5\pi}{2}$, $-\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2}$.

Итак, $y=-\frac{5\pi}{2}$, тогда $4x=-\frac{5\pi}{2}$, т.е. $x=-\frac{5\pi}{8}$.

$y=-\frac{3\pi}{2}$, тогда $4x=-\frac{3\pi}{2}$, т.е. $x=-\frac{3\pi}{8}$.

$y=-\frac{\pi}{2}$, тогда $4x=-\frac{\pi}{2}$, т.е. $x=-\frac{\pi}{8}$.

$y=\frac{\pi}{2}$, тогда $4x=\frac{\pi}{2}$, т.е. $x=\frac{\pi}{8}$.

Теперь рассмотрим множества

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}, \\ x=\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}, n\in\mathscr{Z}, \end{array}\right. \quad \text{то есть} \quad \left[\begin{array}{l} 5x=\frac{\pi}{4}+2\pi n, \\ 5x=\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}, \end{array}\right. .$$

Заменив $5x=y$, отберем из множества $\left[\begin{array}{l} y=\frac{\pi}{4}+2\pi n, \\ y=\frac{3\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}, \end{array}\right.$ значения, принадлежащие промежутку $\left(-\frac{15\pi}{4};\frac{15\pi}{16}\right]$, который в 5 раз больше заданного промежутка $\left(-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{16}\right]$ (рис. 9).

Эти корни на луче OM_1: $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}-2\pi=-\frac{7\pi}{4}$

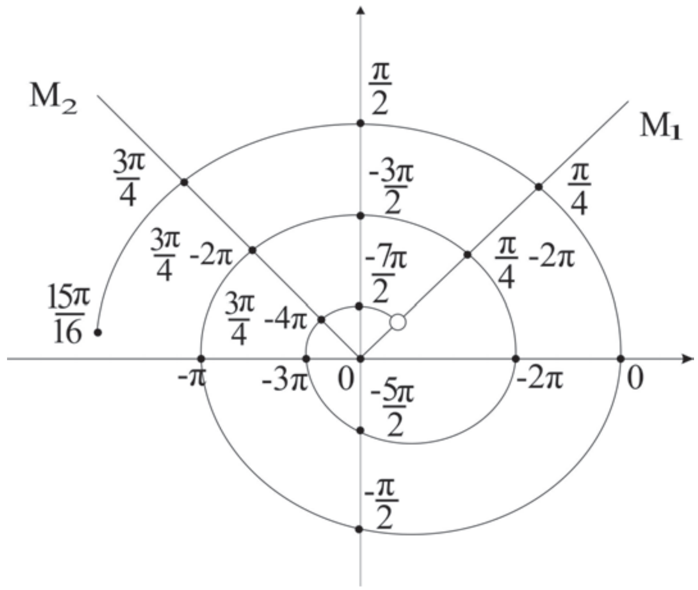

Рис. 9

а на луче OM_2: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}-2\pi=-\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}-4\pi=-\frac{13\pi}{4}$.

Итак, $y=\frac{\pi}{4}$, следовательно $5x=\frac{\pi}{4}$, а $x=\frac{\pi}{20}$;
$y=-\frac{7\pi}{4}$, тогда $5x=-\frac{7\pi}{4}$, а $x=-\frac{7\pi}{20}$;
$y=\frac{3\pi}{4}$, тогда $5x=\frac{3\pi}{4}$, а $x=\frac{3\pi}{20}$;
$y=-\frac{5\pi}{4}$, тогда $5x=-\frac{5\pi}{4}$, а $x=-\frac{\pi}{4}$;
$y=-\frac{13\pi}{4}$, тогда $5x=-\frac{13\pi}{4}$, а $x=-\frac{13\pi}{20}$.

Ответ. а) $\frac{\pi}{8}+\frac{\pi n}{4}$, $\frac{\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}$, $\frac{3\pi}{20}+\frac{2\pi n}{5}(n\in\mathscr{Z})$.
б) $-\frac{13\pi}{20}$, $-\frac{5\pi}{8}$, $-\frac{7\pi}{20}$, $-\frac{3\pi}{8}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{20}$, $\frac{5\pi}{8}$, $\frac{3\pi}{20}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение $2\cos^2 x+\sin\frac{\pi}{2}=4\cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$ и отобрать корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{3\pi}{2};3\pi\right]$ ($x=\frac{5\pi}{4}+2\pi n$, $x=\frac{7\pi}{4}+2\pi n, n\in\mathscr{Z}$; $\left\{-\frac{3\pi}{4};\ -\frac{\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{7\pi}{4}\right\}$).

2. Решить уравнение $\sin^2 x-2\sin x\cdot\cos x=3\cos^2 x$ и отобрать корни, принадлежащие промежутку $\left[\frac{3\pi}{2};5\pi\right]$ ($x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$, $x=\operatorname{arctg}3+$
$+\pi n, n\in\mathscr{Z}$; $\left\{\frac{7\pi}{4};\ \operatorname{arctg}3+2\pi;\ \frac{11\pi}{4};\ \operatorname{arctg}3+3\pi;\ \frac{15\pi}{4};\ \operatorname{arctg}3+4\pi;\ \frac{19\pi}{4}\right\}$).

3. Решить уравнение $25\sin^2\frac{x}{3}+100\cos\frac{x}{3}=89$ и отобрать корни, принадлежащие промежутку $\left[-2\pi;\frac{17\pi}{2}\pi\right]$ $(x=\pm 3\arccos\frac{4}{5}+6\pi n,$
$n\in\mathscr{Z}$; $\left\{3\arccos\frac{4}{5}-2\pi;\ -3\arccos\frac{4}{5};\ 3\arccos\frac{4}{5}+4\pi;\ -3\arccos\frac{4}{5}+6\pi\right\})$.

4. Решить уравнение $\sin 9x=2\sin 3x$ и отобрать корни, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{\pi}{3};\pi\right)$ $(x=\frac{\pi}{3}n, x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{\pi}{3}n, n\in\mathscr{Z}$; $\left\{-\frac{5\pi}{18},\ -\frac{2\pi}{18},\right.$
$\left.0,\ \frac{\pi}{18},\ \frac{5\pi}{18},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{7\pi}{18},\ \frac{11\pi}{18},\ \frac{2\pi}{3},\ \frac{13\pi}{18},\ \frac{17\pi}{18}\right\})$.

Список литературы/References

[1] Дятлов В. Н., *Как научить решать задачи с параметрами?*, лекции 1-4, Педагогический университет "Первое сентября", М., 2014, 80 с. [Dyatlov V. N., *Kak nauchit' reshat' zadachi s parametrami [How to teach problem solving with parameters?]*, lekcii 1-4, Pedagogicheskij universitet "Pervoe sentyabrya", M., 2014 (in Russia), 80 pp.]

[2] Дятлов В. Н., *Как научить решать задачи с параметрами?*, лекции 5-8, Педагогический университет "Первое сентября", М., 2014, 80 с. [Dyatlov V. N., *Kak nauchit' reshat' zadachi s parametrami [How to teach problem solving with parameters?]*, lekcii 5-8, Pedagogicheskij universitet "Pervoe sentyabrya", M., 2014 (in Russia), 80 pp.]

[3] Ященко И. В., *Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году*, Базовый и профильный уровни. Методические указания, МНЦМО, М., 2015, 288 с. [Yashchenko I. V., *Podgotovka k EGEH po matematike v 2015 godu [Preparing for the exam in mathematics in 2015]*, Bazovyj i profil'nyj urovni. Metodicheskie ukazaniya, MNCMO, M., 2015 (in Russia), 288 pp.]

Список литературы (ГОСТ)

[1] Дятлов В. Н. Как научить решать задачи с параметрами: лекции 1-4. М.: Педагогический университет "Первое сентября 2014. 80 с.

[2] Дятлов В. Н. Как научить решать задачи с параметрами: лекции 5-8. М.: Педагогический университет "Первое сентября 2014. 80 с.

[3] Ященко И. В. Подготовка к ЕГЭ по математике в 2015 году. Базовый и профильный уровни. Методические указания. М.: МНЦМО, 2015. 288 с.

Для цитирования: Островерхая Л. Д., Жданова О. К. Отбор корней тригонометрических уравнений методом спирали // *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*. 2019. Т. 26. № 1. С. 100-109. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-100-109

For citation: Ostroverkhaya L. D., Zhdanova O. K. Selection of roots of trigonometric equations by the spiral method, *Vestnik KRAUNC. Fiz.-mat. nauki*. 2019, **26**: 1, 100-109. DOI: 10.26117/2079-6641-2019-26-1-100-109

Поступила в редакцию / Original article submitted: 10.10.2018